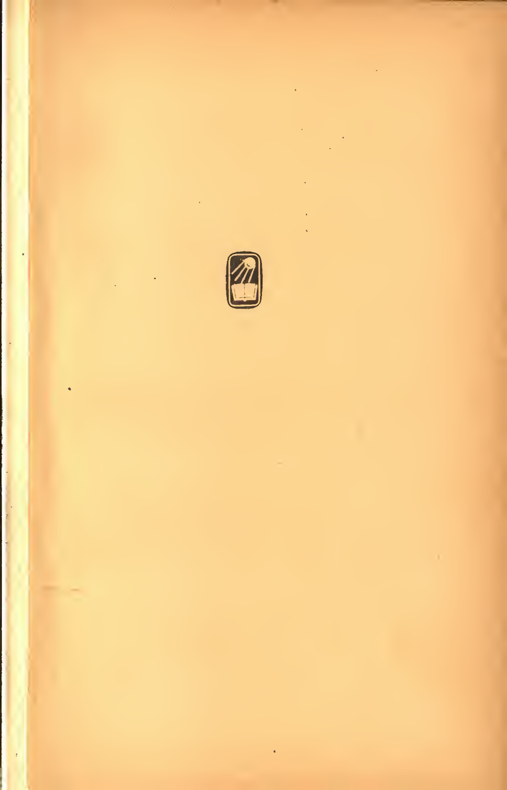
Л. Д. ЛАНДАУ и Е. М. ЛИФШИЦ

ТЕОРИЯ ПОЛЯ

стр 12 Должно быть не взаимодействия, а вз-ие, могут быть разные взаимодействия и они могут передаваться с разными скоростями. Представим себе механизм срабатывающий на звук от какого-то удаленного источника. (~~Звучит сирена~~ раздается взрыв и камертон начинает резонировать) но это не значит что нет движения со скоростью большей, чем скорость звука. Пуля дойдет быстрее и камертон тоже зазвучит. Например системы, способные реагировать на звук и на свет почувствуют сигнал в разное время



ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

ТОМ II

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1967

Л. Д. ЛАНДАУ и Е. М. ЛИФШИЦ

ТЕОРИЯ ПОЛЯ

ИЗДАНИЕ ПЯТОЕ,
ИСПРАВЛЕННОЕ И ДОПОЛНЕННОЕ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1967

530.1
Л 22
УДК 530

Лев Давыдович Ландау,
Евгений Михайлович Лифшиц

Теория поля

М., 1967 г., 460 стр. с илл.

Редактор *Л. И. Гладнева*

Техн. редактор *Л. Ю. Плакше* Корректор *А. С. Бакулова*

Сдано в набор 31/X 1966 г. Подписано к печати 2/III 1967 г. Бумага 60×90/16. Физ. печ. л. 28,75. Условн. печ. л. 28,75. Уч.-изд. л. 26,15. Тираж 75 000 экз. Т-00536. Цена книги 1 р. 12 к. Заказ № 990.

Издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы.
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

Ордена Трудового Красного Знамени
Первая Образцовая типография имени А. А. Жданова
Главполиграфпрома Комитета по печати при Совете Министров СССР
Москва, Ж-54, Валовая, 28.

2-3-2
55-66

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ К ПЯТОМУ ИЗДАНИЮ

Для настоящего издания книга была в ряде мест переработана и дополнена. Эти изменения, разумеется, не затронули ни общего плана, ни характера изложения.

Существенное изменение (намеченное авторами еще несколько лет назад) состоит в переходе по всей книге к другой четырехмерной метрике, в связи с чем пришлось с самого начала ввести как контра-, так и ковариантную формы записи 4-векторов. Тем самым достигается как единообразие системы обозначений в разных частях этой книги, так и ее согласие с системой, приобретающей в настоящее время универсальное распространение в физической литературе. Удобства этой метрики в особенности существенны для дальнейших применений в квантовой теории.

При изучении этой книги в объеме «теоретического минимума» для физиков-теоретиков можно рекомендовать опустить §§ 50, 54—57, 59—61, 68, 70, 74, 77, 99, 103, 106, 111.

Я хотел бы выразить здесь искреннюю благодарность всем товарищам, сделавшим ряд ценных замечаний по этой книге: В. Л. Гинзбургу, Я. Б. Зельдовичу, Б. Я. Зельдовичу, И. Ю. Кобзареву, И. Д. Новикову, В. И. Пустовойту, С. И. Сыроватскому, и в особенности Л. П. Питаевскому, с которым я обсуждал многие вопросы, связанные с переработкой книги.

Е. М. Лифшиц

Май 1966 г.

ИЗ ПРЕДИСЛОВИЯ К ЧЕТВЕРТОМУ ИЗДАНИЮ

Настоящая книга посвящена изложению теории электромагнитного и гравитационного полей. Соответственно общему плану нашего курса «Теоретической физики» мы не касаемся в этом томе вопросов электродинамики сплошных сред, ограничиваясь изложением «микроскопической» электродинамики — электродинамики вакуума и точечных зарядов.

Полная, логически связная теория электромагнитного поля включает в себя специальную теорию относительности, поэтому последняя взята в качестве основы изложения. За исходный пункт вывода основных уравнений берутся вариационные принципы, дающие возможность достичь наибольшей общности, единства и, по существу, простоты изложения.

Последние три главы посвящены изложению теории гравитационных полей, т. е. общей теории относительности. При этом не предполагается предварительного знания читателем тензорного анализа, который излагается параллельно с развитием теории.

Мы выражаем искреннюю благодарность Л. П. Горькову, И. Е. Дзялошинскому и Л. П. Питаевскому за помощь, оказанную ими при проверке формул и чтении корректур.

Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц

Москва, апрель 1961 г.

НЕКОТОРЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

Трехмерные величины

Трехмерные тензорные индексы обозначаются греческими буквами
Элементы объема, площади и длины dV, $d\mathbf{f}$, $d\mathbf{l}$
Импульс и энергия частицы $\mathbf{p}$ и $\mathscr{E}$
Функция Гамильтона $\mathscr{H}$
Скалярный и векторный потенциалы электромагнитного поля φ и $\mathbf{A}$
Напряженности электрического и магнитного полей $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$
Плотности зарядов и тока ρ и $\mathbf{j}$
Электрический дипольный момент $\boldsymbol{d}$
Магнитный дипольный момент $\mathbf{m}$

Четырехмерные величины

Четырехмерные тензорные индексы обозначаются латинскими буквами i, k, l, ... и пробегают значения 0, 1, 2, 3
Принята метрика с сигнатурой $(+---)$
Правило поднятия и опускания индексов — на стр. 29
Компоненты 4-векторов перечисляются в виде $A^i = (A^0, \mathbf{A})$
Антисимметричный единичный тензор 4-го ранга e^{iklm}, причем $e^{0123} = 1$ (определение — на стр. 32)
4-радиус-вектор $x^i = (ct, \mathbf{r})$
4-скорость $u^i = dx^i/ds$
4-импульс $p^i = (\mathscr{E}/c, \mathbf{p})$
4-вектор тока $j^i = (c\rho, \rho\mathbf{v})$
4-потенциал электромагнитного поля $A^i = (\varphi, \mathbf{A})$
4-тензор электромагнитного поля $F_{ik} = \frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k}$ (связь компонент F_{ik} с компонентами $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ — на стр. 87)
4-тензор энергии-импульса T^{ik} (определение его компонент — на стр. 112)

Ссылки типа I § 18 относятся к тому I, «Механика»

ГЛАВА I

ПРИНЦИП ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

§ 1. Скорость распространения взаимодействий

Для описания процессов, происходящих в природе, необходимо иметь, как говорят, систему отсчета. Под системой отсчета понимают систему координат, служащую для указания положения частиц в пространстве, вместе со связанными с этой системой часами, служащими для указания времени.

Существуют системы отсчета, в которых свободное движение тел, т. е. движение тел, не находящихся под действием внешних сил, происходит с постоянной скоростью. Такие системы отсчета носят название *инерциальных*.

Если две системы отсчета движутся друг относительно друга равномерно и прямолинейно и если одна из них инерциальная, то очевидно, что и другая тоже является инерциальной (всякое свободное движение и в этой системе будет прямолинейным и равномерным). Таким образом, имеется сколько угодно инерциальных систем отсчета, движущихся друг относительно друга равномерно-поступательно.

Опыт показывает, что справедлив так называемый *принцип относительности*. Согласно этому принципу все законы природы одинаковы во всех инерциальных системах отсчета. Другими словами, уравнения, выражающие законы природы, инвариантны по отношению к преобразованиям координат и времени от одной инерциальной системы к другой. Это значит, что уравнение, описывающее некоторый закон природы, будучи выражено через координаты и время в различных инерциальных системах отсчета, имеет один и тот же вид.

Взаимодействие материальных частиц описывается в обычной механике посредством потенциальной энергии взаимодействия, являющейся функцией от координат взаимодействующих частиц. Легко видеть, что этот способ описания взаимодействий включает в себя предположение о мгновенности распространения взаимодействий. Действительно, силы, действующие на каждую из частиц со стороны

остальных частиц, в каждый момент зависят, при таком описании, только от положения частиц в этот же момент времени. Изменение положения какой-либо из взаимодействующих частиц отражается на остальных частицах в тот же момент.

Опыт, однако, показывает, что мгновенных взаимодействий в природе не существует. Поэтому и механика, исходящая из представления о мгновенности распространения взаимодействий, заключает в себе некоторую неточность. В действительности, если с одним из взаимодействующих тел происходит какое-нибудь изменение, то на другом теле это отразится лишь по истечении некоторого промежутка времени. Только после этого промежутка времени со вторым телом начнут происходить процессы, вызванные данным изменением. Разделив расстояние между обоими телами на этот промежуток времени, мы найдем «скорость распространения взаимодействий».

Заметим, что эту скорость можно было бы, собственно говоря, называть максимальной скоростью распространения взаимодействий. Она определяет лишь тот промежуток времени, после которого изменение, происходящее с одним телом, начинает проявляться на другом. Очевидно, что наличие максимальной скорости распространения взаимодействий означает в то же время, что в природе вообще невозможно движение тел со скоростью, большей этой. Действительно, если бы такое движение могло происходить, то посредством него можно было бы осуществить взаимодействие со скоростью, превышающей наибольшую возможную скорость распространения взаимодействий.

О взаимодействии, распространяющемся от одной частицы к другой, часто говорят как о «сигнале», отправляющемся от первой частицы и «дающем знать» второй об изменении, которое испытала первая. О скорости распространения взаимодействий говорят тогда как о «скорости сигнала».

Из принципа относительности вытекает, в частности, что скорость распространения взаимодействий одинакова во всех инерциальных системах отсчета. Таким образом, скорость распространения взаимодействий является универсальной постоянной.

Эта постоянная скорость одновременно является, как будет показано в дальнейшем, скоростью распространения света в пустоте; поэтому ее называют *скоростью света*. Она обозначается обычно буквой c, а ее численное значение

$$c = 2{,}99793 \cdot 10^{10}\ \textit{см/сек}. \qquad (1,1)$$

Большой величиной этой скорости объясняется тот факт, что на практике в большинстве случаев достаточно точной оказывается классическая механика. Большинство скоростей, с которыми нам приходится иметь дело, настолько малы по сравнению со скоростью

света, что предположение о бесконечности последней практически не влияет на точность результатов.

Объединение принципа относительности с конечностью скорости распространения взаимодействий называется *принципом относительности Эйнштейна* (он был сформулирован А. Эйнштейном в 1905 г.) в отличие от принципа относительности Галилея, исходящего из бесконечной скорости распространения взаимодействий.

Механика, основанная на эйнштейновском принципе относительности (мы будем обычно называть его просто принципом относительности), называется *релятивистской*. В предельном случае, когда скорости движущихся тел малы по сравнению со скоростью света, можно пренебречь влиянием конечности скорости распространения взаимодействий на движение. Тогда релятивистская механика переходит в обычную механику, основанную на предположении о мгновенности распространения взаимодействий; эту механику называют ньютоновской или классической. Предельный переход от релятивистской механики к классической может быть формально произведен как переход к пределу $c \to \infty$ в формулах релятивистской механики.

Уже в классической механике пространство относительно, т. е. пространственные соотношения между различными событиями зависят от того, в какой системе отсчета они описываются. Утверждение, что два разновременных события происходят в одном и том же месте пространства или, вообще, на определенном расстоянии друг от друга, приобретает смысл только тогда, когда указано, к какой системе отсчета это утверждение относится.

Напротив, время является в классической механике абсолютным; другими словами, свойства времени считаются не зависящими от системы отсчета — время одно для всех систем отсчета. Это значит, что если какие-нибудь два явления происходят одновременно для какого-нибудь наблюдателя, то они являются одновременными и для всякого другого. Вообще, промежуток времени между двумя данными событиями должен быть одинаков во всех системах отсчета.

Легко, однако, убедиться в том, что понятие абсолютного времени находится в глубоком противоречии с эйнштейновским принципом относительности. Для этого достаточно уже вспомнить, что в классической механике, основанной на понятии об абсолютном времени, имеет место общеизвестный закон сложения скоростей, согласно которому скорость сложного движения равна просто сумме (векторной) скоростей, составляющих это движение. Этот закон, будучи универсальным, должен был бы быть применим и к распространению взаимодействий. Отсюда следовало бы, что скорость этого распространения должна быть различной в различных инерциальных системах отсчета, в противоречии с принципом относительности. Опыт, однако, вполне подтверждает в этом отношении принцип

относительности. Измерения, произведенные впервые Майкельсоном (в 1881 г.), обнаружили полную независимость скорости света от направления его распространения; между тем согласно классической механике скорость света в направлении движения Земли должна была бы быть отличной от скорости в противоположном направлении.

Таким образом, принцип относительности приводит к результату, что время не является абсолютным. Время течет по-разному в разных системах отсчета. Следовательно, утверждение, что между двумя данными событиями прошел определенный промежуток времени, приобретает смысл только тогда, когда указано, к какой системе отсчета это утверждение относится. В частности, события, одновременные в некоторой системе отсчета, будут не одновременными в другой системе.

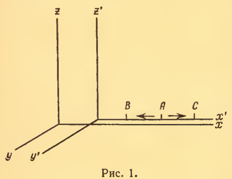


Рис. 1.

Для уяснения этого полезно рассмотреть следующий простой пример. Рассмотрим две инерциальные системы отсчета K и K' с осями координат соответственно xyz и $x'y'z'$, причем система K' движется относительно K вправо вдоль осей x и x' (рис. 1).

Пусть из некоторой точки A на оси x' отправляются сигналы в двух взаимно противоположных направлениях. Поскольку скорость распространения сигнала в системе K', как и во всякой инерциальной системе, равна (в обоих направлениях) c, то сигналы достигнут равноудаленных от A точек B и C в один и тот же момент времени (в системе K'). Легко, однако, видеть, что те же самые два события (приход сигнала в B и C) будут отнюдь не одновременными для наблюдателя в системе K. Действительно, скорость сигналов относительно системы K согласно принципу относительности равна тому же c, и поскольку точка B движется (относительно системы K) навстречу посланному в нее сигналу, а точка C — по направлению от сигнала (посланному из A в C), то в системе K сигнал придет в точку B раньше, чем в точку C.

Таким образом, принцип относительности Эйнштейна вносит фундаментальные изменения в основные физические понятия. Заимствованные нами из повседневного опыта представления о пространстве и времени оказываются лишь приближенными, связанными с тем, что в повседневной жизни нам приходится иметь дело только со скоростями, очень малыми по сравнению со скоростью света.

§ 2. Интервал

В дальнейшем мы будем часто пользоваться понятием *события*. Событие определяется местом, где оно произошло, и временем, когда оно произошло. Таким образом, событие, происходящее с некоторой материальной частицей, определяется тремя координатами этой частицы и моментом времени, когда происходит событие.

Часто полезно из соображений наглядности пользоваться воображаемым четырехмерным пространством, на осях которого откладываются три пространственные координаты и время. В этом пространстве событие изображается точкой. Эти точки называются *мировыми точками*. Всякой частице соответствует некоторая линия (*мировая линия*) в этом четырехмерном пространстве. Точки этой линии определяют координаты частицы во все моменты времени. Очевидно, что равномерно и прямолинейно движущейся материальной частице соответствует прямая мировая линия.

Выразим теперь принцип инвариантности скорости света математически. Для этого рассмотрим две системы отсчета K и K', движущиеся друг относительно друга с постоянной скоростью. Координатные оси выберем при этом таким образом, чтобы оси x и x' совпадали, а оси y и z были параллельны осям y' и z'; время в системах K и K' обозначим через t и t'.

Пусть первое событие состоит в том, что отправляется сигнал, распространяющийся со скоростью света, из точки, имеющей координаты x_1, y_1, z_1 в системе K в момент времени t_1 в этой же системе. Будем наблюдать из системы K распространение этого сигнала. Пусть второе событие состоит в том, что сигнал приходит в точку x_2, y_2, z_2 в момент времени t_2. Сигнал распространяется со скоростью c; пройденное им расстояние равно поэтому $c(t_2-t_1)$. С другой стороны, это же расстояние равно $[(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2]^{1/2}$. Таким образом, мы можем написать следующую зависимость между координатами обоих событий в системе K:

$$(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2-c^2(t_2-t_1)^2=0. \qquad (2,1)$$

Те же два события, т. е. распространение сигнала, можно наблюдать из системы K'. Пусть координаты первого события в системе K': x_1', y_1', z_1', t_1', а второго: x_2', y_2', z_2', t_2'. Поскольку скорость света в системах K и K' одинакова, то, аналогично (2,1), имеем:

$$(x_2'-x_1')^2+(y_2'-y_1')^2+(z_2'-z_1')^2-c^2(t_2'-t_1')^2=0. \qquad (2,2)$$

Если x_1, y_1, z_1, t_1 и x_2, y_2, z_2, t_2 — координаты каких-либо двух событий, то величина

$$s_{12}=[c^2(t_2-t_1)^2-(x_2-x_1)^2-(y_2-y_1)^2-(z_2-z_1)^2]^{1/2} \qquad (2,3)$$

называется *интервалом* между этими двумя событиями.

Таким образом, из инвариантности скорости света следует, что если интервал между двумя событиями равен нулю в одной системе отсчета, то он равен нулю и во всякой другой системе.

Если два события бесконечно близки друг к другу, то для интервала ds между ними имеем:

$$ds^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2. \qquad (2,4)$$

Форма выражений (2,3) или (2,4) позволяет рассматривать интервал, с формальной математической точки зрения, как расстояние между двумя точками в воображаемом четырехмерном пространстве (на осях которого откладываем x, y, z и произведение ct). Имеется, однако, существенное отличие в правиле составления этой величины по сравнению с правилом обычной геометрии: при образовании квадрата интервала квадраты разностей координат по различным осям суммируются не с одинаковыми, а с различными знаками [1]).

Как было показано выше, если $ds = 0$ в некоторой инерциальной системе отсчета, то $ds' = 0$ и в другой системе. С другой стороны, ds и ds' — бесконечно малые одинакового порядка. Из этих двух обстоятельств следует, что ds^2 и ds'^2 должны быть пропорциональны друг другу:

$$ds^2 = a\, ds'^2,$$

причем коэффициент a может зависеть только от абсолютной величины относительной скорости обеих инерциальных систем. Он не может зависеть от координат и времени, так как тогда различные точки пространства и моменты времени были бы не равноценны, что противоречит однородности пространства и времени. Он не может зависеть также и от направления относительной скорости, так как это противоречило бы изотропности пространства.

Рассмотрим три системы отсчета K, K_1, K_2 и пусть $\mathbf{V}_1$ и $\mathbf{V}_2$ — скорости движения систем K_1 и K_2 относительно K. Тогда имеем:

$$ds^2 = a(V_1)\, ds_1^2, \quad ds^2 = a(V_2)\, ds_2^2.$$

С тем же основанием можно написать

$$ds_1^2 = a(V_{12})\, ds_2^2,$$

где V_{12} — абсолютная величина скорости движения K_2 относительно K_1. Сравнивая друг с другом эти соотношения, найдем, что должно быть

$$\frac{a(V_2)}{a(V_1)} = a(V_{12}). \qquad (2,5)$$

---

[1]) Четырехмерную геометрию, определяемую квадратичной формой (2,4), называют *псевдоевклидовой* в отличие от обычной, евклидовой, геометрии. Эта геометрия была введена в связи с теорией относительности *Г. Минковским*.

Но V_{12} зависит не только от абсолютных величин векторов $\mathbf{V}_1$ и $\mathbf{V}_2$, но и от угла между ними. Между тем последний вообще не входит в левую часть соотношения (2,5). Ясно поэтому, что это соотношение может быть справедливым лишь, если функция $a(V)$ сводится к постоянной величине, равной, как это следует из того же соотношения, единице.

Таким образом,

$$ds^2 = ds'^2,$$

а из равенства бесконечно малых интервалов следует равенство также и конечных интервалов: $s = s'$.

Мы приходим, следовательно, к важнейшему результату: интервал между событиями одинаков во всех инерциальных системах отсчета, т. е. является инвариантом по отношению к преобразованию от одной инерциальной системы отсчета к любой другой. Эта инвариантность и является математическим выражением постоянства скорости света.

Пусть опять x_1, y_1, z_1, t_1 и x_2, y_2, z_2, t_2 — координаты двух событий в некоторой системе отсчета K. Спрашивается, существует ли такая система отсчета K', в которой оба эти события происходили бы в одном и том же месте пространства.

Введем обозначения

$$t_2 - t_1 = t_{12}, \quad (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 = l_{12}^2.$$

Тогда квадрат интервала между событиями в системе K:

$$s_{12}^2 = c^2 t_{12}^2 - l_{12}^2$$

и в системе K':

$$s_{12}'^2 = c^2 t_{12}'^2 - l_{12}'^2,$$

причем в силу инвариантности интервала

$$c^2 t_{12}^2 - l_{12}^2 = c^2 t_{12}'^2 - l_{12}'^2.$$

Мы хотим, чтобы в системе K' оба события произошли в одной точке, т. е. чтобы $l_{12}' = 0$. Тогда

$$s_{12}^2 = c^2 t_{12}^2 - l_{12}^2 = c^2 t_{12}'^2 > 0.$$

Следовательно, система отсчета с требуемым свойством существует, если $s_{12}^2 > 0$, т. е. если интервал между обоими событиями вещественный. Вещественные интервалы называют *времениподобными*.

Таким образом, если интервал между двумя событиями времениподобный, то существует такая система отсчета, в которой оба события произошли в одном и том же месте. Время, которое пройдет между этими событиями в этой системе, равно

$$t_{12}' = \frac{1}{c}\sqrt{c^2 t_{12}^2 - l_{12}^2} = \frac{s_{12}}{c}. \qquad (2,6)$$

Если какие-нибудь два события происходят с одним и тем же телом, то интервал между ними всегда времениподобный. Действительно, путь, который тело проходит между обоими событиями, не может быть больше ct_{12}, так как скорость тела не может быть больше c. Поэтому всегда

$$l_{12} < ct_{12}.$$

Зададимся теперь вопросом, нельзя ли выбрать такую систему отсчета, в которой два события произошли бы в одно и то же время. По-прежнему мы имеем в системах K и K': $c^2t_{12}^2 - l_{12}^2 = c^2t_{12}'^2 - l_{12}'^2$. Мы хотим, чтобы $t_{12}' = 0$; отсюда

$$s_{12}^2 = -l_{12}'^2 < 0.$$

Следовательно, искомую систему отсчета можно найти только в том случае, когда интервал s_{12} между двумя событиями мнимый. Мнимые интервалы называют *пространственноподобными*.

Таким образом, если интервал между двумя событиями пространственноподобный, то существует такая система отсчета, в которой оба события происходят одновременно. Расстояние между точками, где произошли эти события в этой системе отсчета, равно

$$l_{12}' = \sqrt{l_{12}^2 - c^2t_{12}^2} = is_{12}. \tag{2,7}$$

Подразделение интервалов на времениподобные и пространственноподобные есть, в силу их инвариантности, понятие абсолютное. Это значит, что свойство интервала быть времениподобным или пространственноподобным не зависит от системы отсчета.

Рис. 2.

Возьмем какое-нибудь событие — назовем его событием O — в качестве начала отсчета времени и пространственных координат. Другими словами, в четырехмерной системе координат, на осях которой откладываются x, y, z и t, мировая точка события O будет началом координат. Посмотрим теперь, в каком отношении к данному событию O находятся все остальные события. Для наглядности мы будем рассматривать только одну пространственную координату и время, откладывая их на двух осях (рис. 2). Прямолинейное равномерное движение частицы, проходящей точку $x=0$ при $t=0$, изобразится прямой линией, проходящей через O и наклоненной к оси t под углом, тангенс которого равен скорости частицы. Поскольку наибольшая возможная скорость равна c, то существует наибольший угол, который может образовывать эта прямая с осью t. На рис. 2 изображены

две прямые, изображающие распространение двух сигналов (со скоростью света) в противоположных направлениях, проходящих через событие O (т. е. проходящих $x=0$ при $t=0$). Все линии, изображающие движения частиц, могут лежать только внутри областей aOc и dOb. На прямых ab и cd, очевидно, $x=\pm ct$. Рассмотрим сначала события, мировые точки которых лежат внутри области aOc. Легко сообразить, что во всех точках этой области $c^2t^2-x^2>0$. Другими словами, интервалы между любым событием этой области и событием O — времениподобные. В этой области $t>0$, т. е. все события этой области происходят «после» события O. Но два события, разделенных времениподобным интервалом, ни в какой системе отсчета не могут происходить одновременно. Следовательно, нельзя выбрать и никакой системы отсчета, где бы какое-нибудь из событий области aOc происходило «до» события O, т. е. когда было бы $t<0$. Таким образом, все события области aOc являются будущими по отношению к O, и притом во всех системах отсчета. Эту область можно поэтому назвать «абсолютно будущей» по отношению к событию O.

Совершенно аналогично все события области bOd являются «абсолютно прошедшими» по отношению к O, т. е. события этой области во всех системах отсчета происходят до события O.

Наконец, рассмотрим еще области dOa и cOb. Интервал между любым событием этой области и событием O — пространственноподобный. В любой системе отсчета эти события происходят в разных местах пространства. Поэтому эти области можно назвать «абсолютно удаленными» по отношению к O. Понятия «одновременно», «раньше» и «позже» для этих событий, однако, относительны. Для всякого события этой области есть такие системы отсчета, где оно происходит позже события O, системы, где оно происходит раньше O, и, наконец, одна система отсчета, где оно происходит одновременно с O.

Заметим, что если рассматривать все три пространственные координаты вместо одной, то вместо двух пересекающихся прямых на рис. 2 мы имели бы «конус» $x^2+y^2+z^2-c^2t^2=0$ в четырехмерной системе координат x, y, z, t, ось которого совпадает с осью t (этот конус называют *световым конусом*). Области «абсолютно будущего» и «абсолютно прошедшего» изображаются тогда соответственно двумя внутренними полостями этого конуса.

Два события могут быть причинно связаны друг с другом только в том случае, если интервал между ними времениподобный, что непосредственно следует из того, что никакое взаимодействие не может распространяться со скоростью, большей скорости света. Как мы только что видели, как раз для таких событий имеют абсолютный смысл понятия «раньше» и «позже», что является необходимым условием для того, чтобы имели смысл понятия причины и следствия.

§ 3. Собственное время

Предположим, что мы наблюдаем из некоторой инерциальной системы отсчета произвольным образом движущиеся относительно нас часы. В каждый отдельный момент времени это движение можно рассматривать как равномерное. Поэтому в каждый момент времени можно ввести неподвижно связанную с движущимися часами систему координат, которая (вместе с часами) будет являться тоже инерциальной системой отсчета.

В течение бесконечно малого промежутка времени dt (по неподвижным, т. е. связанным с нами, часам) движущиеся часы проходят расстояние

$$\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}.$$

Спрашивается, какой промежуток времени dt' покажут при этом движущиеся часы. В системе координат, связанной с движущимися часами, последние покоятся, т. е. $dx'=dy'=dz'=0$. В силу инвариантности интервала

$$ds^2=c^2dt^2-dx^2-dy^2-dz^2=c^2dt'^2,$$

откуда

$$dt'=dt\sqrt{1-\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{c^2dt^2}}.$$

Но

$$\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{dt^2}=v^2,$$

где v есть скорость движущихся часов; поэтому

$$dt'=\frac{ds}{c}=dt\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}. \tag{3,1}$$

Интегрируя это выражение, можно найти промежуток времени, показываемый движущимися часами, если по неподвижным часам пройдет время t_2-t_1:

$$t'_2-t'_1=\int_{t_1}^{t_2}dt\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}. \tag{3,2}$$

Время отсчитываемое по часам, движущимся вместе с данным объектом, называется *собственным временем* этого объекта. Формулы (3,1) и (3,2) выражают собственное время через время системы отсчета, относительно которой рассматривается движение.

Как видно из (3,1) или (3,2), собственное время движущегося объекта всегда меньше, чем соответствующий промежуток времени в неподвижной системе. Другими словами, движущиеся часы идут медленнее неподвижных.

Пусть относительно инерциальной системы отсчета K движутся прямолинейно и равномерно другие часы. Система отсчета, связанная с этими последними, тоже инерциальная. Тогда часы в системе K' с точки зрения наблюдателя в системе K отстают по сравнению с его часами. И наоборот, с точки зрения системы K' отстают часы в системе K. Убедиться в отсутствии какого-либо противоречия можно, обратив внимание на следующее обстоятельство. Для того чтобы установить, что часы в системе K' отстают относительно часов в системе K, надо поступить следующим образом. Пусть в некоторый момент времени часы K' пролетают мимо часов в K, и в этот момент показания обоих часов совпадают. Для сравнения хода часов K и K' надо вновь сравнить показания тех же движущихся часов K' с часами в K. Но теперь мы уже сравниваем эти часы с другими часами в K — с теми, мимо которых часы K' пролетают в другой момент. При этом мы обнаружим, что часы K' будут отставать по сравнению с часами в K, с которыми они сравниваются. Мы видим, что для сравнения хода часов в двух системах отсчета необходимы несколько часов в одной системе и одни в другой. Поэтому этот процесс не симметричен по отношению к обеим системам. Всегда окажутся отстающими те часы, которые сравниваются с разными часами в другой системе отсчета.

Если же имеются двое часов, из которых одни описывают замкнутую траекторию, возвращаясь в исходное место (к неподвижным часам), то окажутся отстающими именно движущиеся часы (по сравнению с неподвижными). Обратное рассуждение, в котором движущиеся часы рассматривались бы как неподвижные, теперь невозможно, так как часы, описывающие замкнутую траекторию, не движутся равномерно и прямолинейно, а потому связанная с ними система отсчета не является инерциальной.

Поскольку законы природы одинаковы только в инерциальных системах отсчета, то системы отсчета, связанные с неподвижными часами (инерциальная система) и с движущимися (неинерциальная), обладают разными свойствами, и рассуждение, приводящее к результату, что покоящиеся часы должны оказаться отстающими, неправильно.

Промежуток времени, показываемый часами, равен интегралу $\frac{1}{c}\int_a^b ds$, взятому вдоль мировой линии этих часов. Если часы неподвижны, то их мировая линия является прямой, параллельной оси времени; если же часы совершают неравномерное движение по замкнутому пути и возвращаются в исходное место, то их мировая линия будет кривой, проходящей через две точки на прямой мировой линии неподвижных часов, соответствующих началу и концу движения. С другой стороны, мы видели, что покоящиеся часы показывают

всегда больший промежуток времени, чем движущиеся. Таким образом, мы приходим к выводу, что интеграл $\int_a^b ds$, взятый между двумя заданными мировыми точками, имеет максимальное значение, если он берется по прямой мировой линии, соединяющей эти точки[1]).

§ 4. Преобразование Лоренца

Нашей целью будет сейчас нахождение формул преобразования от одной инерциальной системы отсчета к другой, т. е. формул, по которым, зная координаты x, y, z, t события в некоторой системе отсчета K, можно найти координаты x', y', z', t' того же события в другой инерциальной системе K'.

В классической механике этот вопрос решается очень просто. В силу абсолютности времени мы имеем там $t=t'$; далее, если оси координат выбраны так, как мы это обычно делаем (т. е. оси x и x' совпадают, оси y, z параллельны осям y', z', движение вдоль осей x и x'), то координаты y и z будут, очевидно, равны координатам y' и z', а координаты x и x' будут отличаться на расстояние, пройденное одной системой относительно другой; если начало отсчета времени выбрано в момент, когда обе системы координат совпадали, а скорость системы K' относительно K есть V, то это расстояние есть Vt. Таким образом,

$$x=x'+Vt, \quad y=y', \quad z=z', \quad t=t'. \tag{4,1}$$

Эти формулы называются *преобразованием Галилея*. Легко проверить, что это преобразование, как и следовало, не удовлетворяет требованию теории относительности,—оно не оставляет инвариантными интервалы между событиями.

Релятивистские же формулы преобразования мы будем искать исходя из требования, чтобы они оставляли интервалы инвариантными.

Как мы видели в § 2, интервал между двумя событиями можно рассматривать как расстояние между соответствующими двумя мировыми точками в четырехмерной системе координат. Мы можем, следовательно, сказать, что искомое преобразование должно оставлять неизменными все длины в четырехмерном пространстве x, y, z, ct. Но такими преобразованиями являются только параллельные переносы и вращения системы координат. Из них переносы системы координат параллельно самой себе не представляют интереса, так как сводятся

[1]) Предполагается, разумеется, что точки a и b и соединяющие их линии таковы, что все элементы ds вдоль линий временноподобны.

Указанное свойство интеграла связано с псевдоевклидовостью четырехмерной геометрии. В евклидовом пространстве интеграл был бы, конечно, минимален вдоль прямой линии.

просто к переносу начала пространственных координат и изменению момента начала отсчета времени. Таким образом, искомое преобразование должно математически выражаться как вращение четырехмерной системы координат x, y, z, t.

Всякое вращение в четырехмерном пространстве можно разложить на шесть вращений, а именно в плоскостях xy, zy, xz, tx, ty, tz (подобно тому, как всякое вращение в обычном пространстве можно разложить на три вращения в плоскостях xy, zy и xz). Первые три из этих вращений преобразуют только пространственные координаты; они соответствуют обычным пространственным поворотам.

Рассмотрим поворот в плоскости tx; координаты y и z при этом не меняются. Это преобразование должно оставлять неизменной, в частности, разность $(ct)^2 - x^2$ — квадрат «расстояния» от точки (ct, x) до начала координат. Связь между старыми и новыми координатами в этом преобразовании дается в наиболее общем виде формулами

$$x = x' \operatorname{ch} \psi + ct' \operatorname{sh} \psi, \qquad ct = x' \operatorname{sh} \psi + ct' \operatorname{ch} \psi, \tag{4,2}$$

где ψ — «угол поворота»; простой проверкой легко убедиться, что при этом действительно будет $c^2t^2 - x^2 = c^2t'^2 - x'^2$. Формулы (4,2) отличаются от обычных формул преобразования при повороте осей координат заменой тригонометрических функций гиперболическими. В этом проявляется отличие псевдоевклидовой геометрии от евклидовой.

Мы ищем формулы преобразования от инерциальной системы отсчета K к системе K', которая движется относительно K со скоростью V вдоль оси x. При этом, очевидно, подвергаются преобразованию только координата x и время t. Поэтому это преобразование должно быть вида (4,2). Остается определить угол ψ, который может зависеть только от относительной скорости V[1]).

Рассмотрим движение в системе K начала координат системы отсчета K'. Тогда $x' = 0$ и формулы (4,2) принимают вид:

$$x = ct' \operatorname{sh} \psi, \qquad ct = ct' \operatorname{ch} \psi,$$

или, разделив одно на другое:

$$\frac{x}{ct} = \operatorname{th} \psi.$$

Но x/t есть, очевидно, скорость V системы K' относительно K. Таким образом,

$$\operatorname{th} \psi = \frac{V}{c}.$$

---

[1]) Во избежание недоразумений заметим, что через V мы везде обозначаем постоянную относительную скорость двух инерциальных систем отсчета, а через v — скорость движущейся частицы, вовсе не обязанную быть постоянной.

Отсюда

$$\operatorname{sh}\psi=\frac{\frac{V}{c}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}},\quad \operatorname{ch}\psi=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}.$$

Подставив это в (4,2), находим:

$$x=\frac{x'+Vt'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}},\quad y=y',\quad z=z',\quad t=\frac{t'+\frac{V}{c^2}x'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}. \qquad (4,3)$$

Это и есть искомые формулы преобразования. Они носят название формул *преобразования Лоренца* и имеют для дальнейшего фундаментальное значение.

Обратные формулы, выражающие x', y', z', t' через x, y, z, t, проще всего получаются заменой V на $-V$ (так как система K движется относительно K' со скоростью $-V$). Эти же формулы можно получить непосредственно, решая уравнения (4,3) относительно x', y', z', t'.

Легко видеть из (4,3), что при предельном переходе $c\to\infty$ к классической механике формулы преобразования Лоренца действительно переходят в преобразование Галилея.

При $V>c$ в формулах (4,3) координаты x, t делаются мнимыми; это соответствует тому факту, что движение со скоростью, большей скорости света, невозможно. Невозможно даже использование системы отсчета, движущейся со скоростью, равной скорости света, — при этом знаменатели в формулах (4,3) обратились бы в нуль.

Для скоростей V, малых по сравнению со скоростью света, вместо (4,3) можно пользоваться приближенными формулами:

$$x=x'+Vt',\quad y=y',\quad z=z',\quad t=t'+\frac{V}{c^2}x'. \qquad (4,4)$$

Пусть в системе K покоится линейка, параллельная оси x. Длина ее, измеренная в этой системе, пусть будет $\Delta x=x_2-x_1$ (x_2 и x_1 — координаты обоих концов линейки в системе K). Найдем теперь длину этого стержня, измеренную в системе K'. Для этого надо найти координаты обоих концов стержня (x_2' и x_1') в этой системе в один и тот же момент времени t'. Из (4,3) находим:

$$x_1=\frac{x_1'+Vt'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}},\quad x_2=\frac{x_2'+Vt'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}.$$

Длина стержня в системе K' есть $\Delta x' = x_2' - x_1'$; вычитая x_2 из x_1, находим:

$$\Delta x = \frac{\Delta x'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}.$$

Собственной длиной стержня называется его длина в той системе отсчета, в которой он покоится. Обозначим ее через $l_0 = \Delta x$, а длину того же стержня в какой-либо системе отсчета K' — через l. Тогда

$$l = l_0 \sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}. \tag{4,5}$$

Таким образом, самую большую длину стержень имеет в той системе отсчета, где он покоится. Длина его в системе, в которой он движется со скоростью V, уменьшается в отношении $\sqrt{1-V^2/c^2}$. Этот результат теории относительности называется *лоренцевым сокращением*.

Поскольку поперечные размеры тела при его движении не меняются, то объем $\mathcal{V}$ тела сокращается по аналогичной формуле

$$\mathcal{V} = \mathcal{V}_0 \sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}, \tag{4,6}$$

где $\mathcal{V}_0$ есть *собственный объем* тела.

Из преобразования Лоренца можно найти известные нам уже результаты относительно собственного времени (§ 3). Пусть в системе K' покоятся часы. В качестве двух событий возьмем два события, происшедших в одном и том же месте x', y', z' пространства в системе K'. Время в системе K' между этими событиями есть $\Delta t' = t_2' - t_1'$. Найдем теперь время Δt, которое прошло между этими же событиями в системе отсчета K. Из (4,3) имеем:

$$t_1 = \frac{t_1' + \frac{V}{c^2}x'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}, \quad t_2 = \frac{t_2' + \frac{V}{c^2}x'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}},$$

или, вычитая одно из другого,

$$t_2 - t_1 = \Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}},$$

в полном согласии с (3,1).

Наконец, отметим еще одно общее свойство преобразований Лоренца, отличающее их от преобразований Галилея. Последние

обладают, как говорят, свойством коммутативности, т. е. совместный результат двух последовательных преобразований Галилея (с различными скоростями $\mathbf{V}_1$ и $\mathbf{V}_2$) не зависит от порядка, в котором эти преобразования производятся. Напротив, результат двух последовательных преобразований Лоренца зависит, вообще говоря, от их последовательности. Чисто математически это видно уже из использованного выше формального истолкования этих преобразований как вращений четырехмерной системы координат: как известно, результат двух поворотов (вокруг различных осей) зависит от порядка их осуществления. Исключением являются лишь преобразования с параллельными векторами $\mathbf{V}_1$ и $\mathbf{V}_2$ (эквивалентные поворотам четырехмерной системы координат вокруг одной и той же оси).

§ 5. Преобразование скорости

Мы нашли в предыдущем параграфе формулы, позволяющие по координатам события в одной системе отсчета найти координаты того же события в другой системе отсчета. Теперь мы найдем формулы, связывающие скорость движущейся материальной частицы в одной системе отсчета со скоростью той же частицы в другой системе.

Пусть опять система K' движется относительно системы K со скоростью V вдоль оси x. Пусть $v_x = dx/dt$ есть компонента скорости в системе K, а $v'_x = dx'/dt'$ — компонента скорости той же частицы в системе K'.

Из (4,3) мы имеем:

$$dx = \frac{dx' + V dt'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}, \quad dy = dy', \quad dz = dz' \quad dt = \frac{dt' + \frac{V}{c^2}dx'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}.$$

Разделив первые три равенства на четвертое и введя скорости

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}, \qquad \mathbf{v}' = \frac{d\mathbf{r}'}{dt'},$$

находим:

$$v_x = \frac{v'_x + V}{1 + \frac{v'_x V}{c^2}}, \quad v_y = \frac{v'_y \sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}{1 + \frac{v'_x V}{c^2}}, \quad v_z = \frac{v'_z \sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}{1 + \frac{v'_x V}{c^2}}. \quad (5,1)$$

Эти формулы и определяют преобразование скоростей. Они представляют собой закон сложения скоростей в теории относительности. В предельном случае $c \to \infty$ они переходят в формулы классической механики $v_x = v'_x + V$, $v_y = v'_y$, $v_z = v'_z$.

В частном случае движения частицы параллельно оси x $v_x = v$, $v_y = v_z = 0$. Тогда $v'_y = v'_z = 0$, а $v'_x = v'$, причем

$$v = \frac{v' + V}{1 + \frac{v'V}{c^2}}. \tag{5,2}$$

Легко убедиться в том, что сумма двух скоростей, меньших или равных скорости света, есть снова скорость, не бо́льшая скорости света.

Для скоростей V, значительно меньших скорости света (скорость v может быть любой), имеем приближенно с точностью до членов порядка V/c:

$$v_x = v'_x + V\left(1 - \frac{v'^2_x}{c^2}\right), \quad v_y = v'_y - v'_x v'_y \frac{V}{c^2}, \quad v_z = v'_z - v'_x v'_z \frac{V}{c^2}.$$

Эти три формулы можно записать в виде одной векторной формулы

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{V} - \frac{1}{c^2}(\mathbf{V}\mathbf{v}')\,\mathbf{v}'. \tag{5,3}$$

Обратим внимание на то, что в релятивистский закон сложения скоростей (5,1) две складываемые скорости $\mathbf{v}'$ и $\mathbf{V}$ входят несимметричным образом (если только обе они не направлены вдоль оси x). Это обстоятельство естественным образом связано с упомянутой в предыдущем параграфе некоммутативностью преобразований Лоренца.

Выберем оси координат так, чтобы скорость частицы в данный момент лежала в плоскости xy. Тогда скорость частицы в системе K имеет компоненты $v_x = v\cos\theta$, $v_y = v\sin\theta$, а в системе K' имеем $v'_x = v'\cos\theta'$, $v'_y = v'\sin\theta'$ (v, v' и θ, θ' — абсолютные величины и углы, образованные скоростью с осями x и x' соответственно в системах K и K'). С помощью формул (5,1) находим тогда

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{v'\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}\sin\theta'}{v'\cos\theta' + V}. \tag{5,4}$$

Эта формула определяет изменение направления скорости при переходе от одной системы отсчета к другой.

Рассмотрим подробнее важный частный случай этой формулы, а именно отклонение света при переходе к другой системе отсчета, — явление, называемое *аберрацией* света. В этом случае $v = v' = c$ и предыдущая формула переходит в

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{\frac{V}{c} + \cos\theta'}\sin\theta'. \tag{5,5}$$

Из тех же формул преобразования (5,1) легко получить аналогичную зависимость для $\sin\theta$ и $\cos\theta$:

$$\sin\theta = \frac{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}{1+\frac{V}{c}\cos\theta'}\sin\theta', \qquad \cos\theta = \frac{\cos\theta' + \frac{V}{c}}{1+\frac{V}{c}\cos\theta'}. \tag{5,6}$$

В случае $V \ll c$ находим из (5,6) с точностью до членов порядка V/c:

$$\sin\theta - \sin\theta' = \frac{V}{c}\sin\theta'\cos\theta'.$$

Вводя угол $\Delta\theta = \theta' - \theta$ (угол аберрации), находим с той же точностью:

$$\Delta\theta = \frac{V}{c}\sin\theta', \tag{5,7}$$

т. е. известную элементарную формулу для аберрации света.

§ 6. Четырехмерные векторы

Совокупность координат события (ct, x, y, z) можно рассматривать как компоненты четырехмерного радиус-вектора (или, как мы будем говорить для краткости, 4-радиус-вектора) в четырехмерном пространстве. Его компоненты мы будем обозначать через x^i, где индекс i пробегает значения 0, 1, 2, 3, причем

$$x^0 = ct, \quad x^1 = x, \quad x^2 = y, \quad x^3 = z.$$

Квадрат «длины» 4-радиус-вектора дается выражением

$$(x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2.$$

Он не меняется при любых поворотах четырехмерной системы координат, которыми являются, в частности, преобразования Лоренца.

Вообще *четырехмерным вектором* (4-вектором) A^i называется совокупность четырех величин A^0, A^1, A^2, A^3, которые при преобразованиях четырехмерной системы координат преобразуются как компоненты 4-радиус-вектора x^i. При преобразовании Лоренца

$$A^0 = \frac{A'^0 + \frac{V}{c}A'^1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}, \quad A^1 = \frac{A'^1 + \frac{V}{c}A'^0}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}, \quad A^2 = A'^2, \quad A^3 = A'^3. \tag{6,1}$$

Квадрат величины всякого 4-вектора определяется аналогично квадрату 4-радиус-вектора:

$$(A^0)^2 - (A^1)^2 - (A^2)^2 - (A^3)^2.$$

Для удобства записи подобных выражений вводят два «сорта» компонент 4-векторов, обозначая их буквами A^i и A_i с индексами сверху и снизу. При этом

$$A_0 = A^0, \quad A_1 = -A^1, \quad A_2 = -A^2, \quad A_3 = -A^3. \qquad (6,2)$$

Величины A^i называют *контравариантными*, а A_i — *ковариантными* компонентами 4-вектора. Квадрат 4-вектора представится тогда в виде

$$\sum_{i=0}^{3} A^i A_i = A^0 A_0 + A^1 A_1 + A^2 A_2 + A^3 A_3.$$

Такие суммы принято записывать просто как $A^i A_i$, опуская знак суммирования. Вообще принимается правило, согласно которому по всякому индексу, повторяющемуся в данном выражении дважды, подразумевается суммирование, а знак суммы опускается. При этом в каждой паре одинаковых индексов один должен стоять наверху, а другой внизу. Такой способ обозначения суммирования по, как говорят, *немым* индексам, очень удобен и значительно упрощает запись формул.

В этой книге мы будем обозначать четырехмерные индексы, пробегающие значения 0, 1, 2, 3, латинскими буквами i, k, l, ...

Аналогично квадрату 4-вектора составляется скалярное произведение двух разных 4-векторов:

$$A^i B_i = A^0 B_0 + A^1 B_1 + A^2 B_2 + A^3 B_3.$$

При этом, очевидно, его можно записать как в виде $A^i B_i$, так и в виде $A_i B^i$, — результат от этого не меняется. Вообще во всякой паре немых индексов всегда можно переставлять верхние и нижние индексы [1].

Произведение $A^i B_i$ является 4-скаляром — оно инвариантно по отношению к поворотам четырехмерной системы координат. Это обстоятельство легко проверить непосредственно [2], но оно и заранее очевидно (по аналогии с квадратом $A^i A_i$) из того, что все 4-векторы преобразуются по одинаковому закону.

---

[1]) В современной литературе часто опускают вообще индексы у четырехмерных векторов, а их квадраты и скалярные произведения записывают просто как A^2, AB. В этой книге, однако, мы не будем пользоваться таким способом обозначений.

[2]) При этом надо помнить, что закон преобразования 4-вектора, выраженный через ковариантные компоненты, отличается (в знаках) от того же закона, выраженного в контравариантных компонентах. Так, вместо (6,1) будем, очевидно, иметь:

$$A_0 = \frac{A'_0 - \frac{V}{c} A'_1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad A_1 = \frac{A'_1 - \frac{V}{c} A'_0}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad A_2 = A'_2, \quad A_3 = A'_3.$$

Компоненту 4-вектора A^0 называют временной, а компоненты A^1, A^2, A^3 — пространственными (по аналогии с 4-радиус-вектором). Квадрат 4-вектора может быть положительным, отрицательным или равным нулю; в этих трех случаях говорят соответственно о *времениподобных, пространственноподобных* и *нулевых* 4-векторах (снова по аналогии с терминологией для интервалов).

По отношению к чисто пространственным поворотам (т. е. преобразованиям, не затрагивающим оси времени) три пространственные компоненты 4-вектора A^i составляют трехмерный вектор $\mathbf{A}$. Временная же компонента 4-вектора представляет собой (по отношению к тем же преобразованиям) трехмерный скаляр. Перечисляя компоненты 4-вектора, мы часто будем записывать их как

$$A^i = (A^0, \mathbf{A}).$$

При этом ковариантные компоненты того же 4-вектора: $A_i = (A^0, -\mathbf{A})$, а квадрат 4-вектора: $A^iA_i = (A^0)^2 - \mathbf{A}^2$. Так, для 4-радиус-вектора:

$$x^i = (ct, \mathbf{r}), \quad x_i = (ct, -\mathbf{r}), \quad x^ix_i = c^2t^2 - \mathbf{r}^2.$$

У трехмерных векторов (в координатах x, y, z) нет, конечно, необходимости различать контра- и ковариантные компоненты. Везде (где это не сможет привести к недоразумениям) мы будем писать их компоненты A_α $(\alpha = x, y, z)$ с индексами внизу, обозначая эти индексы греческими буквами. В частности, по дважды повторяющимся греческим индексам будет подразумеваться суммирование по трем значениям x, y, z (например, $\mathbf{AB} = A_\alpha B_\alpha$).

Четырехмерным тензором (4-тензором) 2-го ранга называется совокупность 16 величин A^{ik}, которые при преобразовании координат преобразуются как произведения компонент 4-векторов. Аналогичным образом определяются и 4-тензоры высших рангов.

Компоненты 4-тензора 2-го ранга могут быть представлены в трех видах: как контравариантные A^{ik}, ковариантные A_{ik} и смешанные $A^i{}_k$ (в последнем случае надо, вообще говоря, различать $A^i{}_k$ и $A_i{}^k$, т. е. следить за тем, какой именно — первый или второй — индекс стоит вверху, а какой внизу). Связь между различными видами компонент определяется по общему правилу: поднятие или опускание временного индекса (0) не меняет, а поднятие или опускание пространственного индекса (1, 2, 3) меняет знак компоненты. Так:

$$A_{00} = A^{00}, \quad A_{01} = -A^{01}, \quad A_{11} = A^{11}, \; \ldots,$$
$$A_0{}^0 = A^{00}, \quad A_0{}^1 = A^{01}, \quad A^0{}_1 = -A^{01}, \quad A_1{}^1 = -A^{11}, \; \ldots$$

По отношению к чисто пространственным преобразованиям девять компонент A^{11}, A^{12}, ... составляют трехмерный тензор. Три компоненты A^{01}, A^{02}, A^{03} и три компоненты A^{10}, A^{20}, A^{30} составляют трехмерные векторы, а компонента A^{00} является трехмерным скаляром.

Тензор A^{ik} называется симметричным, если $A^{ik}=A^{ki}$, и антисимметричным, если $A^{ik}=-A^{ki}$. У антисимметричного тензора все диагональные компоненты (т. е. компоненты A^{00}, A^{11}, ...) равны нулю, так как, например, должно быть $A^{00}=-A^{00}$. У симметричного тензора A^{ik} смешанные компоненты $A^i{}_k$ и $A_k{}^i$, очевидно, совпадают; мы будем писать в таких случаях просто A^i_k, располагая индексы один над другим.

Во всяком тензорном равенстве выражения с обоих его сторон должны содержать одинаковые и одинаково расположенные (вверху или внизу) свободные, т. е. не немые, индексы. Свободные индексы в тензорных равенствах можно перемещать (вверх или вниз), но обязательно одновременно во всех членах уравнения. Приравнивание же контра- и ковариантных компонент различных тензоров «незаконно»; такое равенство, даже если бы оно случайно имело место в какой-либо системе отсчета, нарушилось бы при переходе к другой системе.

Из компонент тензора A^{ik} можно образовать скаляр путем образования суммы

$$A^i{}_i=A^0{}_0+A^1{}_1+A^2{}_2+A^3{}_3$$

(при этом, конечно, $A^i{}_i=A_i{}^i$). Такую сумму называют *следом* тензора, а об операции его образования говорят как о *свертывании* или *упрощении* тензора.

Операцией свертывания является и рассмотренное выше образование скалярного произведения двух 4-векторов: это есть образование скаляра A^iB_i из тензора A^iB_k. Вообще всякое свертывание по паре индексов понижает ранг тензора на 2. Например, $A^i{}_{kli}$ есть тензор 2-го ранга, $A^i{}_kB^k$ — 4-вектор, $A^{ik}{}_{ik}$ — скаляр и т. д.

Единичным 4-тензором называется тензор δ^i_k, для которого имеет место равенство

$$\delta^k_i A^i = A^k \tag{6,3}$$

при любом 4-векторе A^i. Очевидно, что компоненты этого тензора равны

$$\delta^k_i=\begin{cases}1, & \text{если} \quad i=k,\\ 0, & \text{если} \quad i\neq k.\end{cases} \tag{6,4}$$

Его след: $\delta^i_i=4$.

Поднимая у тензора δ^k_i один или опуская другой индекс, мы получим контра- или ковариантный тензор, который обозначают как g^{ik} или g_{ik} и называют *метрическим тензором*. Тензоры g^{ik} и g_{ik} имеют одинаковые компоненты, которые можно представить в виде

таблицы:

$$(g^{ik}) = (g_{ik}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{6,5}$$

(индекс i нумерует строки, а индекс k — столбцы в порядке значений 0, 1, 2, 3). Очевидно, что

$$g_{ik}A^k = A_i, \quad g^{ik}A_k = A^i. \tag{6,6}$$

Скалярное произведение двух 4-векторов можно поэтому записать в виде

$$A^iA_i = g_{ik}A^iA^k = g^{ik}A_iA_k. \tag{6,7}$$

Тензоры δ^i_k, g_{ik}, g^{ik} исключительны в том отношении, что их компоненты одинаковы во всех системах координат. Таким же свойством обладает и совершенно антисимметричный единичный 4-тензор четвертого ранга e^{iklm}. Так называется тензор, компоненты которого меняют знак при перестановке любых двух индексов, причем отличные от нуля компоненты равны ± 1. Из антисимметричности следует, что все компоненты этого тензора, у которых хотя бы два индекса совпадают, равны нулю, так что отличны от нуля лишь те, у которых все четыре индекса различны. Положим

$$e^{0123} = +1 \tag{6,8}$$

(при этом $e_{0123} = -1$). Тогда все отличные от нуля компоненты e^{iklm} равны $+1$ или -1, смотря по тому, четным или нечетным числом перестановок (транспозиций) могут быть приведены числа i, k, l, m к последовательности 0, 1, 2, 3. Число таких компонент равно $4! = 24$. Поэтому

$$e^{iklm}e_{iklm} = -24. \tag{6,9}$$

По отношению к поворотам системы координат величины e^{iklm} ведут себя как компоненты тензора; однако при изменении знака у одной или трех координат компоненты e^{iklm}, будучи определены одинаково для всех систем координат, не изменяются, в то время как компоненты тензора должны были бы изменить знак. Поэтому e^{iklm} есть, собственно говоря, не тензор, а, как говорят, псевдотензор. *Псевдотензоры* любого ранга, в частности *псевдоскаляры*, ведут себя как тензоры при всех преобразованиях координат, за исключением тех, которые не могут быть сведены к поворотам, т. е. за исключением отражений — изменений знаков координат, не сводимых к вращениям.

Произведения $e^{iklm}e^{prst}$ образуют 4-тензор 8-го ранга, причем уже тензор истинный; упрощением по одной или нескольким парам ин-

дексов из него получаются тензоры 6-го, 4-го и 2-го порядков. Все эти тензоры имеют одинаковый вид во всех координатных системах. Поэтому их компоненты должны выражаться в виде комбинаций произведений компонент единичного тензора δ^l_k — единственного истинного тензора, компоненты которого во всех системах одинаковы. Эти комбинации легко составить, исходя из свойств симметрии по отношению к перестановкам индексов, которыми они должны обладать [1]).

Если A^{ik} — антисимметричный тензор, то тензор A^{ik} и псевдотензор $A^{*ik}=\frac{1}{2}e^{iklm}A_{lm}$ называются *дуальными* друг другу. Аналогично $e^{iklm}A_m$ есть антисимметричный псевдотензор 3-го ранга, дуальный вектору A^i. Произведение $A^{ik}A^*_{ik}$ дуальных тензоров есть, очевидно, псевдоскаляр.

В связи со сказанным напомним некоторые аналогичные свойства трехмерных векторов и тензоров. Совершенно антисимметричным единичным псевдотензором 3-го ранга называется совокупность величин $e_{\alpha\beta\gamma}$, меняющих знак при перестановке любых двух индексов. Отличны от нуля лишь компоненты $e_{\alpha\beta\gamma}$ с тремя различными индексами. При этом полагаем $e_{xyz}=1$; остальные же равны 1 или -1, смотря по тому, четным или нечетным числом транспозиций можно привести последовательность α, β, γ к последовательности x, y, z [2]).

---

[1]) Приведем здесь для справок соответствующие формулы:

$$e^{iklm}e_{prst}=-\begin{vmatrix}\delta^i_p & \delta^i_r & \delta^i_s & \delta^i_t\\ \delta^k_p & \delta^k_r & \delta^k_s & \delta^k_t\\ \delta^l_p & \delta^l_r & \delta^l_s & \delta^l_t\\ \delta^m_p & \delta^m_r & \delta^m_s & \delta^m_t\end{vmatrix},\qquad e^{iklm}e_{prsm}=-\begin{vmatrix}\delta^i_p & \delta^i_r & \delta^i_s\\ \delta^k_p & \delta^k_r & \delta^k_s\\ \delta^l_p & \delta^l_r & \delta^l_s\end{vmatrix},$$

$$e^{iklm}e_{prlm}=-2\left(\delta^i_p\delta^k_r-\delta^i_r\delta^k_p\right),\qquad e^{iklm}e_{pklm}=-6\delta^i_p.$$

Общие коэффициенты в этих формулах проверяются по результату полного свертывания, которое должно дать (6,9).

Как следствие первой из этих формул имеем:

$$e^{prst}A_{ip}A_{kr}A_{ls}A_{mt}=-Ae_{iklm},$$
$$e^{iklm}e^{prst}A_{ip}A_{kr}A_{ls}A_{mt}=24A,$$

где A — определитель, составленный из величин A_{ik}.

[2]) Неизменность компонент 4-тензора e^{iklm} по отношению к вращениям 4-системы координат и неизменность компонент 3-тензора $e_{\alpha\beta\gamma}$ по отношению к вращениям пространственных осей координат являются частными случаями общего правила: всякий совершенно антисимметричный тензор ранга, равного числу измерений пространства, в котором он определен, инвариантен при вращениях системы координат в этом пространстве.

Произведения $e_{\alpha\beta\gamma}e_{\lambda\mu\nu}$ составляют истинный трехмерный тензор 6-го ранга и потому выражаются в виде комбинаций произведений компонент единичного трехмерного тензора $\delta_{\alpha\beta}$ [1]).

При отражении системы координат, т. е. при изменении знака всех координат, компоненты обычного трехмерного вектора тоже меняют знак. Такие векторы называют *полярными*. Компоненты же вектора, который может быть представлен как векторное произведение двух полярных векторов, при отражении не меняют знак. Такие векторы называются *аксиальными*. Скалярное произведение полярного и аксиального векторов является не истинным, а псевдоскаляром: при отражении координат оно меняет знак. Аксиальный вектор является псевдовектором, дуальным антисимметричному тензору. Так, если $\mathbf{C}=[\mathbf{AB}]$, то

$$C_\alpha=\frac{1}{2}e_{\alpha\beta\gamma}C_{\beta\gamma}, \quad \text{где} \quad C_{\beta\gamma}=A_\beta B_\gamma-A_\gamma B_\beta.$$

Вернемся к 4-тензорам. Пространственные ($i, k, \ldots = 1, 2, 3$) компоненты антисимметричного 4-тензора A^{ik} составляют по отношению к чисто пространственным преобразованиям трехмерный антисимметричный тензор; согласно сказанному выше его компоненты выражаются через компоненты трехмерного аксиального вектора. Компоненты же A^{01}, A^{02}, A^{03} составляют, по отношению к тем же преобразованиям, трехмерный полярный вектор. Таким образом, компоненты антисимметричного 4-тензора можно представить в виде таблицы:

$$(A^{ik})=\begin{vmatrix} 0 & p_x & p_y & p_z \\ -p_x & 0 & -a_z & a_y \\ -p_y & a_z & 0 & -a_x \\ -p_z & -a_y & a_x & 0 \end{vmatrix}, \tag{6,10}$$

причем по отношению к пространственным преобразованиям $\mathbf{p}$ и $\mathbf{a}$ — полярный и аксиальный векторы. Перечисляя компоненты антисимметричного 4-тензора, мы будем записывать их в виде

$$A^{ik}=(\mathbf{p}, \mathbf{a});$$

тогда ковариантные компоненты того же тензора

$$A_{ik}=(-\mathbf{p}, \mathbf{a}).$$

---

[1]) Приведем для справок соответствующие формулы:

$$e_{\alpha\beta\gamma}e_{\lambda\mu\nu}=\begin{vmatrix} \delta_{\alpha\lambda} & \delta_{\alpha\mu} & \delta_{\alpha\nu} \\ \delta_{\beta\lambda} & \delta_{\beta\mu} & \delta_{\beta\nu} \\ \delta_{\gamma\lambda} & \delta_{\gamma\mu} & \delta_{\gamma\nu} \end{vmatrix}.$$

Упрощая этот тензор по одной, двум и трем парам индексов, получим:

$$e_{\alpha\beta\gamma}e_{\lambda\mu\gamma}=\delta_{\alpha\lambda}\delta_{\beta\mu}-\delta_{\alpha\mu}\delta_{\beta\lambda},$$
$$e_{\alpha\beta\gamma}e_{\lambda\beta\gamma}=2\delta_{\alpha\lambda}, \quad e_{\alpha\beta\gamma}e_{\alpha\beta\gamma}=6.$$

Остановимся, наконец, на некоторых дифференциальных и интегральных операциях четырехмерного тензорного анализа.

4-градиент скаляра φ есть 4-вектор

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x^i}=\left(\frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t},\ \nabla\varphi\right).$$

При этом необходимо иметь в виду, что написанные производные должны рассматриваться как ковариантные компоненты 4-вектора. Действительно, дифференциал скаляра

$$d\varphi=\frac{\partial\varphi}{\partial x^i}\,dx^i$$

тоже есть скаляр; из его вида (скалярное произведение двух 4-векторов) и очевидно сделанное утверждение.

Вообще операторы дифференцирования по координатам x^i, $\partial/\partial x^i$, должны рассматриваться как ковариантные компоненты операторного 4-вектора. Поэтому, например, является скаляром дивергенция 4-вектора — выражение $\partial A^i/\partial x^i$, в котором дифференцируются контравариантные компоненты A^i [1]).

В трехмерном пространстве интегрирование может производиться по объему, по поверхности и по кривой. В четырехмерном пространстве соответственно возможны четыре рода интегрирований.

1) Интеграл по кривой в 4-пространстве. Элементом интегрирования является элемент длины, т. е. 4-вектор dx^i.

2) Интеграл по поверхности (двухмерной) в 4-пространстве. Как известно, в трехмерном пространстве проекции площади параллелограмма, построенного на двух векторах $d\mathbf{r}$ и $d\mathbf{r}'$, на координатные плоскости $x_\alpha x_\beta$ равны $dx_\alpha dx'_\beta - dx_\beta dx'_\alpha$. Аналогично в 4-пространстве бесконечно малый элемент поверхности определяется антисимметричным тензором второго ранга $df^{ik}=dx^i dx'^k - dx^k dx'^i$; его компоненты

---

[1]) Если же производить дифференцирования по «ковариантным координатам» x_i, то производные

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}=\left(\frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t},\ -\nabla\varphi\right)$$

составляют контравариантные компоненты 4-вектора. Мы будем пользоваться такой записью лишь в исключительных случаях $\left(\text{например, для записи квадрата 4-градиента } \frac{\partial\varphi}{\partial x^i}\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)$.

Упомянем, что в литературе часто используется краткая запись частных производных по координатам производных с помощью символов

$$\partial^i=\frac{\partial}{\partial x_i},\quad \partial_i=\frac{\partial}{\partial x^i}$$

В этой форме записи операторов дифференцирования явно проявляется контра- или ковариантный характер образуемых с их помощью величин.

равны проекциям площади элемента на координатные плоскости. В трехмерном пространстве, как известно, вместо тензора $df_{\alpha\beta}$ в качестве элемента поверхности используется вектор df_α, дуальный тензору $df_{\alpha\beta}$: $df_\alpha = \frac{1}{2} e_{\alpha\beta\gamma} df_{\beta\gamma}$. Геометрически это есть вектор, нормальный к элементу поверхности и по абсолютной величине равный площади этого элемента. В четырехмерном пространстве такого вектора построить нельзя, но можно построить тензор df^{*ik}, дуальный тензору df^{ik}, т. е.

$$df^{*ik} = \frac{1}{2} e^{iklm} df_{lm}. \tag{6,11}$$

Геометрически он изображает элемент поверхности, равный и «нормальный» элементу df^{ik}; все лежащие на нем отрезки ортогональны ко всем отрезкам на элементе df^{ik}. Очевидно, что $df^{ik} df^{*}_{ik} = 0$.

3) Интеграл по гиперповерхности, т. е. по трехмерному многообразию. В трехмерном пространстве объем параллелепипеда, построенного на трех векторах, равен, как известно, определителю третьего порядка, составленному из компонент этих векторов. В 4-пространстве аналогичным образом выражаются проекции объема «параллелепипеда» (т. е. «площади» гиперповерхности), построенного на трех 4-векторах dx^i, dx'^i, dx''^i; они даются определителями

$$dS^{ikl} = \begin{vmatrix} dx^i & dx'^i & dx''^i \\ dx^k & dx'^k & dx''^k \\ dx^l & dx'^l & dx''^l \end{vmatrix},$$

составляющими тензор 3-ранга, антисимметричный по трем индексам. В качестве элемента интегрирования по гиперповерхности удобнее пользоваться 4-вектором dS^i, дуальным тензору dS^{ikl}:

$$dS^i = -\frac{1}{6} e^{iklm} dS_{klm}, \qquad dS_{klm} = e_{nklm} dS^n. \tag{6,12}$$

При этом:

$$dS^0 = dS^{123}, \quad dS^1 = dS^{023}, \quad \ldots$$

Геометрически dS^i — 4-вектор, по величине равный «площади» элемента гиперповерхности, и по направлению нормальный к этому элементу (т. е. перпендикулярный ко всем прямым, проведенным в элементе гиперповерхности). В частности, $dS^0 = dx\,dy\,dz$, т. е. представляет собой элемент трехмерного объема dV — проекцию элемента гиперповерхности на гиперплоскость $x^0 = \text{const}$.

4) Интеграл по четырехмерному объему; элементом интегрирования является скаляр

$$d\Omega = dx^0\, dx^1\, dx^2\, dx^3 = c\,dt\,dV. \tag{6, 13}$$

Аналогично теоремам Гаусса и Стокса трехмерного векторного анализа существуют теоремы, позволяющие преобразовывать друг в друга четырехмерные интегралы.

Интеграл по замкнутой гиперповерхности можно преобразовать в интеграл по заключенному в ней 4-объему путем замены элемента интегрирования dS_i на оператор

$$dS_i \to d\Omega \frac{\partial}{\partial x^i}. \qquad (6,14)$$

Например, для интеграла от вектора A^i имеем:

$$\oint A^i dS_i = \int \frac{\partial A^i}{\partial x^i} d\Omega. \qquad (6,15)$$

Эта формула является обобщением теоремы Гаусса.

Интеграл по двухмерной поверхности преобразуется в интеграл по «охватываемой» ею гиперповерхности заменой элемента интегрирования df^*_{ik} на оператор

$$df^*_{ik} \to dS_i \frac{\partial}{\partial x^k} - dS_k \frac{\partial}{\partial x^i}. \qquad (6,16)$$

Например, для интеграла от антисимметричного тензора A^{ik} имеем:

$$\frac{1}{2}\int A^{ik} df^*_{ik} = \frac{1}{2}\int \left(dS_i \frac{\partial A^{ik}}{\partial x^k} - dS_k \frac{\partial A^{ik}}{\partial x^i}\right) = \int dS_i \frac{\partial A^{ik}}{\partial x^k}. \qquad (6,17)$$

Интеграл по четырехмерной замкнутой линии преобразуется в интеграл по охватываемой ею поверхности путем замены:

$$dx^i \to df^{ki} \frac{\partial}{\partial x^k}. \qquad (6,18)$$

Так, для интеграла от вектора имеем:

$$\oint A_i dx^i = \int df^{ki} \frac{\partial A_i}{\partial x^k} = \frac{1}{2}\int df^{ik}\left(\frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k}\right), \qquad (6,19)$$

что является обобщением теоремы Стокса.

Задачи

1. Найти закон преобразования компонент симметричного 4-тензора A^{ik} при преобразовании Лоренца (6,1).

Решение. Рассматривая компоненты 4-тензора как произведения двух компонент 4-вектора, получим:

$$A^{00}=\frac{1}{1-\frac{V^2}{c^2}}\left(A'^{00}+2\frac{V}{c}A'^{01}+\frac{V^2}{c^2}A'^{11}\right),$$

$$A^{11}=\frac{1}{1-\frac{V^2}{c^2}}\left(A'^{11}+2\frac{V}{c}A'^{01}+\frac{V^2}{c^2}A'^{00}\right),$$

$$A^{22}=A'^{22},\quad A^{23}=A'^{23},\qquad A^{12}=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}\left(A'^{12}+\frac{V}{c}A'^{02}\right),$$

$$A^{01}=\frac{1}{1-\frac{V^2}{c^2}}\left[A'^{01}\left(1+\frac{V^2}{c^2}\right)+\frac{V}{c}A'^{00}+\frac{V}{c}A'^{11}\right],$$

$$A^{02}=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}\left(A'^{02}+\frac{V}{c}A'^{01}\right)$$

и аналогичные формулы для A^{33}, A^{13}, A^{03}.

2. То же для антисимметричного тензора A^{ik}.

Решение. Поскольку координаты x^2, x^3 не меняются, то не меняется и компонента тензора A^{23}, а компоненты A^{12}, A^{13} и A^{02}, A^{03} преобразуются как x^1 и x^0:

$$A^{23}=A'^{23},\qquad A^{12}=\frac{A'^{12}+\frac{V}{c}A'^{02}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}},\qquad A^{02}=\frac{A'^{02}+\frac{V}{c}A'^{12}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}$$

и аналогично для A^{13}, A^{03}.

По отношению к поворотам двухмерной системы координат в плоскости x^0x^1 (каковыми являются рассматриваемые преобразования) компоненты $A^{01}=-A^{10}$, $A^{00}=A^{11}=0$ составляют антисимметричный тензор ранга, равного числу измерений пространства. Поэтому (см. примечание на стр. 33) при преобразованиях эти компоненты не меняются:

$$A^{01}=A'^{01}.$$

§ 7. Четырехмерная скорость

Из обычного трехмерного вектора скорости можно образовать и четырехмерный вектор. Такой *четырехмерной скоростью* (4-скоростью) частицы является вектор

$$u^i=\frac{dx^i}{ds}. \tag{7,1}$$

Для нахождения его компонент замечаем, что согласно (3,1)

$$ds=c\,dt\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}},$$

где v — обычная трехмерная скорость частицы. Поэтому

$$u^1 = \frac{dx^1}{ds} = \frac{dx}{c\,dt\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{v_x}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

и т. п. Таким образом:

$$u^i = \left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \quad \frac{\mathbf{v}}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right). \qquad (7,2)$$

Отметим, что 4-скорость есть величина безразмерная.

Компоненты 4-скорости не независимы. Замечая, что $dx_i dx^i = ds^2$, имеем:

$$u^i u_i = 1. \qquad (7,3)$$

Геометрически u^i есть единичный 4-вектор касательной к мировой линии частицы.

Аналогично определению 4-скорости, вторую производную

$$w^i = \frac{d^2x^i}{ds^2} = \frac{du^i}{ds}$$

можно назвать 4-ускорением. Дифференцируя соотношение (7,3), найдем:

$$u_i w^i = 0, \qquad (7,4)$$

т. е. 4-векторы скорости и ускорения взаимно ортогональны.

Задача

Определить релятивистское равноускоренное движение, т. е. прямолинейное движение, при котором остается постоянной величина ускорения w в собственной (в каждый данный момент времени) системе отсчета.

Решение. В системе отсчета, в которой скорость частицы $v = 0$, компоненты 4-ускорения равны $w^i = (0, w/c^2, 0, 0)$ (w — обычное трехмерное ускорение, направленное вдоль оси x). Релятивистски инвариантное условие равноускоренности должно быть представлено в виде постоянства 4-скаляра, совпадающего с w^2 в собственной системе отсчета:

$$w^i w_i = \text{const} \equiv \frac{w^2}{c^4}.$$

В «неподвижной» системе отсчета, относительно которой рассматривается движение, раскрытие выражения $w^i w_i$ приводит к уравнению

$$\frac{d}{dt}\frac{v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = w \quad \text{или} \quad \frac{v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = wt + \text{const}.$$

Полагая $v = 0$ при $t = 0$, имеем const $= 0$, так что

$$v = \frac{wt}{\sqrt{1+\frac{w^2t^2}{c^2}}}.$$

Интегрируя еще раз и полагая $x=0$ при $t=0$, получим:

$$x=\frac{c^2}{w}\left(\sqrt{1+\frac{w^2t^2}{c^2}}-1\right).$$

При $wt \ll c$ эти формулы переходят в классические выражения $v=wt$, $x=wt^2/2$. При $wt \to \infty$ скорость стремится к постоянному значению c.

Собственное время равноускоренно движущейся частицы дается интегралом

$$\int_0^t \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\,dt=\frac{c}{w}\operatorname{Arsh}\frac{wt}{c}.$$

При $t \to \infty$ оно растет по значительно более медленному чем t закону $\frac{c}{w}\ln\frac{2wt}{c}$.

ГЛАВА II

РЕЛЯТИВИСТСКАЯ МЕХАНИКА

§ 8. Принцип наименьшего действия

При исследовании движения материальных частиц мы будем исходить из принципа наименьшего действия. Этот принцип заключается, как известно, в том, что для всякой механической системы существует такой интеграл S, называемый действием, который для действительного движения имеет минимум и вариация δS которого, следовательно, равна нулю[1]).

Определим интеграл действия для свободной материальной частицы, т. е. частицы, не находящейся под действием каких-либо внешних сил.

Для этого заметим, что этот интеграл не должен зависеть от выбора той или иной инерциальной системы отсчета, т. е. он должен быть инвариантом относительно преобразований Лоренца. Отсюда следует, что он должен быть взят от скаляра. Далее, ясно, что под интегралом должны стоять дифференциалы в первой степени. Однако единственный такой скаляр, который можно построить для свободной материальной частицы, есть интервал ds или $\alpha\, ds$, где α — некоторая постоянная.

Итак, действие для свободной частицы должно иметь вид

$$S = -\alpha \int_a^b ds,$$

где $\int_a^b$ обозначает интеграл вдоль мировой линии между двумя заданными событиями — нахождением частицы в начальном и конечном

---

[1]) Строго говоря, принцип наименьшего действия утверждает, что интеграл S должен быть минимален лишь вдоль малых участков линии интегрирования. Для линий произвольной длины можно утверждать только, что S имеет экстремум, не обязательно являющийся минимумом (см. I § 2).

местах в определенные моменты времени t_1 и t_2, т. е. между заданными мировыми точками; α есть некоторая постоянная, характеризующая данную частицу. Легко видеть, что для всех частиц α должна быть положительной величиной. Действительно, мы видели в § 3, что интеграл $\int\limits_a^b ds$ имеет максимальное значение вдоль прямой мировой линии; интегрируя вдоль кривой мировой линии, можно сделать его сколь угодно малым.

Таким образом, интеграл, взятый с положительным знаком, не может иметь минимума; взятый же с обратным знаком он имеет минимум — вдоль прямой мировой линии.

Действие можно представить в виде интеграла по времени

$$S = \int\limits_{t_1}^{t_2} L\,dt.$$

Коэффициент L при dt называется, как известно, *функцией Лагранжа* для данной механической системы. С помощью (3,1) мы находим:

$$S = -\int\limits_{t_1}^{t_2} \alpha c \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\,dt,$$

где v — скорость материальной частицы. Функция Лагранжа для частицы есть, следовательно,

$$L = -\alpha c \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}.$$

Величина α, как уже отмечалось, характеризует данную частицу. В классической механике всякая частица характеризуется ее массой m. Определим связь величин α и m. Она находится из условия, что при предельном переходе $c \to \infty$ наше выражение для L должно перейти в классическое выражение

$$L = mv^2/2.$$

Для осуществления этого перехода разложим L в ряд по степеням v/c. Тогда, опуская члены высших порядков, получаем:

$$L = -\alpha c \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \approx -\alpha c + \frac{\alpha v^2}{2c}.$$

Постоянные члены в функции Лагранжа не отражаются на уравнениях движения и могут быть опущены. Опустив в L постоянную αc и сравнив с классическим выражением $L = mv^2/2$, найдем, что $\alpha = mc$.

Таким образом, действие для свободной материальной точки равно

$$S = -mc\int_a^b ds, \tag{8,1}$$

а функция Лагранжа

$$L = -mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}. \tag{8,2}$$

§ 9. Энергия и импульс

Импульсом частицы называется, как известно, вектор $\mathbf{p} = \partial L/\partial \mathbf{v}$ ($\partial L/\partial \mathbf{v}$ — символическое обозначение вектора, компоненты которого равны производным от L по соответствующим компонентам $\mathbf{v}$). С помощью (8,2) находим:

$$\mathbf{p} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \tag{9,1}$$

При малых скоростях ($v \ll c$) или в пределе при $c \to \infty$ это выражение переходит в классическое $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$. При $v = c$ импульс обращается в бесконечность.

Производная от импульса по времени есть сила, действующая на частицу. Пусть скорость частицы изменяется только по направлению, т. е. сила направлена перпендикулярно скорости. Тогда

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{m}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\frac{d\mathbf{v}}{dt}. \tag{9,2}$$

Если же скорость меняется только по величине, т. е. сила направлена по скорости, то

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{m}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}}\frac{d\mathbf{v}}{dt}. \tag{9,3}$$

Мы видим, что в обоих случаях отношение силы к ускорению различно.

Энергией $\mathscr{E}$ частицы называется величина

$$\mathscr{E} = \mathbf{p}\mathbf{v} - L$$

(см. I § 6). Подставляя выражения (8,2) и (9,1) для L и $\mathbf{p}$, получим:

$$\mathscr{E} = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \tag{9,4}$$

Эта очень важная формула показывает, в частности, что в релятивистской механике энергия свободной частицы не обращается в нуль при $v=0$, а остается конечной величиной, равной

$$\mathscr{E} = mc^2. \tag{9,5}$$

Ее называют *энергией покоя* частицы.

При малых скоростях ($v \ll c$) имеем, разлагая (9,4) по степеням v/c:

$$\mathscr{E} \approx mc^2 + \frac{mv^2}{2},$$

т. е., за вычетом энергии покоя, классическое выражение для кинетической энергии частицы.

Подчеркнем, что хотя мы говорим здесь о «частице», но ее «элементарность» нигде не используется. Поэтому полученные формулы в равной степени применимы и к любому сложному телу, состоящему из многих частиц, причем под m надо понимать полную массу тела, а под v — скорость его движения как целого. В частности, формула (9,5) справедлива и для любого покоящегося как целое тела. Обратим внимание на то, что энергия свободного тела (т. е. энергия любой замкнутой системы) оказывается в релятивистской механике вполне определенной, всегда положительной величиной, непосредственно связанной с массой тела. Напомним в этой связи, что в классической механике энергия тела определена лишь с точностью до произвольной аддитивной постоянной, и может быть как положительной, так и отрицательной.

Энергия покоящегося тела содержит в себе, помимо энергий покоя входящих в его состав частиц, также кинетическую энергию частиц и энергию их взаимодействия друг с другом. Другими словами, mc^2 не равно сумме $\sum m_a c^2$ (m_a — массы частиц), а потому и m не равно $\sum m_a$. Таким образом, в релятивистской механике не имеет места закон сохранения массы: масса сложного тела не равна сумме масс его частей. Вместо этого имеет место только закон сохранения энергии, в которую включается также и энергия покоя частиц.

Возводя выражения (9,1) и (9,4) в квадрат и сравнивая их, найдем следующее соотношение между энергией и импульсом частицы:

$$\frac{\mathscr{E}^2}{c^2} = p^2 + m^2c^2. \tag{9,6}$$

Энергия, выраженная через импульс, называется, как известно, функцией Гамильтона $\mathscr{H}$:

$$\mathscr{H} = c\sqrt{p^2 + m^2c^2}. \tag{9,7}$$

При малых скоростях $p \ll mc$ и приближенно

$$\mathscr{H} \approx mc^2 + \frac{p^2}{2m},$$

т. е. за вычетом энергии покоя получаем известное классическое выражение функции Гамильтона.

Из выражений (9,1) и (9,4) вытекает также следующее соотношение между энергией, импульсом и скоростью свободной частицы

$$\mathbf{p}=\frac{\mathscr{E}\mathbf{v}}{c^2}. \tag{9,8}$$

При $v=c$ импульс и энергия частицы обращаются в бесконечность. Это значит, что частица с отличной от нуля массой m не может двигаться со скоростью света. В релятивистской механике, однако, могут существовать частицы с массой, равной нулю, движущиеся со скоростью света[1]). Из (9,8) имеем для таких частиц:

$$p=\frac{\mathscr{E}}{c}. \tag{9,9}$$

Приближенно такая же формула справедлива и для частиц с отличной от нуля массой в так называемом *ультрарелятивистском* случае, когда энергия частицы $\mathscr{E}$ велика по сравнению с ее энергией покоя mc^2.

Выведем теперь все полученные соотношения в четырехмерном виде. Согласно принципу наименьшего действия

$$\delta S=-mc\delta\int_a^b ds=0.$$

Раскроем выражение для δS. Для этого замечаем, что $ds=\sqrt{dx_i dx^i}$ и потому

$$\delta S=-mc\int_a^b \frac{dx_i \delta dx^i}{ds}=-mc\int_a^b u_i\, d\delta x^i.$$

Интегрируя по частям, находим:

$$\delta S=-mc\, u_i\delta x^i\Big|_a^b+mc\int_a^b \delta x^i \frac{du_i}{ds}\, ds. \tag{9,10}$$

Как известно, для нахождения уравнений движения сравниваются различные траектории, проходящие через два заданных положения, т. е. на пределах $(\delta x^i)_a=(\delta x^i)_b=0$. Истинная траектория определяется из условия $\delta S=0$. Из (9,10) мы получили бы тогда уравнения $du_i/ds=0$, т. е. постоянство скорости свободной частицы в четырехмерном виде.

Для того чтобы найти вариацию действия как функцию от координат, надо считать заданной лишь одну точку a, так что $(\delta x^i)_a=0$.

---

[1]) Таковы световые кванты — фотоны, а также нейтрино.

Вторую же точку надо считать переменной, но при этом рассматривать только истинные, т. е. удовлетворяющие уравнениям движения траектории. Поэтому интеграл в выражении (9,10) для δS равен нулю. Вместо $(\delta x^i)_b$ пишем просто δx^i и, таким образом, находим:

$$\delta S = -mcu_i \delta x^i. \tag{9,11}$$

4-вектор

$$p_i = -\frac{\partial S}{\partial x^i} \tag{9,12}$$

называется 4-*импульсом*. Как известно из механики, производные $\partial S/\partial x$, $\partial S/\partial y$, $\partial S/\partial z$ — три компоненты вектора импульса частицы $\mathbf{p}$, а производная $-\partial S/\partial t$ есть энергия частицы $\mathcal{E}$. Поэтому ковариантные компоненты 4-импульса $p_i = (\mathcal{E}/c, \ -\mathbf{p})$, а контравариантные компоненты [1])

$$p^i = \left(\frac{\mathcal{E}}{c}, \ \mathbf{p}\right). \tag{9,13}$$

Из (9,11) видно, что компоненты 4-импульса свободной частицы равны

$$p^i = mcu^i. \tag{9,14}$$

Подставив сюда компоненты 4-скорости из (7,2), убедимся в том, что для $\mathbf{p}$ и $\mathcal{E}$ действительно получаются выражения (9,1) и (9,4).

Таким образом, в релятивистской механике импульс и энергия являются компонентами одного 4-вектора. Отсюда непосредственно вытекают формулы преобразования импульса и энергии от одной инерциальной системы отсчета к другой. Подставив в общие формулы (6,1) преобразования 4-вектора выражения (9,13), находим:

$$p_x = \frac{p_x' + \frac{V}{c^2}\mathcal{E}'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}, \quad p_y = p_y', \quad p_z = p_z', \quad \mathcal{E} = \frac{\mathcal{E}' + Vp_x'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}, \tag{9,15}$$

где p_x, p_y, p_z — компоненты трехмерного вектора $\mathbf{p}$.

Из определения 4-импульса (9,14) и тождества $u^i u_i = 1$ имеем для квадрата 4-импульса свободной частицы:

$$p^i p_i = m^2 c^2. \tag{9,16}$$

Подставив сюда выражения (9,13), мы вернемся к соотношению (9,6).

---

[1]) Обратим внимание на мнемоническое правило для запоминания определения физических 4-векторов: контравариантные компоненты связаны с соответствующими трехмерными векторами ($\mathbf{r}$ для x^i, $\mathbf{p}$ для p^i и т. п.) с «правильным», положительным знаком.

По аналогии с обычным определением силы 4-вектор силы можно определить как производную:

$$g^i = \frac{dp^i}{ds} = mc\frac{du^i}{ds}. \qquad (9,17)$$

Его компоненты удовлетворяют тождеству $g_i u^i = 0$. Компоненты этого 4-вектора выражаются через обычный трехмерный вектор силы $\mathbf{f} = d\mathbf{p}/dt$ согласно

$$g^i = \left(\frac{\mathbf{f}\mathbf{v}}{c^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \frac{\mathbf{f}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right). \qquad (9,18)$$

Временная компонента оказывается связанной с работой силы.

Релятивистское уравнение Гамильтона—Якоби получается подстановкой в (9,16) производных $-\partial S/\partial x^i$ вместо p_i:

$$\frac{\partial S}{\partial x_i}\frac{\partial S}{\partial x^i} \equiv g^{ik}\frac{\partial S}{\partial x^i}\frac{\partial S}{\partial x^k} = m^2c^2, \qquad (9,19)$$

или, если написать сумму в явном виде:

$$\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2 - \left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2 - \left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2 = m^2c^2. \qquad (9,20)$$

Переход к предельному случаю классической механики в уравнении (9,20) совершается следующим образом. Прежде всего необходимо учесть, как и при соответствующем переходе в (9,7), что в релятивистской механике энергия частицы содержит член mc^2, которого нет в классической механике. Поскольку действие S связано с энергией выражением $\mathscr{E} = -\partial S/\partial t$, то при переходе к классической механике надо вместо S ввести новое действие S' согласно соотношению

$$S = S' - mc^2t.$$

Подставляя его в (9,20), находим:

$$\frac{1}{2mc^2}\left(\frac{\partial S'}{\partial t}\right)^2 - \frac{\partial S'}{\partial t} - \frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial S'}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S'}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial S'}{\partial z}\right)^2\right] = 0.$$

В пределе при $c \to \infty$ это уравнение переходит в известное классическое уравнение Гамильтона—Якоби.

§ 10. Преобразование функции распределения

В различных физических вопросах приходится иметь дело с так называемой функцией распределения частиц по импульсам: $f(\mathbf{p})\,dp_x dp_y dp_z$ есть число частиц, обладающих импульсами с компонентами в заданных интервалах dp_x, dp_y, dp_z (или, как говорят для

краткости, число частиц в заданном элементе объема $dp_x dp_y dp_z$ «импульсного пространства»). В связи с этим возникает вопрос о законе преобразования функции распределения $f(\mathbf{p})$ от одной системы отсчета к другой.

Для решения этого вопроса выясним предварительно свойства «элемента объема» $dp_x dp_y dp_z$ по отношению к преобразованию Лоренца. Если ввести четырехмерную систему координат, на осях которой откладываются четыре компоненты 4-импульса частицы, то $dp_x dp_y dp_z$ можно рассматривать как четвертую компоненту элемента гиперповерхности, определяемой уравнением $p^i p_i = m^2c^2$. Элемент гиперповерхности есть 4-вектор, направленный по нормали к ней; в данном случае направление нормали совпадает, очевидно, с направлением 4-вектора p_i. Отсюда следует, что отношение

$$\frac{dp_x dp_y dp_z}{\mathscr{E}}, \tag{10,1}$$

как отношение одинаковых компонент двух параллельных 4-векторов, есть величина инвариантная[1]).

Очевидным инвариантом является также число частиц $f\,dp_x dp_y dp_z$, не зависящее от выбора системы отсчета. Написав его в виде

$$f(\mathbf{p})\,\mathscr{E}\,\frac{dp_x dp_y dp_z}{\mathscr{E}}$$

и учитывая инвариантность отношения (10,1), мы приходим к выводу об инвариантности произведения $f(\mathbf{p})\mathscr{E}$. Отсюда следует, что функция распределения в системе K' связана с функцией распределения в системе K соотношением

$$f'(\mathbf{p}') = \frac{f(\mathbf{p})\,\mathscr{E}}{\mathscr{E}'}, \tag{10,2}$$

причем $\mathbf{p}$ и $\mathscr{E}$ должны быть выражены через $\mathbf{p}'$ и $\mathscr{E}'$ с помощью формул преобразования (9,15).

[1]) Интегрирование по элементу (10,1) может быть представлено в четырехмерном виде с помощью δ-функции (см. примечание на стр. 98) как интегрирование по

$$\frac{2}{c}\,\delta(p^i p_i - m^2c^2)\,d^4p, \quad d^4p = dp^0 dp^1 dp^2 dp^3. \tag{10,1a}$$

При этом четыре компоненты p^i рассматриваются как независимые переменные (причем p^0 пробегает лишь положительные значения). Формула (10,1a) очевидна из следующего представления фигурирующей в ней δ-функции:

$$\delta(p^i p_i - m^2c^2) = \delta\left(p_0^2 - \frac{\mathscr{E}^2}{c^2}\right) = \frac{2c}{\mathscr{E}}\left[\delta\left(p_0 + \frac{\mathscr{E}}{c}\right) + \delta\left(p_0 - \frac{\mathscr{E}}{c}\right)\right], \tag{10,1б}$$

где $\mathscr{E} = c\sqrt{p^2 + m^2c^2}$. В свою очередь эта формула следует из формулы (V), приведенной в примечании на стр. 98.

Вернемся к инвариантному выражению (10,1). Если ввести «сферические координаты» в импульсном пространстве, то элемент объема $dp_x dp_y dp_z$ заменится на $p^2\,dp\,do$, где do — элемент телесного угла для направлений вектора $\mathbf{p}$. Замечая, что $p\,dp = \mathscr{E}\,d\mathscr{E}/c^2$ [согласно (9,6)], имеем:

$$\frac{p^2\,dp\,do}{\mathscr{E}} = \frac{p\,d\mathscr{E}\,do}{c^2}.$$

Таким образом, находим, что инвариантно также и выражение

$$p\,d\mathscr{E}\,do. \tag{10,3}$$

Если речь идет о частицах, движущихся со скоростью света, для которых справедливо соотношение $\mathscr{E} = pc$ (9,9), то инвариантная величина (10,3) может быть написана как $p\,dp\,do$ или $\mathscr{E}\,d\mathscr{E}\,do$.

§ 11. Распад частиц

Рассмотрим самопроизвольный распад тела с массой M на две части с массами m_1 и m_2. Закон сохранения энергии при распаде, примененный в системе отсчета, в которой тело покоится, дает[1]):

$$M = \mathscr{E}_{10} + \mathscr{E}_{20}, \tag{11,1}$$

где $\mathscr{E}_{10}$ и $\mathscr{E}_{20}$ — энергии разлетающихся частей. Поскольку $\mathscr{E}_{10} > m_1$ и $\mathscr{E}_{20} > m_2$, то равенство (11,1) может выполняться лишь, если $M > m_1 + m_2$, т. е. тело может самопроизвольно распадаться на части, сумма масс которых меньше массы тела. Напротив, если $M < m_1 + m_2$, то тело устойчиво (по отношению к данному распаду) и самопроизвольно не распадается. Для осуществления распада надо было бы в этом случае сообщить телу извне энергию, равную по крайней мере его «энергии связи» $(m_1 + m_2 - M)$.

Наряду с законом сохранения энергии при распаде должен выполняться закон сохранения импульса, т. е. сумма импульсов разлетающихся частей, как и первоначальный импульс тела, равна нулю: $\mathbf{p}_{10} + \mathbf{p}_{20} = 0$. Отсюда $p_{10}^2 = p_{20}^2$ или

$$\mathscr{E}_{10}^2 - m_1^2 = \mathscr{E}_{20}^2 - m_2^2. \tag{11,2}$$

---

[1]) В §§ 11—13 полагаем $c = 1$. Другими словами, скорость света выбирается в качестве единицы измерения скоростей (при этом размерности длины и времени становятся одинаковыми). Такой выбор является естественным в релятивистской механике и очень упрощает запись формул. Однако в этой книге (значительное место в которой уделено и нерелятивистской теории) мы, как правило, не будем пользоваться такой системой единиц, а при ее использовании будем каждый раз оговаривать это.

Если в формуле положено $c = 1$, то возвращение к обычным единицам не представляет труда: скорость света вводится в нее таким образом, чтобы обеспечить правильную размерность.

Два уравнения (11,1) и (11,2) однозначно определяют энергии разлетающихся частей:

$$\mathscr{E}_{10}=\frac{M^2+m_1^2-m_2^2}{2M},\quad \mathscr{E}_{20}=\frac{M^2-m_1^2+m_2^2}{2M}. \qquad (11,3)$$

В некотором смысле обратным является вопрос о вычислении суммарной энергии M двух сталкивающихся частиц в системе отсчета, в которой их суммарный импульс равен нулю (или, как говорят для краткости, в *системе центра инерции* или в «*ц*-системе»). Вычисление этой величины дает критерий, определяющий возможность осуществления различных процессов неупругих столкновений, сопровождающихся изменением состояния сталкивающихся частиц или «рождением» новых частиц. Каждый такой процесс может происходить лишь при условии, что сумма масс всех «продуктов реакции» не превышает M.

Пусть в исходной (или, как говорят, *лабораторной*) системе отсчета частица с массой m_1 и энергией $\mathscr{E}_1$ сталкивается с покоящейся частицей с массой m_2. Суммарная энергия обеих частиц

$$\mathscr{E}=\mathscr{E}_1+\mathscr{E}_2=\mathscr{E}_1+m_2,$$

а суммарный импульс $\mathbf{p}=\mathbf{p}_1+\mathbf{p}_2=\mathbf{p}_1$. Рассматривая обе частицы вместе как одну сложную систему, мы найдем скорость ее движения как целого согласно (9,8):

$$\mathbf{V}=\frac{\mathbf{p}}{\mathscr{E}}=\frac{\mathbf{p}_1}{\mathscr{E}_1+m_2}. \qquad (11,4)$$

Это и есть скорость движения *ц*-системы относительно лабораторной системы (*л*-системы).

Однако для определения искомой массы M нет необходимости фактически производить преобразование от одной системы отсчета к другой. Вместо этого можно непосредственно воспользоваться формулой (9,6), применимой к составной системе в такой же мере, как и к каждой частице в отдельности. Таким образом, имеем:

$$M^2=\mathscr{E}^2-p^2=(\mathscr{E}_1+m_2)^2-(\mathscr{E}_1^2-m_1^2),$$

откуда

$$M^2=m_1^2+m_2^2+2m_2\mathscr{E}_1. \qquad (11,5)$$

Задачи

1. Частица, движущаяся со скоростью V, распадается «на лету» на две частицы. Определить связь между углами вылета последних и их энергиями.

Решение. Пусть $\mathscr{E}_0$—энергия одной из распадных частиц в *ц*-системе [т. е. $\mathscr{E}_{10}$ или $\mathscr{E}_{20}$ из (11,3)], $\mathscr{E}$—энергия этой же частицы в *л*-системе, а θ—угол ее вылета в *л*-системе (по отношению к направлению $\mathbf{V}$).

С помощью формул преобразования (9,15) имеем:

$$\mathscr{E}_0=\frac{\mathscr{E}-Vp\cos\theta}{\sqrt{1-V^2}},$$

откуда

$$\cos\theta=\frac{\mathscr{E}-\mathscr{E}_0\sqrt{1-V^2}}{V\sqrt{\mathscr{E}^2-m^2}}. \tag{1}$$

Для обратного определения $\mathscr{E}$ по $\cos\theta$ отсюда получается квадратное (относительно $\mathscr{E}$) уравнение

$$\mathscr{E}^2(1-V\cos\theta)-2\mathscr{E}\mathscr{E}_0\sqrt{1-V^2}+\mathscr{E}_0^2(1-V^2)+V^2m^2\cos^2\theta=0, \tag{2}$$

имеющее один (если скорость распадной частицы в ц-системе $v_0>V$) или два (если $v_0<V$) положительных корня.

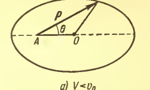
Происхождение последней двузначности ясно из следующего графического построения. Согласно формулам (9,15) компонента импульса в л-системе выражается через величины, относящиеся к ц-системе следующим образом:

$$p_x=\frac{p_0\cos\theta_0+\mathscr{E}_0V}{\sqrt{1-V^2}},\quad p_y=p_0\sin\theta_0.$$

Исключая отсюда θ_0, получим:

$$p_y^2+(p_x\sqrt{1-V^2}-\mathscr{E}_0V)^2=p_0^2.$$

По отношению к переменным p_x, p_y это есть уравнение эллипса с полуосями $p_0/\sqrt{1-V^2}$, p_0 и центром (точка O на рис. 3), смещенным на расстояние $\mathscr{E}_0V/\sqrt{1-V^2}$, от точки $\mathbf{p}=0$ (точка A на рис. 3)[1]).



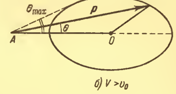


Рис. 3.

Если $V>p_0/\mathscr{E}_0=v_0$, то точка A лежит вне эллипса (рис. 3, б) и при заданном угле θ вектор $\mathbf{p}$ (а с ним и энергия $\mathscr{E}$) может иметь два различных значения. Из построения видно также, что в этом случае угол θ может принимать лишь значения, не превышающие определенного θ_{max} (отвечающего такому положению вектора $\mathbf{p}$, при котором он касателен к эллипсу). Значение θ_{max} проще всего определяется аналитически из условия обращения в нуль дискриминанта квадратного уравнения (2) и оказывается равным:

$$\sin\theta_{max}=\frac{p_0\sqrt{1-V^2}}{mV}.$$

2. Найти распределение распадных частиц по энергиям в л-системе.

---

[1]) В классическом пределе эллипс превращается в окружность (см. I § 16).

Решение. В $ц$-системе распадные частицы распределены изотропно по направлениям, т. е. доля числа частиц в элементе телесного угла $do_0 = 2\pi \sin\theta_0 d\theta_0$ есть

$$dN = \frac{1}{4\pi} do_0 = \frac{1}{2} d\,|\cos\theta_0|. \tag{1}$$

Энергия в $л$-системе связана с величинами, относящимися к $ц$-системе, соотношением

$$\mathscr{E} = \frac{\mathscr{E}_0 + p_0 V \cos\theta_0}{\sqrt{1-V^2}}$$

и пробегает значения между

$$\frac{\mathscr{E}_0 - Vp_0}{\sqrt{1-V^2}} \quad \text{и} \quad \frac{\mathscr{E}_0 + Vp_0}{\sqrt{1-V^2}}.$$

Выражая $d\,|\cos\theta_0|$ через $d\mathscr{E}$, получим нормированное на единицу распределение по энергиям (для каждого из двух сортов распадных частиц):

$$dN = \frac{1}{2Vp_0}\sqrt{1-V^2}\, d\mathscr{E}.$$

3. Определить интервал значений, которые может принимать в $л$-системе угол между двумя распадными частицами (угол разлета) при распаде на две одинаковые частицы.

Решение. В $ц$-системе частицы разлетаются во взаимно противоположных направлениях, так что $\theta_{10} = \pi - \theta_{20} \equiv \theta_0$. Связь между углами в $ц$- и $л$-системах дается согласно (5,4) формулами:

$$\operatorname{ctg}\theta_1 = \frac{v_0\cos\theta_0 + V}{v_0 \sin\theta_0 \sqrt{1-V^2}}, \qquad \operatorname{ctg}\theta_2 = \frac{-v_0\cos\theta_0 + V}{v_0\sin\theta_0\sqrt{1-V^2}}$$

(в данном случае $v_{10} = v_{20} \equiv v_0$). Искомый угол разлета $\Theta = \theta_1 + \theta_2$ и для него простое вычисление дает:

$$\operatorname{ctg}\Theta = \frac{V^2 - v_0^2 + V^2 v_0^2 \sin^2\theta_0}{2Vv_0\sqrt{1-V^2}\sin\theta_0}.$$

Исследование экстремумов этого выражения приводит к следующим интервалам возможных значений Θ:

если $V < v_0$: $\quad 2\operatorname{arctg}\left(\frac{v_0}{V}\sqrt{1-V^2}\right) < \Theta < \pi$;

если $v_0 < V < \frac{v_0}{\sqrt{1-v_0^2}}$: $\quad 0 < \Theta < \arcsin\sqrt{\frac{1-V^2}{1-v_0^2}} < \frac{\pi}{2}$;

если $V > \frac{v_0}{\sqrt{1-v_0^2}}$: $\quad 0 < \Theta < 2\operatorname{arctg}\left(\frac{v_0}{V}\sqrt{1-V^2}\right) < \frac{\pi}{2}$.

4. Найти угловое распределение в $л$-системе для распадных частиц с массой, равной нулю.

Решение. Связь между углами вылета в $ц$- и $л$-системах для частицы с $m = 0$ дается согласно (5,6) формулой

$$\cos\theta_0 = \frac{\cos\theta - V}{1 - V\cos\theta}.$$

Подставляя это выражение в формулу (1) задачи 2, получим:

$$dN=\frac{(1-V^2)\,do}{4\pi\,(1-V\cos\theta)^2}\,.$$

5. Найти распределение по углам разлета в л-системе при распаде на две частицы с массами, равными нулю.

Решение. Связь между углами вылета θ_1, θ_2 в л-системе и углами $\theta_{10}\equiv\theta_0$, $\theta_{20}=\pi-\theta_0$ в ц-системе определяется по формулам (5,6), после чего для угла разлета $\Theta=\theta_1+\theta_2$ находим:

$$\cos\Theta=\frac{2V^2-1-V^2\cos^2\theta_0}{1-V^2\cos^2\theta_0}$$

и обратно

$$\cos\theta_0=\sqrt{1-\frac{1-V^2}{V^2}\operatorname{ctg}^2\frac{\Theta}{2}}\,.$$

Подставив это выражение в формулу (1) задачи 2, получим:

$$dN=\frac{1-V^2}{16\pi V}\,\frac{do}{\sin^3\frac{\Theta}{2}\sqrt{V^2-\cos^2\frac{\Theta}{2}}}\,.$$

Угол Θ пробегает значения от π до $\Theta_{min}=2\arccos V$.

6. Определить наибольшую энергию, которую может унести одна из распадных частиц при распаде неподвижной частицы с массой M на три частицы m_1, m_2, m_3.

Решение. Частица m_1 имеет наибольшую энергию, если система двух остальных частиц m_2 и m_3 имеет наименьшую возможную массу; последняя равна сумме m_2+m_3 (чему отвечает совместное движение этих частиц с одинаковой скоростью). Сведя, таким образом, вопрос к распаду тела на две части, получим согласно (11,3):

$$\mathscr{E}_{1\,max}=\frac{M^2+m_1^2-(m_2+m_3)^2}{2M}\,.$$

§ 12. Инвариантное сечение

Как известно, различные процессы рассеяния характеризуются их *эффективными сечениями* (или просто *сечениями*), определяющими числа столкновений, происходящих в пучках сталкивающихся частиц.

Пусть мы имеем два сталкивающихся пучка; обозначим через n_1 и n_2 плотности частиц в них (т. е. числа частиц в единице объема), а через $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$ — скорости частиц. В системе отсчета, в которой частицы *2* покоятся (или, как говорят короче, в *системе покоя* частиц *2*), мы имеем дело со столкновением пучка частиц *1* с неподвижной мишенью. При этом, согласно обычному определению сечения σ, число столкновений, происходящих в объеме dV в течение времени dt, равно

$$d\nu=\sigma v_{отн}n_1n_2\,dV\,dt,$$

где $v_{\text{отн}}$ — величина скорости частиц *1* в системе покоя частиц *2* (именно так определяется в релятивистской механике относительная скорость двух частиц).

Число $d\nu$ по самому своему существу есть величина инвариантная. Поставим себе целью выразить ее в виде, пригодном в любой системе отсчета:

$$d\nu = An_1n_2\,dV\,dt, \tag{12,1}$$

где A — подлежащая определению величина, о которой известно, что в системе покоя одной из частиц она равна $v_{\text{отн}}\sigma$. При этом мы будем всегда понимать σ именно как сечение в системе покоя одной из частиц, т. е., по определению, как величину инвариантную. По определению инвариантной является и относительная скорость $v_{\text{отн}}$.

В выражении (12,1) произведение $dV\,dt$ есть величина инвариантная. Поэтому должно быть инвариантным и произведение An_1n_2.

Закон преобразования плотности частиц n легко найти, заметив, что инвариантно число частиц dV в заданном элементе объема dV. Написав $n\,dV = n_0\,dV_0$ (индекс 0 указывает систему покоя частиц) и воспользовавшись формулой (4,6) для преобразования объема, найдем:

$$n = \frac{n_0}{\sqrt{1-v^2}} \tag{12,2}$$

или $n = n_0\mathcal{E}/m$, где $\mathcal{E}$ — энергия, а m — масса частиц.

Поэтому утверждение об инвариантности произведения An_1n_2 эквивалентно инвариантности выражения $A\mathcal{E}_1\mathcal{E}_2$. Более удобно представить это условие в виде

$$A\frac{\mathcal{E}_1\mathcal{E}_2}{p_{1i}p_2^i} = A\frac{\mathcal{E}_1\mathcal{E}_2}{\mathcal{E}_1\mathcal{E}_2 - \mathbf{p}_1\mathbf{p}_2} = \text{inv}, \tag{12,3}$$

где в знаменателе стоит тоже инвариантная величина — произведение 4-импульсов обеих частиц.

В системе покоя частиц *2* имеем $\mathcal{E}_2 = m_2$, $\mathbf{p}_2 = 0$, так что инвариантная величина (12,3) сводится к A. С другой стороны, в этой системе $A = \sigma v_{\text{отн}}$. Таким образом, в произвольной системе отсчета

$$A = \sigma v_{\text{отн}}\frac{p_{1i}p_2^i}{\mathcal{E}_1\mathcal{E}_2}. \tag{12,4}$$

Для придания этому выражению окончательного вида, выразим $v_{\text{отн}}$ через импульсы или скорости частиц в произвольной системе отсчета. Для этого замечаем, что в системе покоя частицы *2* инвариант

$$p_{1i}p_2^i = \frac{m_1}{\sqrt{1-v_{\text{отн}}^2}}\,m_2.$$

Отсюда

$$v_{\text{отн}} = \sqrt{1 - \frac{m_1^2 m_2^2}{(p_{1i} p_2^i)^2}}. \qquad (12,5)$$

Выразив величину $p_{1i} p_2^i = \mathscr{E}_1 \mathscr{E}_2 - \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2$ через скорости $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$ с помощью (9,1) и (9,4):

$$p_{1i} p_2^i = m_1 m_2 \frac{1 - \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2}{\sqrt{(1 - v_1^2)(1 - v_2^2)}}$$

и подставив в (12,5), после простых преобразований получим следующее выражение для относительной скорости:

$$v_{\text{отн}} = \frac{\sqrt{(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)^2 - [\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2]^2}}{1 - \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2} \qquad (12,6)$$

(обратим внимание на то, что это выражение симметрично по $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$, т. е. величина относительной скорости не зависит от того, по отношению к которой из частиц она определяется).

Подставив (12,5) или (12,6) в (12,4), а затем в (12,1), получим окончательные формулы, решающие поставленный вопрос:

$$d\nu = \sigma \frac{\sqrt{(p_{1i} p_2^i)^2 - m_1^2 m_2^2}}{\mathscr{E}_1 \mathscr{E}_2} n_1 n_2 \, dV \, dt \qquad (12,7)$$

или

$$d\nu = \sigma \sqrt{(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)^2 - [\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2]^2} \, n_1 n_2 \, dV \, dt \qquad (12,8)$$

(*В. Паули*, 1933).

Если скорости $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$ лежат вдоль одной прямой, то $[\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2] = 0$, так что формула (12,8) принимает вид:

$$d\nu = \sigma |\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2| \, n_1 n_2 \, dV \, dt. \qquad (12,9)$$

Задача

Найти «элемент длины» в релятивистском «пространстве скоростей».

Решение. Искомый «элемент длины» dl_v представляет собой относительную скорость двух точек со скоростями $\mathbf{v}$ и $\mathbf{v} + d\mathbf{v}$. Поэтому из (12,6) находим:

$$dl_v^2 = \frac{(d\mathbf{v})^2 - [\mathbf{v}\, d\mathbf{v}]^2}{(1 - v^2)^2} = \frac{dv^2}{(1 - v^2)^2} + \frac{v^2}{(1 - v^2)} (d\theta^2 + \sin^2\theta \, d\varphi^2),$$

где θ, φ — полярный угол и азимут направления $\mathbf{v}$. Если ввести вместо v новую переменную χ согласно равенству $v = \operatorname{th}\chi$, то элемент длины представится в виде:

$$dl_v^2 = d\chi^2 + \operatorname{sh}^2\chi \, (d\theta^2 + \sin^2\theta \, d\varphi^2).$$

С геометрической точки зрения, это есть элемент длины в трехмерном пространстве Лобачевского — пространстве постоянной отрицательной кривизны [ср. (107,8)].

§ 13. Упругие столкновения частиц

Рассмотрим, с точки зрения релятивистской механики, *упругое столкновение* частиц. Обозначим импульсы и энергии двух сталкивающихся частиц (с массами m_1 и m_2) через $\mathbf{p}_1$, $\mathscr{E}_1$ и $\mathbf{p}_2$, $\mathscr{E}_2$; значения величин после столкновения будем отмечать штрихом.

Законы сохранения энергии и импульса при столкновении можно записать вместе в виде уравнения сохранения 4-импульса:

$$p_1^i + p_2^i = p_1'^i + p_2'^i. \qquad (13,1)$$

Составим из этого 4-векторного уравнения инвариантные соотношения, которые будут удобными для дальнейших вычислений. Для этого перепишем (13,1) в виде:

$$p_1^i + p_2^i - p_1'^i = p_2'^i$$

и возведем обе стороны равенства в квадрат (т. е. напишем их скалярные произведения самих на себя). Замечая, что квадраты 4-импульсов p_1^i и $p_1'^i$ равны m_1^2, а квадраты p_2^i и $p_2'^i$ равны m_2^2, получим:

$$m_1^2 + p_{1i}p_2^i - p_{1i}p_1'^i - p_{2i}p_1'^i = 0. \qquad (13,2)$$

Аналогичным образом, возведя в квадрат равенство $p_1^i + p_2^i - p_2'^i = p_1'^i$, получим:

$$m_2^2 + p_{1i}p_2^i - p_{2i}p_2'^i - p_{1i}p_2'^i = 0. \qquad (13,3)$$

Рассмотрим столкновение в системе отсчета (*л*-система), в которой до столкновения одна из частиц (частица m_2) покоилась. Тогда $\mathbf{p}_2 = 0$, $\mathscr{E}_2 = m_2$ и фигурирующие в (13,2) скалярные произведения равны:

$$\begin{gathered} p_{1i}p_2^i = \mathscr{E}_1 m_2, \qquad p_{2i}p_1'^i = m_2\mathscr{E}_1', \\ p_{1i}p_1'^i = \mathscr{E}_1\mathscr{E}_1' - \mathbf{p}_1\mathbf{p}_1' = \mathscr{E}_1\mathscr{E}_1' - p_1 p_1' \cos\theta_1, \end{gathered} \qquad (13,4)$$

где θ_1 — угол рассеяния налетающей частицы m_2. Подставив эти выражения в (13,2), получим:

$$\cos\theta_1 = \frac{\mathscr{E}_1'(\mathscr{E}_1 + m_2) - \mathscr{E}_1 m_2 - m_1^2}{p_1 p_1'}. \qquad (13,5)$$

Аналогичным образом из (13,3) найдем:

$$\cos\theta_2 = \frac{(\mathscr{E}_1 + m_2)(\mathscr{E}_2' - m_2)}{p_1 p_2'}, \qquad (13,6)$$

где θ_2 — угол, образуемый импульсом отдачи $\mathbf{p}_2'$ с импульсом налетающей частицы $\mathbf{p}_1$.

Формулы (13,5—6) связывают углы рассеяния обеих частиц в $л$-системе с изменениями их энергии при столкновениях. Обращая эти формулы, можно выразить энергии $\mathscr{E}_1'$, $\mathscr{E}_2'$ через угол θ_1 или θ_2. Так, подставив в (13,6) $p_1 = \sqrt{\mathscr{E}_1^2 - m_1^2}$, $p_2' = \sqrt{\mathscr{E}_2'^2 - m_2^2}$ и возведя равенство в квадрат, после простого вычисления получим:

$$\mathscr{E}_2' = m_2 \frac{(\mathscr{E}_1 + m_2)^2 + (\mathscr{E}_1^2 - m_1^2)\cos^2\theta_2}{(\mathscr{E}_1 + m_2)^2 - (\mathscr{E}_1^2 - m_1^2)\cos^2\theta_2}. \qquad (13,7)$$

Обращение же формулы (13,5) приводит в общем случае к весьма громоздкому выражению $\mathscr{E}_1'$ через θ_1.

Отметим, что если $m_1 > m_2$, т. е. налетающая частица тяжелее покоящейся, то угол рассеяния θ_1 не может превышать некоторого максимального значения. Элементарным вычислением легко найти, что это значение определяется равенством

$$\sin\theta_{1\,\max} = \frac{m_2}{m_1}, \qquad (13,8)$$

в точности совпадающим с известным классическим результатом.

Формулы (13,5—6) упрощаются в случае, когда налетающая частица обладает равной нулю массой: $m_1 = 0$ и соответственно $p_1 = \mathscr{E}_1$, $p_1' = \mathscr{E}_1'$. Выпишем для этого случая формулу для энергии налетающей частицы после столкновения, выраженной через угол ее отклонения:

$$\mathscr{E}_1' = \frac{m_2}{1 - \cos\theta_1 + \frac{m_2}{\mathscr{E}_1}}. \qquad (13,9)$$

Вернемся снова к общему случаю столкновения частиц любых масс. Наиболее просто столкновение выглядит в $ц$-системе. Отмечая значения величин в этой системе дополнительным индексом 0, имеем здесь $\mathbf{p}_{10} = -\mathbf{p}_{20} \equiv \mathbf{p}_0$. В силу сохранения импульса, импульсы обеих частиц при столкновении только поворачиваются, оставаясь равными по величине и противоположными по направлению. В силу же сохранения энергии абсолютные значения каждого из импульсов остаются неизменными.

Обозначим через χ угол рассеяния в $ц$-системе — угол, на который поворачиваются при столкновении импульсы $\mathbf{p}_{10}$ и $\mathbf{p}_{20}$. Этой величиной полностью определяется процесс рассеяния в системе центра инерции, а потому и во всякой другой системе отсчета. Ее удобно выбрать также и при описании столкновения в $л$-системе в качестве того единственного параметра, который остается неопределенным после учета законов сохранения энергии и импульса.

Выразим через этот параметр конечные энергии обеих частиц в $л$-системе. Для этого вернемся к соотношению (13,2), но на этот раз раскроем произведение $p_{1i}p_1^{'i}$ в $ц$-системе:

$$p_{1i}p_1^{'i} = \mathscr{E}_{10}\mathscr{E}'_{10} - \mathbf{p}_{10}\mathbf{p}'_{10} = \mathscr{E}_{10}^2 - p_0^2 \cos\chi = p_0^2(1-\cos\chi) + m_1^2$$

(в $ц$-системе энергия каждой из частиц при столкновении не меняется: $\mathscr{E}'_{10} = \mathscr{E}_{10}$). Остальные же два произведения раскрываем по-прежнему в $л$-системе, т. е. берем из (13,4). В результате получим:

$$\mathscr{E}'_1 - \mathscr{E}_1 = -\frac{p_0^2}{m_2}(1-\cos\chi).$$

Остается выразить p_0^2 через величины, относящиеся к $л$-системе. Это легко сделать путем приравнивания значений инварианта $p_{1i}p_2^i$ в $ц$- и $л$-системах:

$$\mathscr{E}_{10}\mathscr{E}_{20} - \mathbf{p}_{10}\mathbf{p}_{20} = \mathscr{E}_1 m_2$$

или

$$\sqrt{(p_0^2+m_1^2)(p_0^2+m_2^2)} = \mathscr{E}_1 m_2 - p_0^2.$$

Решая это уравнение относительно p_0^2, получим:

$$p_0^2 = \frac{m_2^2(\mathscr{E}_1^2 - m_1^2)}{m_1^2 + m_2^2 + 2m_2\mathscr{E}_1}. \qquad (13,10)$$

Таким образом, окончательно имеем:

$$\mathscr{E}'_1 = \mathscr{E}_1 - \frac{m_2(\mathscr{E}_1^2 - m_1^2)}{m_1^2 + m_2^2 + 2m_2\mathscr{E}_1}(1-\cos\chi). \qquad (13,11)$$

Энергия второй частицы получается из закона сохранения: $\mathscr{E}_1 + m_2 = \mathscr{E}'_1 + \mathscr{E}'_2$. Поэтому

$$\mathscr{E}'_2 = m_2 + \frac{m_2(\mathscr{E}_1^2 - m_1^2)}{m_1^2 + m_2^2 + 2m_2\mathscr{E}_1}(1-\cos\chi). \qquad (13,12)$$

Вторые члены в этих формулах представляют собой энергию, теряемую первой и приобретаемую второй частицей. Наибольшая передача энергии получается при $\chi = \pi$ и равна

$$\mathscr{E}'_{2\,\max} - m_2 = \mathscr{E}_1 - \mathscr{E}'_{1\,\min} = \frac{2m_2(\mathscr{E}_1^2 - m_1^2)}{m_1^2 + m_2^2 + 2m_2\mathscr{E}_1}. \qquad (13,13)$$

Отношение минимальной кинетической энергии налетающей частицы после столкновения к ее первоначальной кинетической энергии:

$$\frac{\mathscr{E}'_{1\,\min} - m_1}{\mathscr{E}_1 - m_1} = \frac{(m_1 - m_2)^2}{m_1^2 + m_2^2 + 2m_2\mathscr{E}_1}. \qquad (13,14)$$

В предельном случае малых скоростей (когда $\mathscr{E} \approx m + mv^2/2$) это отношение стремится к постоянному пределу, равному

$$\left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right)^2.$$

В обратном же пределе больших энергий $\mathscr{E}_1$ отношение (13,14) стремится к нулю; к постоянному же пределу стремится сама величина $\mathscr{E}'_{1\,\min}$. Этот предел равен

$$\mathscr{E}'_{1\,\min} = \frac{m_1^2 + m_2^2}{2m_2}.$$

Предположим, что $m_2 \gg m_1$, т. е. масса налетающей частицы мала по сравнению с массой покоившейся частицы. Согласно классической механике при этом легкая частица могла бы передать тяжелой только ничтожную часть своей энергии (см. I § 17). Такое положение не имеет, однако, места в релятивистской теории. Из формулы (13,14) видно, что при достаточно больших энергиях $\mathscr{E}_1$ доля переданной энергии может достичь порядка 1. Для этого, однако, недостаточно, чтобы скорость частицы m_1 была порядка 1, а необходимы, как легко видеть, энергии

$$\mathscr{E}_1 \sim m_2,$$

т. е. легкая частица должна обладать энергией порядка энергии покоя тяжелой частицы.

Аналогичное положение имеет место при $m_2 \ll m_1$, т. е. когда тяжелая частица налетает на легкую. И здесь, согласно классической механике, происходила бы лишь незначительная передача энергии. Доля передаваемой энергии начинает становиться значительной только начиная от энергий

$$\mathscr{E}_1 \sim \frac{m_1^2}{m_2}.$$

Отметим, что и здесь речь идет не просто о скоростях порядка скорости света, а об энергиях, больших по сравнению с m_1, т. е. об ультрарелятивистском случае.

Задачи

1. На рис. 4 треугольник ABC образован вектором импульса $\mathbf{p}_1$ налетающей частицы и импульсами $\mathbf{p}'_1$, $\mathbf{p}'_2$ обеих частиц после столкновения. Найти геометрическое место точек C, соответствующих всем возможным значениям $\mathbf{p}'_1$, $\mathbf{p}'_2$.

Решение. Искомая кривая представляет собой эллипс, полуоси которого могут быть найдены непосредственно с помощью формул, полученных

в задаче 1 к § 11. Действительно, произведенное там построение представляет собой нахождение геометрического места концов векторов **p** в *л*-системе, получающихся из произвольно направленных векторов $\mathbf{p}_0$ с заданной длиной p_0 в *ц*-системе.

Учитывая, что абсолютные величины импульсов сталкивающихся частиц в *ц*-системе одинаковы и не меняются при столкновении, мы имеем дело

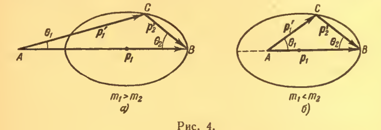


Рис. 4.

в данном случае с аналогичным построением для вектора p'_1, для которого в *ц*-системе

$$p_0 = p_{10} = p_{20} = \frac{m_2 V}{\sqrt{1-V^2}},$$

где V — скорость частицы m_2 в *л*-системе, совпадающая по величине со скоростью центра инерции, равной $V = p_1/(\mathscr{E}_1 + m_2)$ [см. (11,4)]. В результате найдем, что малая и большая полуоси эллипса равны

$$p_0 = \frac{m_2 p_1}{\sqrt{m_1^2 + m_2^2 + 2m_2\mathscr{E}_1}},$$

$$\frac{p_0}{\sqrt{1-V^2}} = \frac{m_2 p_1 (\mathscr{E}_1 + m_2)}{m_1^2 + m_2^2 + 2m_2\mathscr{E}_1}$$

[первое из этих выражений совпадает, конечно, с (13,10)].

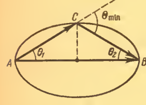


Рис. 5.

При $\theta_1 = 0$ вектор $\mathbf{p}'_1$ совпадает с $\mathbf{p}_1$, так что расстояние AB равно p_1. Сравнивая p_1 с удвоенной большой полуосью эллипса, легко убедиться, что точка A лежит вне эллипса, если $m_1 > m_2$ (рис. 4, *а*) и внутри него при $m_1 < m_2$ (рис. 4, *б*).

2. Определить минимальный угол разлета Θ_{min} частиц после столкновения, если массы обеих частиц одинаковы ($m_1 = m_2 \equiv m$).

Р е ш е н и е. При $m_1 = m_2$ точка A диаграммы лежит на эллипсе, а минимальному углу разлета соответствует положение точки C в конце малой полуоси (рис. 5). Из построения ясно, что $\operatorname{tg}(\Theta_{min}/2)$ дается отношением длин полуосей, и мы находим:

$$\operatorname{tg}\frac{\Theta_{min}}{2} = \sqrt{\frac{2m}{\mathscr{E}_1 + m}},$$

или

$$\cos\Theta_{min} = \frac{\mathscr{E}_1 - m}{\mathscr{E}_1 + 3m}.$$

3. Для столкновения двух частиц одинаковой массы m выразить $\mathscr{E}_1'$, $\mathscr{E}_2'$, χ через угол рассеяния в $л$-системе θ_1.

Решение. Обращение формулы (13,5) дает в этом случае:

$$\mathscr{E}_1' = \frac{(\mathscr{E}_1+m)+(\mathscr{E}_1-m)\cos^2\theta_1}{(\mathscr{E}_1+m)-(\mathscr{E}_1-m)\cos^2\theta_1},$$

$$\mathscr{E}_2' = m + \frac{\left(\mathscr{E}_1^2-m^2\right)\sin^2\theta_1}{2m+(\mathscr{E}_1-m)\sin^2\theta_1}.$$

Сравнивая с выражением $\mathscr{E}_1'$ через χ:

$$\mathscr{E}_1' = \mathscr{E}_1 - \frac{\mathscr{E}_1-m}{2}(1-\cos\chi),$$

найдем угол рассеяния в $ц$-системе:

$$\cos\chi = \frac{2m-(\mathscr{E}_1+3m)\sin^2\theta_1}{2m+(\mathscr{E}_1+m)\sin^2\theta_1}.$$

§ 14. Момент импульса

Как известно из классической механики, у замкнутой системы, кроме энергии и импульса, сохраняется еще и момент импульса, т. е. вектор

$$\mathbf{M} = \sum [\mathbf{rp}]$$

($\mathbf{r}$ и $\mathbf{p}$ — радиус-вектор и импульс частицы; суммирование производится по всем частицам, входящим в состав системы). Сохранение момента является следствием того, что функция Лагранжа для замкнутой системы в силу изотропии пространства не меняется при повороте системы как целого.

Проделав теперь аналогичный вывод в четырехмерном виде, мы получим релятивистское выражение для момента. Пусть x^i — координаты одной из частиц системы. Произведем бесконечно малый поворот в четырехмерном пространстве. Это есть преобразование, при котором координаты x^i принимают новые значения x'^i, так что разности $x'^i - x^i$ являются линейными функциями

$$x'^i - x^i = x_k\,\delta\Omega^{ik} \qquad (14,1)$$

с бесконечно малыми коэффициентами $\delta\Omega_{ik}$. Компоненты 4-тензора $\delta\Omega_{ik}$ связаны при этом соотношениями, возникающими в результате требования, чтобы при повороте оставалась неизменной длина 4-радиус-вектора, т. е. чтобы было $x_i'x'^i = x_ix^i$. Подставляя сюда x'^i из (14,1) и отбрасывая члены, квадратичные по $\delta\Omega_{ik}$, как бесконечно малые высшего порядка, находим:

$$x^ix^k\delta\Omega_{ik} = 0.$$

Это равенство должно выполняться при произвольных x^l. Поскольку $x^i x^k$ — симметричный тензор, $\delta\Omega_{ik}$ должны составлять антисимметричный тензор (произведение симметричного тензора на антисимметричный, очевидно, тождественно равно нулю):

$$\delta\Omega_{ki} = -\delta\Omega_{ik}. \tag{14,2}$$

Изменение δS действия S при бесконечно малом изменении координат имеет вид [см. (9,11)]:

$$\delta S = \sum p^i \delta x_i$$

(суммирование производится по всем частицам системы). В случае рассматриваемого нами сейчас поворота $\delta x_i = \delta\Omega_{ik} x^k$, а потому

$$\delta S = \delta\Omega_{ik} \sum p^i x^k.$$

Если разбить тензор $\sum p^i x^k$ на симметричную и антисимметричную части, то первая из них при умножении на антисимметричный тензор тождественно дает нуль. Поэтому, выделяя из $\sum p^i x^k$ антисимметричную часть, мы можем написать предыдущее равенство в виде

$$\delta S = \delta\Omega_{ik} \frac{1}{2} \sum (p^i x^k - p^k x^i). \tag{14,3}$$

Для замкнутой системы, в силу изотропии пространства и времени, при повороте в 4-пространстве функция Лагранжа не меняется, т. е. параметры $\delta\Omega_{ik}$ этого поворота являются циклическими координатами. Поэтому соответствующие обобщенные импульсы сохраняются. Этими импульсами являются величины $\partial S/\partial\Omega_{ik}$. Из (14,3) имеем:

$$\frac{\partial S}{\partial \Omega_{ik}} = \frac{1}{2} \sum (p^i x^k - p^k x^i).$$

Мы видим, следовательно, что у замкнутой системы сохраняется тензор

$$M^{ik} = \sum (x^i p^k - x^k p^i). \tag{14,4}$$

Этот антисимметричный тензор носит название 4-тензора *момента*.

Пространственные компоненты тензора момента совпадают с компонентами трехмерного вектора момента $\mathbf{M} = \sum [\mathbf{rp}]$:

$$M^{23} = M_x, \quad -M^{13} = M_y, \quad M^{12} = M_z.$$

Компоненты же M^{01}, M^{02}, M^{03} составляют вектор $\sum (t\mathbf{p} - \mathscr{E}\mathbf{r}/c^2)$. Таким образом, можно записать компоненты тензора M^{ik} в виде:

$$M^{ik} = \left(\sum \left(t\mathbf{p} - \frac{\mathscr{E}\mathbf{r}}{c^2} \right), -\mathbf{M} \right) \tag{14,5}$$

[ср. (6,10)].

В силу сохранения M^{ik} для замкнутой системы имеем, в частности,

$$\sum \left(t\mathbf{p} - \frac{\mathscr{E}\mathbf{r}}{c^2} \right) = \text{const}.$$

Поскольку, с другой стороны, полная энергия $\sum \mathscr{E}$ тоже сохраняется, то это равенство можно написать в виде:

$$\frac{\sum \mathscr{E}\mathbf{r}}{\sum \mathscr{E}} - t\,\frac{c^2 \sum \mathbf{p}}{\sum \mathscr{E}} = \text{const}.$$

Отсюда мы видим, что точка с радиус-вектором

$$\mathbf{R} = \frac{\sum \mathscr{E}\mathbf{r}}{\sum \mathscr{E}} \tag{14,6}$$

равномерно движется со скоростью

$$\mathbf{V} = \frac{c^2 \sum \mathbf{p}}{\sum \mathscr{E}}, \tag{14,7}$$

которая есть не что иное, как скорость движения системы как целого [отвечающая по формуле (9,8) ее полным энергии и импульсу]. Формула (14,6) дает релятивистское определение координат центра инерции системы. Если скорости всех частиц малы по сравнению с c, то можно приближенно положить $\mathscr{E} \approx mc^2$ и (14,6) переходит в обычное классическое выражение [1])

$$\mathbf{R} = \frac{\sum m\mathbf{r}}{\sum m}.$$

Обратим внимание на то, что компоненты вектора (14,6) не составляют пространственных компонент какого-либо 4-вектора и потому при преобразовании системы отсчета не преобразуются как координаты какой-либо точки. Поэтому центр инерции одной и той же системы частиц по отношению к различным системам отсчета — это различные точки.

Задача

Найти связь между моментом импульса $\mathbf{M}$ тела (системы частиц) в системе отсчета K, в которой тело движется со скоростью $\mathbf{V}$, и его моментом $\mathbf{M}^{(0)}$ в системе отсчета K_0, в которой тело как целое покоится; в обоих

[1]) В то время как классическая формула для центра инерции относится к системам как не взаимодействующих, так и взаимодействующих частиц, формула (14,6) справедлива лишь при пренебрежении взаимодействием. В релятивистской механике определение центра инерции системы взаимодействующих частиц требует учета в явном виде также импульса и энергии создаваемого ими поля.

случаях момент определяется по отношению к одной и той же точке — центру инерции тела в системе K_0[1]).

Решение. Система K_0 движется относительно K со скоростью $\mathbf{V}$; выберем ее направление в качестве оси x. Интересующие нас компоненты тензора M^{ik} преобразуются по формулам (см. задачу 2 § 6):

$$M^{12}=\frac{M^{(0)12}+\frac{V}{c}M^{(0)02}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}},\quad M^{13}=\frac{M^{(0)13}+\frac{V}{c}M^{(0)03}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}},\quad M^{23}=M^{(0)23}.$$

Так как начало координат выбрано в центре инерции тела (в системе K_0), то в этой системе $\sum \mathscr{E}\mathbf{r}=0$, а поскольку в ней и $\sum \mathbf{p}=0$, то $M^{(0)02}=M^{(0)03}=0$. Учитывая связь между компонентами M^{ik} и вектором $\mathbf{M}$, находим для последнего:

$$M_x=M_x^{(0)},\quad M_y=\frac{M_y^{(0)}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}},\quad M_z=\frac{M_z^{(0)}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}.$$

---

[1]) Напомним, что хотя в системе K_0 (в которой $\sum \mathbf{p}=0$) момент импульса не зависит от выбора точки, по отношению к которой он определяется, но в системе K (в которой $\sum \mathbf{p}\neq 0$) момент зависит от этого выбора (см. I § 9).

ГЛАВА III

ЗАРЯД В ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ПОЛЕ

§ 15. Элементарные частицы в теории относительности

Взаимодействие частиц друг с другом можно описывать с помощью понятия силового *поля*. Вместо того чтобы говорить о том, что одна частица действует на другую, можно сказать, что частица создает вокруг себя поле; на всякую другую частицу, находящуюся в этом поле, действует некоторая снла. В классической механике поле является лишь некоторым способом описания физического явления — взаимодействия частиц. В теории же относительности благодаря конечиости скорости распространения взаимодействий положение вещей существенным образом меняется. Силы, действующие в данный момент на частицу, не определяются их расположением в этот момент. Изменение положения одной из частиц отражается на других частицах лишь спустя некоторый промежуток времени. Это значит, что поле само по себе становится физической реальностью. Мы не можем говорить о непосредственном взаимодействии частиц, находящихся на расстоянии друг от друга. Взаимодействие может происходить в каждый момент лишь между соседними точками пространства (близкодействие). Поэтому мы должны говорить о взаимодействии одной частицы с полем и о последующем взаимодействии поля с другой частицей.

Мы будем рассматривать два вида полей: поля гравитационные и электромагнитные. Гравитационным полям посвящены главы X—XII. В остальных главах рассматриваются только электромагнитные поля.

Изучению взаимодействий частиц с электромагнитным полем предпошлем некоторые общие соображения, относящиеся к понятию «частицы» в релятивистской механике.

В классической маханике можно ввести понятие абсолютно твердого тела, т. е. тела, которое ни при каких условиях не может быть деформировано. В теории относительности под абсолютно твердыми телами следовало бы соответственно подразумевать тела,

все размеры которых остаются неизменными в той системе отсчета, где они покоятся. Легко, однако, видеть, что теория относительности делает вообще невозможным существование абсолютно твердых тел.

Рассмотрим, например, круглый диск, вращающийся вокруг своей оси, и предположим, что он абсолютно тверд. Связанная с этим диском система отсчета, конечно, не является инерциальной. Можно, однако, ввести для каждого из небольших элементов диска инерциальную систему отсчета, в которой бы этот элемент в данный момент покоился; для разных элементов диска, обладающих различными скоростями, эти системы будут, конечно, тоже различны. Рассмотрим ряд элементов длины, расположенных вдоль какого-нибудь радиуса диска. Благодаря абсолютной твердости диска длины каждого из этих отрезков в соответствующей инерциальной системе отсчета остаются такими же, какими они являются у неподвижного диска. Эти же длины получит и измеряющий их неподвижный наблюдатель, мимо которого проходит в данный момент рассматриваемый радиус диска, поскольку каждый из отрезков перпендикулярен к своей скорости, а в таком случае не происходит лоренцова сокращения. Поэтому и весь радиус, измеренный неподвижным наблюдателем как сумма составляющих его отрезков, будет таким же, каким он является у неподвижного диска. С другой стороны, длина каждого из элементов окружности диска, проходящего в данный момент мимо неподвижного наблюдателя, подвергается лоренцову сокращению, так что и длина всей окружности (измеренная неподвижным наблюдателем как сумма длин отдельных ее отрезков) окажется меньше, чем длина окружности покоящегося диска. Мы приходим, таким образом, к результату, что при вращении диска отношение длины его окружности к радиусу (измеряемое неподвижным наблюдателем) должно было бы измениться вместо того, чтобы остаться равным 2π. Противоречие этого результата со сделанным предположением и показывает, что в действительности диск не может быть абсолютно твердым и при вращении неизбежно подвергается некоторой сложной деформации, зависящей от упругих свойств материала, из которого сделан диск.

В невозможности существования абсолютно твердых тел можно убедиться и другим путем. Пусть какое-нибудь твердое тело внешним воздействием в какой-нибудь одной его точке приводится в движение. Если бы тело было абсолютно твердым, то все его точки должны были бы прийти в движение одновременно с той, которая подверглась воздействию; в противном случае тело деформировалось бы. Теория относительности, однако, делает это невозможным, так как воздействие от данной точки передается к остальным с конечной скоростью, а потому все точки тела не могут одновременно начать двигаться.

Из сказанного вытекают определенные выводы, относящиеся к рассмотрению *элементарных* частиц, т. е. частиц, для которых мы считаем, что их механическое состояние полностью описывается заданием трех координат и трех компонент скорости движения как целого. Очевидно, что если бы элементарная частица обладала конечными размерами, т. е. была бы протяженной, то она не могла бы деформироваться, так как понятие деформации связано с возможностью независимого движения отдельных частей тела. Но, как мы только что видели, теория относительности показывает невозможность существования абсолютно твердых тел.

Таким образом, в классической (неквантовой) релятивистской механике частицам, которые мы рассматриваем как элементарные, нельзя приписывать конечных размеров. Другими словами, в пределах классической теории элементарные частицы должны рассматриваться как точечные[1]).

§ 16. Четырехмерный потенциал поля

Действие для частицы, движущейся в заданном электромагнитном поле, складывается из двух частей: из действия (8,1) свободной частицы и из члена, описывающего взаимодействие частицы с полем. Последний должен содержать как величины, характеризующие частицу, так и величины, характеризующие поле.

Оказывается[2]), что свойства частицы в отношении ее взаимодействия с электромагнитным полем определяются всего одним параметром — так называемым *зарядом* частицы e, который может быть как положительной, так и отрицательной (или равной нулю) величиной. Свойства же поля характеризуются 4-вектором A_i, так называемым *4-потенциалом*, компоненты которого являются функциями координат и времени. Эти величины входят в действие в виде члена

$$-\frac{e}{c}\int_a^b A_i\,dx^i,$$

[1]) Хотя квантовая механика существенно меняет ситуацию, однако и здесь теория относительности делает крайне трудным введение неточечного взаимодействия.

[2]) Следующие ниже утверждения надо рассматривать в значительной степени как результат опытных данных. Вид действия для частицы в электромагнитном поле не может быть установлен на основании одних только общих соображений таких, как требование релятивистской инвариантности $\left(\text{последнее допускало бы, например, в формуле (16,1) также и член вида } \int A\,ds, \text{ где } A \text{ — скалярная функция}\right)$.

Во избежание недоразумений напомним, что речь идет везде о классической (не квантовой) теории, и потому нигде не учитываются эффекты, связанные со спином частиц.

где функции A_i берутся в точках мировой линии частицы. Множитель $1/c$ введен здесь для удобства. Следует отметить, что до тех пор, пока у нас нет никаких формул, связывающих заряд или потенциалы с известными уже величинами, единицы для их измерения могут быть выбраны произвольным образом [1]).

Таким образом, действие для заряда в электромагнитном поле имеет вид

$$S=\int_a^b\left(-mc\,ds-\frac{e}{c}A_i\,dx^i\right). \tag{16,1}$$

Три пространственные компоненты 4-вектора A^i образуют трехмерный вектор $\mathbf{A}$, называемый *векторным потенциалом* поля. Временную же компоненту называют *скалярным потенциалом*; обозначим ее как $A^0=\varphi$. Таким образом,

$$A^i=(\varphi,\ \mathbf{A}). \tag{16,2}$$

Поэтому интеграл действия можно написать в виде

$$S=\int_a^b\left(-mc\,ds+\frac{e}{c}\mathbf{A}\,d\mathbf{r}-e\varphi\,dt\right),$$

или, вводя скорость частицы $\mathbf{v}=d\mathbf{r}/dt$ и переходя к интегрированию по времени,

$$S=\int_{t_1}^{t_2}\left(-mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}+\frac{e}{c}\mathbf{A}\mathbf{v}-e\varphi\right)dt. \tag{16,3}$$

Подынтегральное выражение есть функция Лагранжа для заряда в электромагнитном поле:

$$L=-mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}+\frac{e}{c}\mathbf{A}\mathbf{v}-e\varphi. \tag{16,4}$$

Это выражение отличается от функции Лагранжа (8,2) для свободной частицы членами $\frac{e}{c}\mathbf{A}\mathbf{v}-e\varphi$, которые описывают взаимодействие заряда с полем.

Производная $\partial L/\partial\mathbf{v}$ есть обобщенный импульс частицы; обозначим его посредством $\mathbf{P}$. Производя дифференцирование, находим:

$$\mathbf{P}=\frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}+\frac{e}{c}\mathbf{A}=\mathbf{p}+\frac{e}{c}\mathbf{A}. \tag{16,5}$$

Здесь мы обозначили посредством $\mathbf{p}$ обычный импульс частицы, который мы и будем называть просто импульсом.

---

[1]) Об установлении этих единиц см. § 27.

Из функции Лагранжа можно найти функцию Гамильтона частицы в поле по известной общей формуле.

$$\mathscr{H} = \mathbf{v}\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} - L.$$

Подставляя сюда (16,4), найдем:

$$\mathscr{H} = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + e\varphi. \tag{16,6}$$

Функция Гамильтона, однако, должна быть выражена не через скорость, а через обобщенный импульс частицы.

Из (16,5—6) видно, что соотношение между $\mathscr{H} - e\varphi$ и $\mathbf{P} - \frac{e}{c}\mathbf{A}$ — такое же, как между $\mathscr{H}$ и $\mathbf{p}$ в отсутствие поля, т. е.

$$\left(\frac{\mathscr{H} - e\varphi}{c}\right)^2 = m^2c^2 + \left(\mathbf{P} - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2, \tag{16,7}$$

или иначе:

$$\mathscr{H} = \sqrt{m^2c^4 + c^2\left(\mathbf{P} - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2} + e\varphi. \tag{16,8}$$

Для малых скоростей, т. е. в классической механике, функция Лагранжа (16,4) переходит в

$$L = \frac{mv^2}{2} + \frac{e}{c}\mathbf{A}\mathbf{v} - e\varphi. \tag{16,9}$$

В этом приближении

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} = \mathbf{P} - \frac{e}{c}\mathbf{A},$$

и мы находим следующее выражение для функции Гамильтона:

$$\mathscr{H} = \frac{1}{2m}\left(\mathbf{P} - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2 + e\varphi. \tag{16,10}$$

Наконец, выпишем уравнение Гамильтона—Якоби для частицы в электромагнитном поле. Оно получается заменой в функции Гамильтона обобщенного импульса $\mathbf{P}$ на $\partial S/\partial \mathbf{r}$, а самого $\mathscr{H}$ — на $-\partial S/\partial t$. Таким образом, получим из (16,7):

$$\left(\operatorname{grad} S - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial S}{\partial t} + e\varphi\right)^2 + m^2c^2 = 0. \tag{16,11}$$

§ 17. Уравнения движения заряда в поле

Заряд, находящийся в поле, не только подвергается воздействию со стороны поля, но в свою очередь сам влияет на поле, изменяя его. Однако если заряд e не велик, то его действием на поле можно пренебречь. В этом случае, рассматривая движение

в заданном поле, можно считать, что само поле не зависит ни от координат, ни от скорости заряда. Точные условия, которым должен удовлетворять заряд для того, чтобы он мог считаться в указанном смысле малым, будут выяснены в дальнейшем (§ 75). Ниже мы будем считать это условие выполненным.

Итак, нам надо найти уравнения движения заряда в заданном электромагнитном поле. Эти уравнения получаются варьированием действия, т. е. даются уравнениями Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}}=\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}}, \tag{17,1}$$

где L определяется формулой (16,4).

Производная $\partial L/\partial \mathbf{v}$ есть обобщенный импульс частицы (16,5). Далее пишем:

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}}\equiv \nabla L=\frac{e}{c}\operatorname{grad}\mathbf{A}\mathbf{v}-e\operatorname{grad}\varphi.$$

Но по известной формуле векторного анализа

$$\operatorname{grad}\mathbf{ab}=(\mathbf{a}\nabla)\,\mathbf{b}+(\mathbf{b}\nabla)\,\mathbf{a}+[\mathbf{b}\operatorname{rot}\mathbf{a}]+[\mathbf{a}\operatorname{rot}\mathbf{b}],$$

где $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ — любые два вектора. Применяя эту формулу к $\mathbf{Av}$ и помня, что дифференцирование по $\mathbf{r}$ производится при постоянном $\mathbf{v}$, находим:

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}}=\frac{e}{c}(\mathbf{v}\nabla)\,\mathbf{A}+\frac{e}{c}[\mathbf{v}\operatorname{rot}\mathbf{A}]-e\operatorname{grad}\varphi.$$

Уравнения Лагранжа, следовательно, имеют вид:

$$\frac{d}{dt}\left(\mathbf{p}+\frac{e}{c}\mathbf{A}\right)=\frac{e}{c}(\mathbf{v}\nabla)\,\mathbf{A}+\frac{e}{c}[\mathbf{v}\operatorname{rot}\mathbf{A}]-e\operatorname{grad}\varphi.$$

Но полный дифференциал $\frac{d\mathbf{A}}{dt}dt$ складывается из двух частей: из изменения $\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}dt$ векторного потенциала со временем в данной точке пространства и из изменения при переходе от одной точки пространства к другой на расстояние $d\mathbf{r}$. Эта вторая часть равна $(d\mathbf{r}\nabla)\,\mathbf{A}$. Таким образом,

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt}=\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}+(\mathbf{v}\nabla)\,\mathbf{A}.$$

Подставляя это в предыдущее уравнение, получаем:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt}=-\frac{e}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}-e\operatorname{grad}\varphi+\frac{e}{c}[\mathbf{v}\operatorname{rot}\mathbf{A}]. \tag{17,2}$$

Это и есть уравнение движения частицы в электромагнитном поле. Слева стоит производная от импульса частицы по времени.

Следовательно, выражение в правой части (17,2) есть сила, действующая на заряд в электромагнитном поле. Мы видим, что эта сила состоит из двух частей. Первая часть [первый и второй члены в правой части (17,2)] не зависит от скорости частицы. Вторая часть (третий член) зависит от этой скорости: пропорциональна величине скорости и перпендикулярна к ней.

Силу первого рода, отнесенную к заряду, равному единице, называют *напряженностью электрического поля*; обозначим ее посредством **E**.

Итак, по определению,

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \operatorname{grad}\varphi. \qquad (17,3)$$

Множитель при скорости, точнее при $\mathbf{v}/c$, в силе второго рода, действующей на единичный заряд, называют *напряженностью магнитного поля*; обозначим ее через **H**.

Итак, по определению,

$$\mathbf{H} = \operatorname{rot}\mathbf{A}. \qquad (17,4)$$

Если в электромагнитном поле $\mathbf{E} \neq 0$, а $\mathbf{H} = 0$, то говорят об *электрическом поле*; если же $\mathbf{E} = 0$, а $\mathbf{H} \neq 0$, то поле называют *магнитным*. В общем случае электромагнитное поле является наложением полей электрического и магнитного.

Отметим, что **E** представляет собой полярный, а **H** — аксиальный вектор.

Уравнения движения заряда в электромагнитном поле можно теперь написать в виде

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = e\mathbf{E} + \frac{e}{c}[\mathbf{vH}]. \qquad (17,5)$$

Стоящее справа выражение носит название *лоренцевой силы*. Первая ее часть — сила, с которой действует электрическое поле на заряд, — не зависит от скорости заряда и ориентирована по направлению поля **E**. Вторая часть — сила, оказываемая магнитным полем на заряд, — пропорциональна скорости заряда и направлена перпендикулярно к этой скорости и к направлению магнитного поля **H**.

Для скоростей, малых по сравнению со скоростью света, импульс **p** приближенно равен своему классическому выражению $m\mathbf{v}$, и уравнение движения (17,5) переходит в

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = e\mathbf{E} + \frac{e}{c}[\mathbf{vH}]. \qquad (17,6)$$

Выведем еще уравнение, определяющее изменение кинетической энергии частицы[1]) со временем, т. е. производную

$$\frac{d\mathscr{E}_{\text{кин}}}{dt}=\frac{d}{dt}\frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.$$

Легко убедиться, что

$$\frac{d\mathscr{E}_{\text{кин}}}{dt}=\mathbf{v}\frac{d\mathbf{p}}{dt};$$

подставляя $d\mathbf{p}/dt$ из (17,5) и замечая, что $[\mathbf{vH}]\,\mathbf{v}=0$, имеем

$$\frac{d\mathscr{E}_{\text{кин}}}{dt}=e\mathbf{Ev}. \tag{17,7}$$

Изменение кинетической энергии со временем есть работа, произведенная полем над частицей (в единицу времени). Из (17,7) видно, что эта работа равна произведению скорости заряда на силу, с которой действует на него электрическое поле. Работа поля за время dt, т. е. при перемещении заряда на $d\mathbf{r}$, равна $e\mathbf{E}\,d\mathbf{r}$.

Подчеркнем, что работу над зарядом производит только электрическое поле; магнитное поле не производит работы над движущимся в нем зарядом. Последнее связано с тем, что сила, с которой магнитное поле действует на частицу, всегда перпендикулярна к ее скорости.

Уравнения механики инвариантны по отношению к перемене знака у времени, т. е. по отношению к замене будущего прошедшим. Другими словами, в механике оба направления времени эквивалентны. Это значит, что если согласно уравнениям механики возможно какое-нибудь движение, то возможно и обратное движение, при котором система проходит те же состояния в обратном порядке.

Легко видеть, что то же самое имеет место и в электромагнитном поле в теории относительности. При этом, однако, вместе с заменой t на $-t$ надо изменить знак магнитного поля. Действительно, легко видеть, что уравнения движения (17,5) не меняются, если произвести замену

$$t\to -t,\quad \mathbf{E}\to\mathbf{E},\quad \mathbf{H}\to-\mathbf{H}. \tag{17,8}$$

При этом, согласно (17,3—4), скалярный потенциал не меняется, а векторный меняет знак:

$$\varphi\to\varphi,\quad \mathbf{A}\to-\mathbf{A}. \tag{17,9}$$

Таким образом, если в электромагнитном поле возможно некоторое движение, то возможно и обратное движение в поле с обратным направлением $\mathbf{H}$.

---

[1]) Под «кинетической» мы понимаем здесь и ниже энергию (9,4), включающую в себя энергию покоя.

Задача

Выразить ускорение частицы через ее скорость и напряженности электрического и магнитного полей.

Решение. Подставляем в уравнение движения (17,5) $\mathbf{p}=\mathbf{v}\mathscr{E}_{\text{кин}}/c^2$, а $d\mathscr{E}_{\text{кин}}/dt$ выражаем согласно (17,7). В результате найдем:

$$\dot{\mathbf{v}}=\frac{e}{m}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\left\{\mathbf{E}+\frac{1}{c}[\mathbf{vH}]-\frac{1}{c^2}\mathbf{v}(\mathbf{vE})\right\}.$$

§ 18. Калибровочная инвариантность

Рассмотрим теперь вопрос о том, насколько однозначно определены потенциалы поля. При этом следует учесть, что поле характеризуется тем действием, которое оно оказывает на движение находящихся в нем зарядов. Но в уравнения движения (17,5) входят не потенциалы, а напряженности поля $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$. Поэтому два поля физически тождественны, если они характеризуются одними и теми же векторами $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$.

Если заданы потенциалы $\mathbf{A}$ и φ, то этим, согласно (17,3) и (17,4), вполне однозначно определены $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$, а значит и поле. Однако одному и тому же полю могут соответствовать различные потенциалы. Чтобы убедиться в этом, прибавим к каждой компоненте потенциала A_k величину $-\partial f/\partial x^k$, где f — произвольная функция от координат и времени. Тогда потенциал A_k переходит в

$$A'_k=A_k-\frac{\partial f}{\partial x^k}. \tag{18,1}$$

При такой замене в интеграле действия (16,1) появится дополнительный член, представляющий собой полный дифференциал

$$\frac{e}{c}\frac{\partial f}{\partial x^k}dx^k=d\left(\frac{e}{c}f\right), \tag{18,2}$$

что не влияет на уравнения движения (см. I § 2).

Если вместо четырехмерного потенциала ввести векторный и скалярный и вместо координат x^i — координаты ct, x, y, z, то четыре равенства (18,1) можно написать в виде

$$\mathbf{A}'=\mathbf{A}+\operatorname{grad} f,$$
$$\varphi'=\varphi-\frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t}. \tag{18,3}$$

Легко убедиться в том, что электрическое и магнитное поля, определенные равенствами (17,3) и (17,4), действительно не изменяются при подстановке вместо $\mathbf{A}$ и φ потенциалов $\mathbf{A}'$ и φ', определенных согласно (18,3). Таким образом, преобразование потенциалов (18,1)

не изменяет поля. Потенциалы определены поэтому не однозначно— векторный потенциал определен с точностью до градиента произвольной функции и скалярный—с точностью до производной по времени от той же функции.

В частности, к векторному потенциалу можно прибавить любой постоянный вектор, а к скалярному потенциалу—любую постоянную. Это видно и непосредственно из того, что в определение **E** и **H** входят только производные от **A** и φ, и потому прибавление к последним постоянных не влияет на напряженности поля.

Физический смысл имеют лишь те величины, которые инвариантны по отношению к преобразованию потенциалов (18,3); поэтому все уравнения должны быть инвариантны по отношению к этому преобразованию. Эту инвариантность называют *калибровочной* или *градиентной* (по-немецки ее называют Eichinvarianz, по-английски— gauge invariance)[1]).

Описанная неоднозначность потенциалов дает всегда возможность выбрать их так, чтобы они удовлетворяли одному произвольному дополнительному условию,—одному, так как мы можем произвольно выбрать одну функцию f в (18,3). В частности, всегда можно выбрать потенциалы поля так, чтобы скалярный потенциал φ был равен нулю. Сделать же векторный потенциал равным нулю, вообще говоря, невозможно, так как условие $\mathbf{A}=0$ представляет собой три дополнительных условия (для трех компонент **A**).

§ 19. Постоянное электромагнитное поле

Постоянным электромагнитным полем мы называем поле, не зависящее от времени. Очевидно, что потенциалы постоянного поля можно выбрать так, чтобы они были функциями только от координат, но не от времени. Постоянное магнитное поле по-прежнему равно $\mathbf{H}=\operatorname{rot}\mathbf{A}$. Постоянное же электрическое поле

$$\mathbf{E}=-\operatorname{grad}\varphi. \tag{19,1}$$

Таким образом, постоянное электрическое поле определяется только скалярным потенциалом, а магнитное—векторным потенциалом.

Мы видели в предыдущем параграфе, что потенциалы поля определены не однозначно. Легко, однако, убедиться в том, что если описывать постоянное электромагнитное поле с помощью не зависящих от времени потенциалов, то к скалярному потенциалу можно прибавить, не изменяя поля, лишь произвольную постоянную (не

[1]) Подчеркием, что этот результат связан с подразумевающимся в (18,2) постоянством e. Таким образом, калибровочная инвариантность уравнений электродинамики и сохранение заряда тесно связаны друг с другом.

зависящую ни от координат, ни от времени). Обычно на φ накладывают еще дополнительное условие, требуя, чтобы он имел определенное значение в определенной точке пространства; чаще всего выбирают φ так, чтобы он был равен нулю на бесконечности. Тогда и упомянутая произвольная постоянная становится определенной, и скалярный потенциал постоянного поля, таким образом, становится вполне однозначным.

Напротив, векторный потенциал по-прежнему не однозначен даже для постоянного электромагнитного поля; к нему можно прибавить градиент любой функции координат.

Определим, чему равна энергия заряда в постоянном электромагнитном поле. Если поле постоянно, то и функция Лагранжа для заряда не зависит явно от времени. Как известно, в этом случае энергия сохраняется, совпадая с функцией Гамильтона.

Согласно (16,6) имеем:

$$\mathscr{E} = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + e\varphi. \tag{19,2}$$

Таким образом, вследствие наличия поля к энергии частицы прибавляется член $e\varphi$ — потенциальная энергия заряда в поле. Отметим существенное обстоятельство, что энергия зависит только от скалярного, но не от векторного потенциала. Другими словами, магнитное поле не влияет на энергию зарядов; энергию частицы может изменить только электрическое поле. Это связано с тем, что магнитное поле, в противоположность электрическому, не производит над зарядом работы.

Если напряженность поля во всех точках пространства одинакова, то поле называют *однородным*. Скалярный потенциал однородного электрического поля может быть выражен через напряженность поля согласно равенству

$$\varphi = -\mathbf{Er}. \tag{19,3}$$

Действительно, при $\mathbf{E} = \mathrm{const}$ имеем $\mathrm{grad}\,(\mathbf{Er}) = (\mathbf{E}\nabla)\,\mathbf{r} = \mathbf{E}$.

Векторный же потенциал однородного магнитного поля выражается через напряженность этого поля $\mathbf{H}$ в виде

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2}\,[\mathbf{Hr}]. \tag{19,4}$$

Действительно, при $\mathbf{H} = \mathrm{const}$ находим с помощью известных формул векторного анализа:

$$\mathrm{rot}\,[\mathbf{Hr}] = \mathbf{H}\,\mathrm{div}\,\mathbf{r} - (\mathbf{H}\nabla)\,\mathbf{r} = 2\mathbf{H}$$

(напомним, что $\mathrm{div}\,\mathbf{r} = 3$).

Векторный потенциал однородного магнитного поля можно выбрать и иначе, например в виде

$$A_x = -Hy, \quad A_y = A_z = 0 \tag{19,5}$$

(ось z выбрана вдоль направления $\mathbf{H}$). Легко убедиться, что и при таком выборе $\mathbf{A}$ имеет место равенство $\mathbf{H} = \operatorname{rot} \mathbf{A}$. В соответствии с формулами преобразования (18,3) потенциалы (19,4) и (19,5) отличаются друг от друга градиентом некоторой функции: (19,5) получается из (19,4) прибавлением ∇f, где $f = -xyH/2$.

Задача

Написать вариационный принцип для траектории частицы (принцип Мопертюи) в постоянном электромагнитном поле в релятивистской механике.

Решение. Принцип Мопертюи заключается в том, что если полная энергия частицы сохраняется (движение в постоянном поле), то ее траектория может быть определена из вариационного уравнения

$$\delta \int \mathbf{P}\, d\mathbf{r} = 0,$$

где $\mathbf{P}$ — обобщенный импульс частицы, выраженный через энергию и дифференциалы координат, а интеграл берется вдоль траектории частицы (см. I § 44). Подставляя $\mathbf{P} = \mathbf{p} + \frac{e}{c}\mathbf{A}$ и замечая, что направления $\mathbf{p}$ и $d\mathbf{r}$ совпадают, имеем:

$$\delta \int \left(p\, dl + \frac{e}{c} \mathbf{A}\, d\mathbf{r} \right) = 0,$$

где $dl = \sqrt{d\mathbf{r}^2}$ есть элемент дуги. Определяя p из $p^2 + m^2c^2 = (\mathcal{E} - e\varphi)^2/c^2$, находим окончательно:

$$\delta \int \left\{ \sqrt{\frac{1}{c^2} (\mathcal{E} - e\varphi)^2 - m^2c^2}\, dl + \frac{e}{c} \mathbf{A}\, d\mathbf{r} \right\} = 0.$$

§ 20. Движение в постоянном однородном электрическом поле

Рассмотрим движение заряда e в однородном постоянном электрическом поле $\mathbf{E}$. Направление поля примем за ось x. Движение будет, очевидно, происходить в одной плоскости, которую выберем за плоскость xy. Тогда уравнения движения (17,5) примут вид

$$\dot{p}_x = eE, \quad \dot{p}_y = 0$$

(точка над буквой обозначает дифференцирование по t), откуда

$$p_x = eEt, \quad p_y = p_0. \tag{20,1}$$

Начало отсчета времени мы выбрали в тот момент, когда $p_x = 0$; p_0 есть импульс частицы в этот момент.

Кинетическая энергия частицы (энергия без потенциальной энергии в поле) равна $\mathcal{E}_{\text{кин}} = c\sqrt{m^2c^2 + p^2}$. Подставляя сюда (20,1), находим в нашем случае:

$$\mathcal{E}_{\text{кин}} = \sqrt{m^2c^4 + c^2p_0^2 + (ceEt)^2} = \sqrt{\mathcal{E}_0^2 + (ceEt)^2}, \qquad (20,2)$$

где $\mathcal{E}_0$ — энергия при $t = 0$.

Согласно (9,8) скорость частицы $\mathbf{v} = \mathbf{p}c^2/\mathcal{E}_{\text{кин}}$. Для скорости $v_x = \dot{x}$ имеем, следовательно:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{p_x c^2}{\mathcal{E}_{\text{кин}}} = \frac{c^2 eEt}{\sqrt{\mathcal{E}_0^2 + (ceEt)^2}}.$$

Интегрируя, находим:

$$x = \frac{1}{eE}\sqrt{\mathcal{E}_0^2 + (ceEt)^2} \qquad (20,3)$$

(постоянную интегрирования полагаем равной нулю)[1]).

Для определения y имеем:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{p_y c^2}{\mathcal{E}_{\text{кин}}} = \frac{p_0 c^2}{\sqrt{\mathcal{E}_0^2 + (ceEt)^2}},$$

откуда

$$y = \frac{p_0 c}{eE} \operatorname{Arsh} \frac{ceEt}{\mathcal{E}_0}. \qquad (20,4)$$

Уравнение траектории находим, выражая из (20,4) t через y и подставляя в (20,3). Это дает:

$$x = \frac{\mathcal{E}_0}{eE} \operatorname{ch} \frac{eEy}{p_0 c}. \qquad (20,5)$$

Таким образом, заряд движется в однородном электрическом поле по цепной линии.

Если скорость частицы $v \ll c$, то можно положить $p_0 = mv_0$, $\mathcal{E}_0 = mc^2$; разлагая (20,5) по степеням $1/c$, получим, с точностью до членов высшего порядка:

$$x = \frac{eE}{2mv_0^2} y^2 + \text{const},$$

т. е. заряд движется по параболе,— результат, хорошо известный из классической механики.

[1]) Этот результат (при $p_0 = 0$) совпадает с решением задачи о релятивистском движении с постоянным «собственным ускорением» $w_0 = eE/m$ (см. задачу к § 7). Постоянство этого ускорения связано в данном случае с тем, что электрическое поле не меняется при преобразованиях Лоренца со скоростями $\mathbf{V}$, направленными вдоль поля (см. § 24).

§ 21. Движение в постоянном однородном магнитном поле

Рассмотрим теперь движение заряда e в однородном магнитном поле $\mathbf{H}$. Направление поля выберем за ось z. Уравнения движения

$$\dot{\mathbf{p}} = \frac{e}{c}[\mathbf{vH}]$$

мы перепишем в другом виде, подставив вместо импульса

$$\mathbf{p} = \frac{\mathscr{E}\mathbf{v}}{c^2},$$

где $\mathscr{E}$ — энергия частицы, которая в магнитном поле постоянна. Уравнения движения приобретают тогда вид

$$\frac{\mathscr{E}}{c^2}\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{e}{c}[\mathbf{vH}] \tag{21,1}$$

или, в компонентах,

$$\dot{v}_x = \omega v_y, \quad \dot{v}_y = -\omega v_x, \quad \dot{v}_z = 0, \tag{21,2}$$

где мы ввели обозначение

$$\omega = \frac{ecH}{\mathscr{E}}. \tag{21,3}$$

Умножим второе из уравнений (21,2) на i и сложим с первым:

$$\frac{d}{dt}(v_x + iv_y) = -i\omega(v_x + iv_y),$$

откуда

$$v_x + iv_y = ae^{-i\omega t},$$

где a — комплексная постоянная. Ее можно написать в виде $a = v_{0t}e^{-i\alpha}$, где v_{0t} и α вещественны. Тогда

$$v_x + iv_y = v_{0t}e^{-i(\omega t + \alpha)},$$

и, отделяя действительную и мнимую части, находим:

$$v_x = v_{0t}\cos(\omega t + \alpha), \quad v_y = -v_{0t}\sin(\omega t + \alpha). \tag{21,4}$$

Постоянные v_{0t} и α определяются начальными условиями, α есть начальная фаза; что же касается v_{0t}, то из (21,4) видно, что

$$v_{0t} = \sqrt{v_x^2 + v_y^2},$$

т. е. v_{0t} есть скорость частицы в плоскости xy, остающаяся при движении постоянной.

Из (21,4) находим, интегрируя еще раз:

$$x = x_0 + r\sin(\omega t + \alpha), \quad y = y_0 + r\cos(\omega t + \alpha), \tag{21,5}$$

где

$$r=\frac{v_{0t}}{\omega}=\frac{v_{0t}\mathcal{E}}{ecH}=\frac{cp_t}{eH} \tag{21,6}$$

(p_t — проекция импульса на плоскость xy). Из третьего уравнения (21,2) находим $v_z=v_{0z}$ и

$$z=z_0+v_{0z}t. \tag{21,7}$$

Из (21,5) и (21,7) видно, что заряд движется в однородном магнитном поле по винтовой линии с осью вдоль магнитного поля и с радиусом r, определяемым (21,6). Скорость частицы при этом постоянна по величине. В частном случае, когда $v_{0z}=0$, т. е. заряд не имеет скорости вдоль поля, он движется по окружности в плоскости, перпендикулярной к полю.

Величина ω, как видно из формул, есть циклическая частота вращения частицы в плоскости, перпендикулярной к полю.

Если скорость частицы мала, то мы можем приближенно положить $\mathcal{E}=mc^2$. Тогда частота ω превращается в

$$\omega=\frac{eH}{mc}. \tag{21,8}$$

Предположим теперь, что магнитное поле, оставаясь однородным, медленно изменяется по величине и направлению. Выясним, как меняется при этом движение заряженной частицы.

Как известно, при медленном изменении условий движения остаются постоянными так называемые адиабатические инварианты. Поскольку движение в плоскости, перпендикулярной к магнитному полю, периодично, то адиабатическим инвариантом является интеграл $I=\frac{1}{2\pi}\oint \mathbf{P}_t\,d\mathbf{r}$, взятый по полному периоду движения, в данном случае по окружности ($\mathbf{P}_t$ — проекция обобщенного импульса на указанную плоскость)[1]). Подставляя $\mathbf{P}_t=\mathbf{p}_t+\frac{e}{c}\mathbf{A}$, имеем:

$$I=\frac{1}{2\pi}\oint \mathbf{P}_t\,d\mathbf{r}=\frac{1}{2\pi}\oint \mathbf{p}_t\,d\mathbf{r}+\frac{e}{2\pi c}\oint \mathbf{A}\,d\mathbf{r}.$$

---

[1]) См. I § 49. Адиабатическими инвариантами являются вообще интегралы $\oint p\,dq$, взятые по периоду изменения данной координаты q. В рассматриваемом случае периоды по двум координатам — в плоскости, перпендикулярной $\mathbf{H}$, — совпадают и написанный интеграл I представляет собой сумму двух соответствующих адиабатических инвариантов. Однако каждый из этих инвариантов в отдельности не имеет особого смысла, так как зависит от неоднозначного выбора векторного потенциала поля. Проистекающая отсюда неоднозначность адиабатических инвариантов отражает тот факт, что, рассматривая магнитное поле как однородное во всем пространстве, в принципе нельзя определить возникающее вследствие переменности $\mathbf{H}$ электрическое поле, зависящее в действительности от конкретных условий на бесконечности.

В первом члене замечаем, что $\mathbf{p}_t$ постоянно по абсолютной величине и направлено по $d\mathbf{r}$; ко второму применяем теорему Стокса и заменяем $\operatorname{rot}\mathbf{A}=\mathbf{H}$:

$$I = rp_t + \frac{e}{2c}Hr^2,$$

где r — радиус орбиты. Подставляя в это равенство выражение для r (21,6), находим:

$$I = \frac{3cp_t^2}{2eH}. \qquad (21,9)$$

Отсюда видно, что при медленном изменении H поперечный импульс p_t меняется пропорционально $\sqrt{H}$.

Этот результат можно применить и к другому случаю — когда частица движется по винтовой линии в постоянном, но не вполне однородном магнитном поле (поле мало меняется на расстояниях, сравнимых с радиусом и шагом винтовой орбиты). Такое движение можно рассматривать как движение по круговой орбите, смещающейся с течением времени, а по отношению к этой орбите поле как бы меняется со временем, оставаясь однородным. Тогда можно утверждать, что поперечная (по отношению к направлению поля) компонента импульса меняется по закону $p_t=\sqrt{CH}$, где C — постоянная, а H — заданная функция координат. С другой стороны, как и при движении во всяком постоянном магнитном поле, энергия частицы (а с нею и квадрат ее импульса p^2) остается постоянной. Поэтому продольная компонента импульса меняется по закону

$$p_l^2 = p^2 - p_t^2 = p^2 - CH(x,\ y,\ z). \qquad (21,10)$$

Поскольку всегда должно быть $p_l^2 \geqslant 0$, то отсюда видно, что проникновение частицы в области достаточно сильного поля ($CH > p^2$) оказывается невозможным. При движении в направлении увеличивающегося поля радиус винтовой траектории убывает пропорционально p_t/H (т. е. пропорционально $1/\sqrt{H}$), а ее шаг — пропорционально p_l. При достижении границы, на которой p_l обращается в нуль, частица отражается от нее: продолжая вращаться в прежнем направлении, она начинает двигаться против градиента поля.

Неоднородность поля приводит также и к другому явлению — медленному поперечному смещению *(дрейфу)* ведущего центра винтовой траектории частицы (так называют в этой связи центр круговой орбиты); этому вопросу посвящена задача 3 к следующему параграфу.

Задача

Определить частоты колебаний заряженного пространственного осциллятора, находящегося в постоянном однородном магнитном поле; собственная частота колебаний осциллятора (при отсутствии поля) равна ω_0.

Решение. Уравнения вынужденных колебаний осциллятора в магнитном поле (направленном вдоль оси z) имеют вид

$$\ddot{x}+\omega_0^2 x=\frac{eH}{mc}\dot{y}, \quad \ddot{y}+\omega_0^2 y=-\frac{eH}{mc}\dot{x}, \quad \ddot{z}+\omega_0^2 z=0.$$

Умножая второе уравнение на i и складывая с первым, получаем:

$$\ddot{\xi}+\omega_0^2\xi=-i\frac{eH}{mc}\dot{\xi},$$

где $\xi=x+iy$. Отсюда находим, что частоты колебаний осциллятора в плоскости, перпендикулярной к полю, равны

$$\omega=\sqrt{\omega_0^2+\frac{1}{4}\left(\frac{eH}{mc}\right)^2}\pm\frac{eH}{2mc}.$$

Если поле H мало, то эта формула переходит в

$$\omega=\omega_0\pm\frac{eH}{2mc}.$$

Колебания вдоль направления поля остаются неизменными.

§ 22. Движение заряда в постоянных однородных электрическом и магнитном полях

Наконец, рассмотрим движение заряда в случае одновременного наличия однородных и постоянных электрического и магнитного полей. Мы ограничимся при этом нерелятивистским случаем, когда скорость заряда $v \ll c$, и потому его импульс $\mathbf{p}=m\mathbf{v}$; как мы увидим ниже, для этого необходимо, чтобы электрическое поле было мало по сравнению с магнитным.

Направление $\mathbf{H}$ выберем за ось z, а плоскость, проходящую через векторы $\mathbf{H}$ и $\mathbf{E}$, за плоскость yz. Тогда уравнения движения

$$m\dot{\mathbf{v}}=e\mathbf{E}+\frac{e}{c}[\mathbf{vH}]$$

напишутся в виде

$$m\ddot{x}=\frac{e}{c}\dot{y}H,$$
$$m\ddot{y}=eE_y-\frac{e}{c}\dot{x}H, \qquad (22,1)$$
$$m\ddot{z}=eE_z.$$

Из третьего из этих уравнений видно, что вдоль оси z заряд движется равномерно-ускоренно, т. е.

$$z=\frac{eE_z}{2m}t^2+v_{0z}t. \qquad (22,2)$$

Умножая второе из уравнений (22,1) на i и складывая с первым, находим:

$$\frac{d}{dt}(\dot{x}+i\dot{y})+i\omega(\dot{x}+i\dot{y})=i\frac{e}{m}E_y$$

($\omega = eH/mc$). Интеграл этого уравнения, где $\dot{x}+i\dot{y}$ рассматривается как неизвестное, равен сумме интеграла этого же уравнения без правой части и частного интеграла уравнения с правой частью. Первый из них есть $ae^{-i\omega t}$, второй равен $eE_y/m\omega = cE_y/H$. Таким образом,

$$\dot{x}+i\dot{y} = ae^{-i\omega t}+\frac{cE_y}{H}.$$

Постоянная a, вообще говоря, комплексная. Написав ее в виде $a = be^{i\alpha}$ с действительными b и α, мы видим, что поскольку a умножается на $e^{-i\omega t}$, то, выбирая соответствующим образом начало отсчета времени, мы можем придать фазе α любое значение. Выберем ее так, чтобы a было действительно. Тогда, отделяя в $\dot{x}+i\dot{y}$ мнимую и действительную части, находим:

$$\dot{x} = a\cos\omega t + c\frac{E_y}{H}, \quad \dot{y} = -a\sin\omega t. \tag{22,3}$$

При этом в момент времени $t = 0$ скорость направлена по оси x. Мы видим, что компоненты скорости частицы являются периодическими функциями времени; их средние значения равны

$$\overline{\dot{x}} = \frac{cE_y}{H}, \quad \overline{\dot{y}} = 0.$$

Эту среднюю скорость движения заряда в скрещенных электрическом и магнитном полях часто называют скоростью электрического *дрейфа*. Ее направление перпендикулярно к обоим полям и не зависит от знака заряда. В векторном виде ее можно записать как

$$\overline{\mathbf{v}} = \frac{c\,[\mathbf{EH}]}{H^2}. \tag{22,4}$$

Все формулы этого параграфа применимы, если скорость частицы мала по сравнению со скоростью света; мы видим, что для этого требуется, в частности, чтобы электрическое и магнитное поля удовлетворяли условию

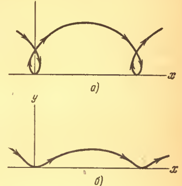
$$\frac{E_y}{H} \ll 1, \tag{22,5}$$

абсолютные же величины E_y и H могут быть произвольными.

Интегрируя еще раз уравнения (22,3) и выбирая постоянные интегрирования так, чтобы при $t = 0$ было $x = y = 0$, получаем:

$$\begin{aligned} x &= \frac{a}{\omega}\sin\omega t + \frac{cE_y}{H}t, \\ y &= \frac{a}{\omega}(\cos\omega t - 1). \end{aligned} \tag{22,6}$$

Рассматриваемые как параметрические уравнения кривой, эти уравнения определяют собой так называемую трохоиду. В зависимости от того, больше или меньше абсолютная величина a, чем абсолютная величина cE_y/H, проекция траектории частицы на плоскость xy имеет вид, изображенный соответственно на рис. 6, *а* и рис. 6, *б*.



Если $a = -cE_y/H$, то (22,6) переходит в

$$x = \frac{cE_y}{\omega H}(\omega t - \sin \omega t),$$
$$y = \frac{cE_y}{\omega H}(1 - \cos \omega t), \tag{22,7}$$

т. е. проекция траектории на плоскость xy является циклоидой (рис. 6, *в*).

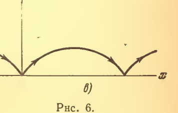


Рис. 6.

Задача

1. Определить релятивистское движение заряда в параллельных однородных электрическом и магнитном полях.

Решение. Магнитное поле не влияет на движение вдоль совместного направления **E** и **H** (ось z), которое происходит, следовательно, под действием одного лишь электрического поля; поэтому согласно § 20 находим:

$$z = \frac{\mathscr{E}_{\text{кин}}}{eE}, \qquad \mathscr{E}_{\text{кин}} = \sqrt{\mathscr{E}_0^2 + (ceEt)^2}.$$

Для движения в плоскости xy имеем уравнение

$$\dot{p}_x = \frac{e}{c} H v_y, \qquad \dot{p}_y = -\frac{e}{c} H v_x,$$

или

$$\frac{d}{dt}(p_x + ip_y) = -i\frac{eH}{c}(v_x + iv_y) = -\frac{ie\,Hc}{\mathscr{E}_{\text{кин}}}(p_x + ip_y).$$

Отсюда

$$p_x + ip_y = p_t e^{-i\varphi},$$

где p_t — постоянное значение проекции импульса на плоскость xy, а вспомогательная величина φ введена согласно соотношению

$$d\varphi = e\,Hc\frac{dt}{\mathscr{E}_{\text{кин}}},$$

откуда

$$ct = \frac{\mathscr{E}_0}{eE}\operatorname{sh}\frac{E}{H}\varphi. \tag{1}$$

Далее имеем:

$$p_x + ip_y = p_t e^{-i\varphi} = \frac{\mathcal{E}_{\text{кин}}}{c^2}(\dot{x} + i\dot{y}) = \frac{eH}{c}\frac{d(x+iy)}{d\varphi},$$

откуда

$$x = \frac{cp_t}{eH}\sin\varphi, \qquad y = \frac{cp_t}{eH}\cos\varphi. \tag{2}$$

Формулы (1—2) вместе с формулой

$$z = \frac{\mathcal{E}_0}{eE}\operatorname{ch}\frac{E}{H}\varphi \tag{3}$$

определяют в параметрическом виде движение частицы. Траектория представляет собой винтовую линию с радиусом cp_t/eH и монотонно возрастающим шагом, по которой частица движется с убывающей угловой скоростью $\dot{\varphi} = eHc/\mathcal{E}_{\text{кин}}$ и стремящейся к c скоростью вдоль оси z.

2. Определить релятивистское движение заряда во взаимно перпендикулярных и равных по величине электрическом и магнитном полях [1]).

Решение. Выбирая ось z вдоль направления **H**, а ось y — в направлении **E** и положив $E = H$, напишем уравнения движения:

$$\frac{dp_x}{dt} = \frac{e}{c}Ev_y, \qquad \frac{dp_y}{dt} = eE\left(1 - \frac{v_x}{c}\right), \qquad \frac{dp_z}{dt} = 0$$

и, как их следствие, уравнение (17,7)

$$\frac{d\mathcal{E}_{\text{кин}}}{dt} = eEv_y.$$

Из этих уравнений имеем:

$$p_z = \text{const}, \qquad \mathcal{E}_{\text{кин}} - cp_x = \text{const} \equiv \alpha.$$

Используя также равенство

$$\mathcal{E}_{\text{кин}}^2 - c^2p_x^2 = (\mathcal{E}_{\text{кин}} + cp_x)(\mathcal{E}_{\text{кин}} - cp_x) = c^2p_y^2 + \varepsilon^2$$

(где $\varepsilon^2 = m^2c^4 + c^2p_z^2 = \text{const}$), находим:

$$\mathcal{E}_{\text{кин}} + cp_x = \frac{1}{\alpha}(c^2p_y^2 + \varepsilon^2),$$

и затем

$$\mathcal{E}_{\text{кин}} = \frac{\alpha}{2} + \frac{c^2p_y^2 + \varepsilon^2}{2\alpha},$$

$$p_x = -\frac{\alpha}{2c} + \frac{c^2p_y^2 + \varepsilon^2}{2\alpha c}.$$

Далее пишем:

$$\mathcal{E}_{\text{кин}}\frac{dp_y}{dt} = eE\left(\mathcal{E}_{\text{кин}} - \frac{\mathcal{E}_{\text{кин}}v_x}{c}\right) = eE(\mathcal{E}_{\text{кин}} - cp_x) = eE\alpha,$$

[1]) Задача о движении во взаимно перпендикулярных, но не одинаковых по величине полях **E** и **H** надлежащим преобразованием системы отсчета сводится к задаче о движении в чисто электрическом или чисто магнитном поле (см. § 25).

откуда

$$2eEt = \left(1+\frac{\varepsilon^2}{\alpha^2}\right)p_y + \frac{c^2}{3\alpha^2}\,p_y^3. \tag{1}$$

Для определения траектории в уравнениях

$$\frac{dx}{dt} = \frac{c^2 p_x}{\mathscr{E}_{\text{кин}}}, \ \ldots$$

переходим к переменной p_y согласно $dt = \mathscr{E}_{\text{кин}}\,dp_y/eE\alpha$, после чего интегрирование приводит к формулам:

$$x = \frac{c}{2eE}\left(-1+\frac{\varepsilon^2}{\alpha^2}\right)p_y + \frac{c^3}{6\alpha^2 eE}\,p_y^3,$$
$$y = \frac{c^2}{2\alpha\, eE}\,p_y^2, \qquad z = \frac{p_z c^2}{eE\alpha}\,p_y. \tag{2}$$

Формулы (1) и (2) полностью определяют в параметрическом виде (параметр p_y) движение частицы. Обратим внимание на то, что наиболее быстро возрастает скорость движения в направлении, перпендикулярном **E** и **H** (ось x).

3. Определить скорость дрейфа ведущего центра орбиты нерелятивистской заряженной частицы в квазиоднородном постоянном магнитном поле (*X. Альфвен*, 1940).

Решение. Предположим сначала, что частица движется по круговой орбите, т. е. ее скорость не имеет продольной (вдоль поля) составляющей. Представим уравнение траектории частицы в виде $\mathbf{r} = \mathbf{R}(t) + \boldsymbol{\zeta}(t)$, где $\mathbf{R}(t)$ — радиус-вектор ведущего центра (медленно меняющаяся функция времени), а $\boldsymbol{\zeta}(t)$ — быстро осциллирующая величина, изображающая вращательное движение вокруг ведущего центра. Усредним действующую на частицу силу $\frac{e}{c}[\dot{\mathbf{r}}\mathbf{H}(\mathbf{r})]$ по периоду осцилляционного (кругового) движения (ср. I § 30). Входящую в нее функцию $\mathbf{H}(\mathbf{r})$ разложим по степеням $\boldsymbol{\zeta}$:

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \mathbf{H}(\mathbf{R}) + (\boldsymbol{\zeta}\nabla)\,\mathbf{H}(\mathbf{R}).$$

При усреднении члены первого порядка по осциллирующей величине $\boldsymbol{\zeta}(t)$ обращаются в нуль, а член второго порядка приводит к появлению дополнительной силы

$$\mathbf{f} = \frac{e}{c}\,\overline{[\dot{\boldsymbol{\zeta}}(\boldsymbol{\zeta}\nabla)\,\mathbf{H}]}.$$

Для кругового движения

$$\dot{\boldsymbol{\zeta}} = \omega[\boldsymbol{\zeta}\mathbf{n}], \qquad \zeta = \frac{v_\perp}{\omega},$$

где $\mathbf{n}$ — единичный вектор в направлении **H**; частота $\omega = eH/mc$; $v_\perp$ — скорость частицы в ее круговом движении. Среднее значение произведений компонент вектора $\boldsymbol{\zeta}$, вращающегося в плоскости (плоскость, перпендикулярная к $\mathbf{n}$):

$$\overline{\zeta_\alpha \zeta_\beta} = \frac{1}{2}\,\zeta^2 \delta_{\alpha\beta},$$

где $\delta_{\alpha\beta}$ — единичный тензор в этой плоскости. В результате получим:

$$\mathbf{f} = -\frac{mv_\perp^2}{2H}\,[[\mathbf{n}\nabla]\,\mathbf{H}].$$

В силу уравнений $\operatorname{div}\mathbf{H}=0$, $\operatorname{rot}\mathbf{H}=0$, которым удовлетворяет постоянное поле $\mathbf{H}(\mathbf{R})$, имеем:

$$[[\mathbf{n}\nabla]\,\mathbf{H}]=-\mathbf{n}\operatorname{div}\mathbf{H}+(\mathbf{n}\nabla)\,\mathbf{H}+\mathbf{n}\operatorname{rot}\mathbf{H}=(\mathbf{n}\nabla)\,\mathbf{H}=H\,(\mathbf{n}\nabla)\,\mathbf{n}+\mathbf{n}\,(\mathbf{n}\nabla\mathbf{H}).$$

Нас интересует поперечная (по отношению к $\mathbf{n}$) сила, приводящая к смещению орбиты; она равна

$$\mathbf{f}=-\frac{mv_\perp^2}{2}(\mathbf{n}\nabla)\,\mathbf{n}=\frac{mv_\perp^2}{2\rho}\boldsymbol{\nu},$$

где ρ — радиус кривизны силовой линии поля в данной точке, а $\boldsymbol{\nu}$ — единичный вектор, направленный от центра кривизны к этой точке.

Случай, когда частица обладает также и продольной (вдоль $\mathbf{n}$) скоростью $v_\parallel$, сводится к предыдущему, если перейти к системе отсчета, вращающейся вокруг мгновенного центра кривизны силовой линии (траектории ведущего центра) с угловой скоростью $v_\parallel/\rho$. В этой системе частица не имеет продольной скорости, но появляется дополнительная поперечная сила — центробежная сила, равная $\boldsymbol{\nu}mv_\parallel^2/\rho$. Таким образом, полная поперечная сила:

$$\mathbf{f}_\perp=\boldsymbol{\nu}\frac{m}{\rho}\left(v_\parallel^2+\frac{v_\perp^2}{2}\right).$$

Эта сила эквивалентна постоянному электрическому полю с напряженностью $\mathbf{f}_\perp/e$. Согласно (22,4) она вызывает дрейф ведущего центра орбиты со скоростью

$$\mathbf{v}_d=\frac{1}{\omega\rho}\left(v_\parallel^2+\frac{v_\perp^2}{2}\right)[\boldsymbol{\nu}\mathbf{n}].$$

Знак этой скорости зависит от знака заряда.

§ 23. Тензор электромагнитного поля

В § 17 мы вывели уравнения движения заряда в поле, исходя из функции Лагранжа (16,4), написанной в трехмерном виде. Выведем теперь те же уравнения непосредственно из действия (16,1), написанного в четырехмерных обозначениях.

Принцип наименьшего действия гласит

$$\delta S=\delta\int_a^b\left(-mc\,ds-\frac{e}{c}A_i\,dx^i\right)=0. \qquad (23,1)$$

Замечая, что $ds=\sqrt{dx_i\,dx^i}$, находим (пределы интегрирования a и b мы будем ниже для краткости опускать):

$$\delta S=-\int\left(mc\,\frac{dx_i\,d\delta x^i}{ds}+\frac{e}{c}A_i\,d\delta x^i+\frac{e}{c}\delta A_i\,dx^i\right)=0.$$

Первые два члена в подынтегральном выражении проинтегрируем по частям. Кроме того, в первом члене введем 4-скорость $dx_i/ds = u_i$. Тогда

$$\int \left(mc\, du_i \delta x^i + \frac{e}{c} \delta x^i\, dA_i - \frac{e}{c} \delta A_i\, dx^i \right) - \left(mcu_i + \frac{e}{c} A_i \right) \delta x^i \bigg| = 0. \tag{23,2}$$

Второй член этого равенства равен нулю, так как интеграл варьируется при заданных значениях координат на пределах. Далее,

$$\delta A_i = \frac{\partial A_i}{\partial x^k} \delta x^k, \qquad dA_i = \frac{\partial A_i}{\partial x^k} dx^k,$$

и поэтому

$$\int \left(mc\, du_i \delta x^i + \frac{e}{c} \frac{\partial A_i}{\partial x^k} \delta x^i\, dx^k - \frac{e}{c} \frac{\partial A_i}{\partial x^k} dx^i \delta x^k \right) = 0.$$

Напишем в первом члене $du_i = \frac{du_i}{ds} ds$, во втором и третьем $dx^i = u^i ds$. Кроме того, в третьем члене поменяем местами индексы i и k (это ничего не изменит, так как по значкам i и k производится суммирование). Тогда

$$\int \left[mc \frac{du_i}{ds} - \frac{e}{c} \left(\frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k} \right) u^k \right] \delta x^i\, ds = 0.$$

Ввиду произвольности δx^i отсюда следует, что подынтегральное выражение равно нулю:

$$mc \frac{du_i}{ds} = \frac{e}{c} \left(\frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k} \right) u^k.$$

Введем обозначение:

$$F_{ik} = \frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k}. \tag{23,3}$$

Антисимметричный тензор F_{ik} называется *тензором электромагнитного поля.* Тогда полученное уравнение напишется в виде:

$$mc \frac{du^i}{ds} = \frac{e}{c} F^{ik} u_k. \tag{23,4}$$

Это — уравнение движения заряда в четырехмерной форме.

Смысл отдельных компонент тензора F_{ik} легко выяснить, подставив значения $A_i = (\varphi, \ -\mathbf{A})$ в определение (23,3). Результат можно записать в виде таблицы, в которой индекс $i = 0, 1, 2, 3$ нумерует строки, а индекс k — столбцы:

$$F_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -H_z & H_y \\ -E_y & H_z & 0 & -H_x \\ -E_z & -H_y & H_x & 0 \end{pmatrix}, \quad F^{ik} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -H_z & H_y \\ E_y & H_z & 0 & -H_x \\ E_z & -H_y & H_x & 0 \end{pmatrix}. \tag{23,5}$$

Короче, можно написать (см. § 6):

$$F_{ik} = (\mathbf{E}, \mathbf{H}), \qquad F^{ik} = (-\mathbf{E}, \mathbf{H}).$$

Таким образом, компоненты напряженностей электрического и магнитного полей являются компонентами одного 4-тензора электромагнитного поля.

Переходя к трехмерным обозначениям, легко убедиться в том, что три пространственные компоненты ($i = 1, 2, 3$) уравнения (23,4) тождественны с векторным уравнением движения (17,5), а временная компонента ($i = 0$) — с уравнением работы (17,7). Последнее есть следствие уравнения движения; тот факт, что из четырех уравнений (23,4) только три независимы, можно легко обнаружить также и непосредственно, умножив обе стороны (23,4) на u^i. Тогда левая сторона равенства обратится в нуль ввиду ортогональности 4-векторов u^i и du_i/ds, а правая сторона — ввиду антисимметричности тензора F_{ik}.

Если рассматривать в вариации δS только истинные траектории, то первый член в (23,2) тождественно обратится в нуль. Тогда второй член, в котором верхний предел рассматривается как переменный, дает дифференциал действия как функции координат. Таким образом,

$$\delta S = -\left(mcu_i + \frac{e}{c} A_i\right) \delta x^i. \tag{23,6}$$

Отсюда

$$-\frac{\partial S}{\partial x^i} = mcu_i + \frac{e}{c} A_i = p_i + \frac{e}{c} A_i. \tag{23,7}$$

4-вектор $-\partial S/\partial x^i$ есть 4-вектор обобщенного импульса частицы P_i. Подставляя значения компонент p_i и A_i, найдем, что

$$P^i = \left(\frac{\mathcal{E}_{\text{кин}} + e\varphi}{c}, \quad \mathbf{p} + \frac{e}{c}\mathbf{A}\right). \tag{23,8}$$

Как и следовало, пространственные компоненты 4-вектора образуют трехмерный вектор обобщенного импульса (16,5), а временная компонента есть $\mathcal{E}/c$, где $\mathcal{E}$ — полная энергия заряда в поле.

§ 24. Преобразование Лоренца для поля

Напишем формулы преобразования для поля, т. е. формулы, по которым можно определить поле в одной инерциальной системе отсчета, зная это же поле в другой системе.

Формулы преобразования для потенциалов находятся непосредственно из общих формул преобразования 4-вектора (6,1). Помня,

что $A^i = (\varphi, \mathbf{A})$, находим:

$$\varphi = \frac{\varphi' + \frac{V}{c} A'_x}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \qquad A_x = \frac{A'_x + \frac{V}{c}\varphi'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad A_y = A'_y, \quad A_z = A'_z. \qquad (24,1)$$

Формулы преобразования для антисимметричного 4-тензора 2-го ранга (каковым является тензор F^{ik}) найдены в задаче 2 к § 6: компоненты F^{23} и F^{01} не меняются при преобразовании, а компоненты F^{02}, F^{03} и F^{12}, F^{13} преобразуются соответственно как x^0 и x^1. Выразив компоненты тензора F^{ik} через компоненты полей $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ согласно (23,5), получим следующие формулы преобразования для электрического поля

$$E_x = E'_x, \quad E_y = \frac{E'_y + \frac{V}{c} H'_z}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad E_z = \frac{E'_z - \frac{V}{c} H'_y}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \qquad (24,2)$$

и для магнитного поля

$$H_x = H'_x, \quad H_y = \frac{H'_y - \frac{V}{c} E'_z}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad H_z = \frac{H'_z + \frac{V}{c} E'_y}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}. \qquad (24,3)$$

Таким образом, электрическое и магнитное поля, как и большинство физических величин, относительны, т. е. их свойства различны в разных системах отсчета. В частности, электрическое или магнитное поле может быть равно нулю в одной системе отсчета и в то же время присутствовать в другой системе.

Формулы преобразования (24,2—3) значительно упрощаются для случая $V \ll c$. С точностью до членов порядка V/c имеем:

$$E_x = E'_x, \quad E_y = E'_y + \frac{V}{c} H'_z, \; E_z = E'_z - \frac{V}{c} H'_y;$$

$$H_x = H'_x, \quad H_y = H'_y - \frac{V}{c} E'_z, \quad H_z = H'_z + \frac{V}{c} E'_y.$$

Эти формулы могут быть написаны в векторном виде:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}' + \frac{1}{c}[\mathbf{H}'\mathbf{V}], \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}' - \frac{1}{c}[\mathbf{E}'\mathbf{V}]. \qquad (24,4)$$

Формулы обратного преобразования от K' к K получаются из (24,2—4) перестановкой штриха и изменением знака у V.

Если в системе K' магнитное поле $\mathbf{H}'=0$, то, согласно (24,2—3), между электрическим и магнитным полями в системе K существует соотношение

$$\mathbf{H}=\frac{1}{c}[\mathbf{VE}]. \qquad (24,5)$$

Если же в K' поле $\mathbf{E}'=0$, то в системе K

$$\mathbf{E}=-\frac{1}{c}[\mathbf{VH}]. \qquad (24,6)$$

В обоих случаях, следовательно, в системе K магнитные и электрические поля взаимно перпендикулярны.

Эти формулы имеют, разумеется, и обратный смысл: если в некоторой системе отсчета K поля $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ взаимно перпендикулярны (но не равны по величине), то существует такая система K', в которой поле чисто электрическое или чисто магнитное. Скорость $\mathbf{V}$ этой системы (по отношению к K) перпендикулярна к $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ и по величине равна в первом случае cH/E (причем должно быть $H<E$), а во втором случае cE/H (причем $E<H$).

§ 25. Инварианты поля

Из векторов напряженностей электрического и магнитного полей можно составить инвариантные величины, остающиеся неизменными при преобразованиях от одной инерциальной системы отсчета к другой.

Вид этих инвариантов легко найти исходя из четырехмерного представления поля с помощью антисимметричного 4-тензора F^{ik}. Очевидно, что из компонент этого тензора можно составить следующие инвариантные величины:

$$F_{ik}F^{ik}=\text{inv}, \qquad (25,1)$$

$$e^{iklm}F_{ik}F_{lm}=\text{inv}, \qquad (25,2)$$

где e^{iklm} — совершенно антисимметричный единичный тензор (см. § 6). Первая из этих величин — истинный скаляр, а вторая — псевдоскаляр (произведение тензора F^{ik} на дуальный ему тензор) [1]).

Выражая компоненты F^{ik} через компоненты $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ согласно (23,5), легко убедиться в том, что в трехмерной форме эти

---

[1]) Отметим также, что псевдоскаляр (25,2) может быть представлен в виде 4-дивергенции:

$$e^{iklm}F_{ik}F_{lm}=4\frac{\partial}{\partial x^l}\left(e^{iklm}A_k\frac{\partial}{\partial x^l}A_m\right),$$

в чем легко убедиться, учитывая антисимметричность e^{iklm}.

инварианты имеют вид:

$$H^2 - E^2 = \text{inv}, \tag{25,3}$$

$$\mathbf{EH} = \text{inv}. \tag{25,4}$$

Псевдоскалярность второго из них очевидна из того, что он представляет собой произведение полярного вектора **E** на аксиальный вектор **H** (квадрат же $(\mathbf{EH})^2$ будет истинным скаляром).

Из инвариантности приведенных двух выражений вытекают следующие выводы. Если в какой-нибудь системе отсчета электрическое и магнитное поля взаимно перпендикулярны, т. е. $\mathbf{EH} = 0$, то они перпендикулярны и во всякой другой инерциальной системе отсчета. Если в какой-нибудь системе отсчета абсолютные величины **E** и **H** равны друг другу, то они одинаковы и в любой другой системе.

Имеют, очевидно, место также и следующие неравенства. Если в какой-нибудь системе отсчета $E > H$ (или $E < H$), то и во всякой другой системе будет $E > H$ (или $E < H$). Если в какой-либо системе отсчета векторы **E** и **H** образуют острый (или тупой) угол, то они будут образовывать острый (или тупой) угол и во всякой другой системе.

Преобразованием Лоренца можно всегда достичь того, чтобы **E** и **H** получили любые значения, удовлетворяющие только условию, чтобы $E^2 - H^2$ и **EH** имели заданные определенные значения. В частности, можно найти такую инерциальную систему отсчета, в которой электрическое и магнитное поля в данной точке параллельны друг другу. В этой системе $\mathbf{EH} = EH$, и из двух уравнений

$$E^2 - H^2 = E_0^2 - H_0^2, \quad EH = \mathbf{E}_0\mathbf{H}_0$$

можно найти значения **E** и **H** в этой системе отсчета ($\mathbf{E}_0$ и $\mathbf{H}_0$ — электрическое и магнитное поля в исходной системе отсчета).

Исключением является случай, когда оба инварианта равны нулю. В этом случае **E** и **H** во всех системах отсчета равны по величине и взаимно перпендикулярны по направлению.

Если лишь $\mathbf{EH} = 0$, то можно найти такую систему отсчета, в которой $\mathbf{E} = 0$ или $\mathbf{H} = 0$ (смотря по тому $E^2 - H^2 <$ или > 0), т. е. поле чисто магнитное или чисто электрическое; наоборот, если в какой-нибудь системе отсчета $\mathbf{E} = 0$ или $\mathbf{H} = 0$, то во всякой другой системе они будут взаимно перпендикулярны в соответствии со сказанным в конце предыдущего параграфа.

Изложим еще и другой способ подхода к вопросу об инвариантах антисимметричного 4-тензора. Этот способ делает очевидным единственность двух независимых инвариантов (25,3—4) и в то же время выявляет некоторые поучительные математические свойства преобразований Лоренца в применении к 4-тензору.

Рассмотрим комплексный вектор

$$\mathbf{F} = \mathbf{E} + i\mathbf{H}. \tag{25,5}$$

Используя формулы (24,2—3), легко видеть, что преобразование Лоренца (вдоль оси x) для этого вектора имеет вид:

$$F_x = F'_x, \quad F_y = F'_y \operatorname{ch}\varphi - iF'_z \operatorname{sh}\varphi = F'_y \cos i\varphi - F'_z \sin i\varphi,$$
$$F_z = F'_z \cos i\varphi + F'_y \sin i\varphi, \quad \operatorname{th}\varphi = \frac{V}{c}. \tag{25,6}$$

Мы видим, что вращение в плоскости xt 4-пространства (каковым и является рассматриваемое преобразование Лоренца) для вектора **F** эквивалентно вращению на мнимый угол в плоскости yz трехмерного пространства. Совокупность же всех возможных поворотов в 4-пространстве (включающая в себя также и простые повороты осей x, y, z) эквивалентна совокупности всех возможных поворотов на комплексные углы в трехмерном пространстве (шести углам поворота в 4-пространстве соответствуют три комплексных угла поворота трехмерной системы).

Единственным инвариантом вектора по отношению к поворотам является его квадрат: $\mathbf{F}^2 = E^2 - H^2 + 2i\mathbf{EH}$. Поэтому вещественные величины $E^2 - H^2$ и **EH** являются единственными инвариантами тензора F_{ik}.

Если $\mathbf{F}^2 \neq 0$, то вектор **F** можно представить в виде $\mathbf{F} = a\mathbf{n}$, где $\mathbf{n}$ — единичный ($\mathbf{n}^2 = 1$) комплексный вектор. Путем надлежащего комплексного поворота можно направить **n** вдоль одной из координатных осей; при этом, очевидно, **n** станет вещественным и тем самым определит направления обоих векторов **E** и **H**: $\mathbf{F} = (E + iH)\mathbf{n}$. Другими словами, векторы **E** и **H** станут параллельными друг другу.

Задача

Определить скорость системы отсчета, в которой электрическое и магнитное поля параллельны.

Решение. Систем отсчета K', удовлетворяющих поставленному условию, существует бесконечное множество: если найдена одна из них, то тем же свойством будет обладать и любая другая система, движущаяся относительно первой со скоростью, направленной вдоль общего направления полей **E** и **H**. Поэтому достаточно определить ту из этих систем, скорость которой перпендикулярна к обоим полям. Выбирая направление скорости в качестве оси x и воспользовавшись тем, что в системе K': $E'_x = H'_x = 0$, $E'_y H'_z - E'_z H'_y = 0$, получим с помощью формул (24,2—3) для скорости **V** системы K' относительно исходной системы следующее уравнение:

$$\frac{\mathbf{V}/c}{1 + V^2/c^2} = \frac{[\mathbf{EH}]}{E^2 + H^2}$$

(из двух корней квадратного уравнения должен, разумеется, быть выбран тот, для которого $V < c$).

ГЛАВА IV

УРАВНЕНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

§ 26. Первая пара уравнений Максвелла

Из выражений

$$\mathbf{H} = \operatorname{rot} \mathbf{A}, \qquad \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \operatorname{grad} \varphi$$

легко получить уравнения, содержащие только **E** и **H**. Для этого определим $\operatorname{rot} \mathbf{E}$:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{rot} \mathbf{A} - \operatorname{rot} \operatorname{grad} \varphi.$$

Но ротор всякого градиента равен нулю; следовательно,

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}. \tag{26,1}$$

Взяв дивергенцию от обеих частей уравнения $\operatorname{rot} \mathbf{A} = \mathbf{H}$ и помня, что дивергенция всякого ротора равна нулю, находим:

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = 0. \tag{26,2}$$

Уравнения (26,1) и (26,2) составляют первую пару *уравнений Максвелла*[1]). Заметим, что эти два уравнения еще не определяют вполне свойства поля. Это видно уже из того, что они определяют изменение магнитного поля со временем (производную $\partial \mathbf{H}/\partial t$), но не определяют производной $\partial \mathbf{E}/\partial t$.

Уравнения (26,1) и (26,2) можно написать в интегральной форме. Согласно теореме Гаусса

$$\int \operatorname{div} \mathbf{H}\, dV = \oint \mathbf{H}\, d\mathbf{f},$$

где интеграл справа берется по всей замкнутой поверхности, охватывающей объем, по которому взят интеграл слева. На основании (26,2) имеем:

$$\oint \mathbf{H}\, d\mathbf{f} = 0. \tag{26,3}$$

---

[1]) Уравнения Максвелла — основные уравнения электродинамики — были впервые сформулированы им в 1860-х годах.

Интеграл от вектора по некоторой поверхности называется *потоком вектора* через эту поверхность. Таким образом, поток магнитного поля через всякую замкнутую поверхность равен нулю.

Согласно теореме Стокса

$$\int \operatorname{rot} \mathbf{E}\, d\mathbf{f} = \oint \mathbf{E}\, d\mathbf{l},$$

где интеграл справа берется по замкнутому контуру, огибающему поверхность, по которой интегрируется слева. Из (26,1) мы находим, интегрируя обе части по некоторой поверхности:

$$\oint \mathbf{E}\, d\mathbf{l} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int \mathbf{H}\, d\mathbf{f}. \tag{26,4}$$

Интеграл вектора по замкнутому контуру называется *циркуляцией* этого вектора по контуру. Циркуляцию электрического поля называют также *электродвижущей силой* в данном контуре. Таким образом, электродвижущая сила в некотором контуре равна взятой с обратным знаком производной по времени от потока магнитного поля через поверхность, ограничиваемую этим контуром.

Уравнения Максвелла (26,1—2) можно написать и в четырехмерных обозначениях. Исходя из определения тензора электромагнитного поля

$$F_{ik} = \frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k},$$

легко убедиться, что

$$\frac{\partial F_{ik}}{\partial x^l} + \frac{\partial F_{kl}}{\partial x^i} + \frac{\partial F_{li}}{\partial x^k} = 0. \tag{26,5}$$

Выражение, стоящее в левой стороне равенства, представляет собой тензор третьего ранга, антисимметричный по всем трем индексам. Его компоненты не равны тождественно нулю лишь при $i \neq k \neq l$. Всего, таким образом, имеется четыре различных уравнения, которые, как легко убедиться подстановкой выражений (23,5), совпадают с уравнениями (26,1) и (26,2).

Антисимметричному 4-тензору третьего ранга можно привести в соответствие дуальный ему 4-вектор, получающийся умножением тензора на e^{iklm} и упрощением по трем парам индексов (см. § 6). Таким образом, (26,5) можно написать в виде

$$e^{iklm}\frac{\partial F_{lm}}{\partial x^k} = 0, \tag{26,6}$$

явно выражающем тот факт, что здесь имеется всего четыре независимых уравнения.

§ 27. Действие для электромагнитного поля

Действие S для всей системы, состоящей из электромагнитного поля вместе с находящимися в нем частицами, должно состоять из трех частей:

$$S = S_f + S_m + S_{mf}. \tag{27,1}$$

S_m есть та часть действия, которая зависит только от свойств частиц, т. е. действие для свободных частиц. Для одной свободной частицы оно дается формулой (8,1). Если имеется несколько частиц, то их общее действие равно сумме действий для каждой частицы в отдельности. Таким образом,

$$S_m = -\sum mc \int ds. \tag{27,2}$$

S_{mf} есть та часть действия, которая обусловлена взаимодействием между частицами и полем. Согласно § 16 имеем для системы частиц:

$$S_{mf} = -\sum \frac{e}{c} \int A_k dx^k. \tag{27,3}$$

В каждом из членов этой суммы A_k есть потенциал поля в той точке пространства и времени, в которой находится соответствующая частица. Сумма $S_m + S_{mf}$ есть уже известное нам действие (16,1) для зарядов в поле.

Наконец, S_f есть та часть действия, которая зависит только от свойств самого поля, т. е. S_f есть действие для поля в отсутствии зарядов. До тех пор, пока мы интересовались только движением зарядов в заданном электромагнитном поле, S_f, как не зависящее от частиц, нас не интересовало, так как этот член не мог повлиять на уравнения движения частицы. Он становится, однако, необходимым, когда мы хотим найти уравнения, определяющие само поле. Этому соответствует то обстоятельство, что из части $S_m + S_{mf}$ действия мы нашли только два уравнения, (26,1—2), которые еще недостаточны для полного определения поля.

Для установления вида действия поля S_f мы будем исходить из следующего весьма важного свойства электромагнитных полей. Как показывает опыт, электромагнитное поле подчиняется так называемому *принципу суперпозиции*. Этот принцип заключается в утверждении, что поле, создаваемое системой зарядов, представляет собой результат простого сложения полей, которые создаются каждым из зарядов в отдельности. Это значит, что напряженности результирующего поля в каждой точке равны сумме (векторной) напряженностей в этой точке каждого из полей в отдельности.

Всякое решение уравнений поля является полем, которое может быть осуществлено в природе. Согласно принципу суперпозиции

сумма любых таких полей тоже должна быть полем, которое может быть осуществлено в природе, т. е. должно удовлетворять уравнениям поля.

Как известно, линейные дифференциальные уравнения как раз отличаются тем свойством, что сумма любых его решений тоже является решением. Следовательно, уравнения для поля должны быть линейными дифференциальными уравнениями.

Из сказанного следует, что под знаком интеграла в действии S_f должно стоять выражение, квадратичное по полю. Только в этом случае уравнения поля будут линейными,— уравнения поля получаются варьированием действия, а при варьировании степень подынтегрального выражения понижается на единицу.

В выражение для действия S_f не могут входить потенциалы поля, так как они не определены однозначно (в S_{mf} эта неоднозначность была не существенна). Поэтому S_f должно быть интегралом некоторой функции от тензора электромагнитного поля F_{ik}. Но действие должно быть скаляром и потому должно быть интегралом от некоторого скаляра. Таковым является лишь произведение $F_{ik}F^{ik}$[1]).

Таким образом, S_f должно иметь вид:

$$S_f = a \iint F_{ik}F^{ik}\,dV\,dt, \quad dV = dx\,dy\,dz,$$

где интеграл берется по координатам по всему пространству, а по времени — между двумя заданными моментами; a есть некоторая постоянная. Под интегралом стоит $F_{ik}F^{ik} = 2(H^2 - E^2)$. Поле $\mathbf{E}$ содержит производную $\partial\mathbf{A}/\partial t$. Но легко видеть, что $(\partial\mathbf{A}/\partial t)^2$ должно входить в действие с положительным знаком (а потому и E^2 с положительным знаком). Действительно, если бы $(\partial\mathbf{A}/\partial t)^2$ входило в S_f со знаком минус, то достаточно быстрым изменением потенциала со временем (в рассматриваемом интервале времени) всегда можно было бы сделать S_f отрицательной величиной со сколь

---

[1]) Подынтегральная функция в S_f не должна содержать производных от F_{ik}, так как в функцию Лагранжа могут входить, помимо координат системы, только их первые производные по времени, а роль «координат» (т. е. переменных, по которым производится варьирование в принципе наименьшего действия) играют в этом случае потенциалы A_k поля; это аналогично тому, что в механике функция Лагранжа для механической системы содержит только координаты частиц и их первые производные по времени.

Что касается величины $e^{iklm}F_{ik}F_{lm}$ (§ 25), то она является (как было отмечено в примечании на стр. 90) полной 4-дивергенцией, и поэтому ее добавление в подынтегральное выражение в S_f вообще не отразилось бы на «уравнениях движения». Интересно, что тем самым эта величина исключается из действия уже независимо от того обстоятельства, что она представляет собой не истинный, а псевдоскаляр.

угодно большим абсолютным значением; S_f не могло бы, следовательно, иметь минимума, как этого требует принцип наименьшего действия. Таким образом, a должно быть отрицательным.

Численное значение a зависит от выбора единиц для измерения поля. Заметим, что после выбора определенного значения a вместе с единицами для измерения поля определяются также и единицы для измерения всех остальных электромагнитных величин.

Мы будем в дальнейшем пользоваться так называемой *гауссовой системой единиц*; в этой системе a есть безразмерная величина, равная $-1/16\pi$ [1]).

Таким образом, действие для поля имеет вид

$$S_f = -\frac{1}{16\pi c}\int F_{ik}F^{ik}\,d\Omega, \quad d\Omega = c\,dt\,dx\,dy\,dz. \tag{27,4}$$

В трехмерном виде:

$$S_f = \frac{1}{8\pi}\iint (E^2 - H^2)\,dV\,dt. \tag{27,5}$$

Другими словами, функция Лагранжа для поля есть

$$L_f = \frac{1}{8\pi}\int (E^2 - H^2)\,dV. \tag{27,6}$$

Действие для поля вместе с находящимися в нем зарядами имеет вид

$$S = -\sum\int mc\,ds - \sum\int \frac{e}{c}A_k dx^k - \frac{1}{16\pi c}\int F_{ik}F^{ik}\,d\Omega. \tag{27,7}$$

Заметим, что теперь уже заряды отнюдь не считаются малыми, как при выводе уравнений движения заряда в заданном поле. Поэтому A_k и F_{ik} относятся к истинному полю, т. е. внешнему полю вместе с полем, созданным самими зарядами; A_k и F_{ik} зависят теперь от положения и скорости зарядов.

§ 28. Четырехмерный вектор тока

Вместо того чтобы рассматривать заряды как точечные, в целях математического удобства часто рассматривают заряд как распределенный в пространстве непрерывным образом. Тогда можно ввести *плотность заряда* ρ так, что $\rho\,dV$ есть заряд, находящийся в объеме dV; ρ есть, вообще говоря, функция от координат и

---

[1]) Наряду с гауссовой системой единиц пользуются также и так называемой системой Хевисайда, в которой $a = -1/4$. В этой системе единиц имеют более удобный вид уравнения поля (в них не входит тогда 4π), но зато 4π входит в закон Кулона. Напротив, в гауссовой системе единиц уравнения поля содержат 4π, а закон Кулона имеет простой вид.

времени. Интеграл от ρ по некоторому объему есть заряд, находящийся в этом объеме.

При этом надо помнить, что в действительности заряды являются точечными, так что плотность ρ равна нулю везде, кроме тех точек, где находятся точечные заряды, а интеграл $\int \rho\, dV$ должен быть равен сумме тех зарядов, которые находятся в данном объеме. Поэтому ρ можно написать с помощью δ-функций[1]) в следующем виде:

$$\rho = \sum_a e_a \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a), \tag{28,1}$$

где сумма берется по всем имеющимся зарядам, а $\mathbf{r}_a$ — радиус-вектор заряда e_a.

---

[1]) δ-функция $\delta(x)$ определяется следующим образом: $\delta(x) = 0$ при всех не равных нулю значениях x; при $x = 0$ $\delta(0) = \infty$, причем так, что интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\, dx = 1. \tag{I}$$

Из этого определения вытекают следующие свойства: если $f(x)$ — любая непрерывная функция, то

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, \delta(x - a)\, dx = f(a); \tag{II}$$

в частности,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, \delta(x)\, dx = f(0) \tag{III}$$

(пределы интегрирования, разумеется, не обязательно должны быть $\pm\infty$; областью интегрирования может быть любая область, заключающая ту точку, в которой δ-функция не исчезает).

Смысл следующих равенств заключается в том, что их левая и правая части дают одинаковые результаты, если их применять в качестве множителей под знаком интегрирования:

$$\delta(-x) = \delta(x), \quad \delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x). \tag{IV}$$

Последнее равенство является частным случаем более общего соотношения

$$\delta[\varphi(x)] = \sum_i \frac{1}{|\varphi'(a_i)|}\delta(x - a_i), \tag{V}$$

где $\varphi(x)$ — однозначная функция (обратная ей функция не обязана быть однозначной), а a_i — корни уравнения $\varphi(x) = 0$.

Подобно тому как $\delta(x)$ определена для одной переменной x, можно ввести трехмерную δ-функцию $\delta(\mathbf{r})$, равную нулю везде, кроме начала трехмерной системы координат, и интеграл которой по всему пространству равен 1. Такую функцию можно, очевидно, представить как произведение $\delta(x)\,\delta(y)\,\delta(z)$.

Заряд частицы есть, по самому своему определению, величина инвариантная, т. е. не зависящая от выбора системы отсчета. Напротив, плотность ρ не есть инвариант,— инвариантом является лишь произведение $\rho\, dV$.

Умножим равенство $de = \rho\, dV$ с обеих сторон на dx^i:

$$de\, dx^i = \rho\, dV\, dx^i = \rho\, dV\, dt \frac{dx^i}{dt}.$$

Слева стоит 4-вектор (так как de есть скаляр, а dx^i—4-вектор). Значит, и справа должен стоять 4-вектор. Но $dV\, dt$ есть скаляр, а потому $\rho \frac{dx_i}{dt}$ есть 4-вектор. Этот вектор (обозначим его через j^i) носит название 4-вектора *тока*:

$$j^i = \rho \frac{dx^i}{dt}. \tag{28,2}$$

Три пространственные компоненты этого вектора образуют трехмерный вектор

$$\mathbf{j} = \rho \mathbf{v}; \tag{28,3}$$

$\mathbf{v}$ есть скорость заряда в данной точке. Вектор $\mathbf{j}$ называется вектором *плотности тока*. Временная составляющая 4-вектора тока есть $c\rho$. Таким образом,

$$j^i = (c\rho,\ \mathbf{j}). \tag{28,4}$$

Полный заряд, находящийся во всем пространстве, равен интегралу $\int \rho\, dV$ по всему пространству. Мы можем написать этот интеграл в четырехмерном виде:

$$\int \rho\, dV = \frac{1}{c} \int j^0 dV = \frac{1}{c} \int j^i\, dS_i, \tag{28,5}$$

где интегрирование производится по всей четырехмерной гиперплоскости, перпендикулярной к оси x^0 (очевидно, что это и означает интегрирование по всему трехмерному пространству).

Вообще интеграл $\frac{1}{c} \int j^i\, dS_i$, взятый по любой гиперповерхности, есть сумма зарядов, мировые линии которых пересекают эту гиперповерхность.

Введем 4-вектор тока в выражение (27,7) для действия и преобразуем второй член в этом выражении. Вводя вместо точечных зарядов e непрерывное распределение с плотностью ρ, мы должны написать этот член в виде

$$-\frac{1}{c} \int \rho A_i dx^i\, dV,$$

заменив сумму по зарядам интегралом по всему объему. Переписав его как

$$-\frac{1}{c}\int \rho \frac{dx^i}{dt} A_i dV\, dt,$$

мы видим, что этот член равен

$$-\frac{i}{c^2}\int A_i j^i d\Omega.$$

Таким образом, действие S принимает вид

$$S = -\sum \int mc\, ds - \frac{1}{c^2}\int A_i j^i\, d\Omega - \frac{1}{16\pi c}\int F_{ik}F^{ik}\, d\Omega. \qquad (28,6)$$

§ 29. Уравнение непрерывности

Изменение со временем заряда, находящегося в некотором объеме, дается производной

$$\frac{\partial}{\partial t}\int \rho\, dV.$$

С другой стороны, изменение за единицу времени определяется количеством заряда, выходящего за это время из данного объема наружу, или, наоборот, входящего внутрь его. Количество заряда, проходящего за единицу времени через элемент $d\mathbf{f}$ поверхности, ограничивающей наш объем, равно $\rho \mathbf{v}\, d\mathbf{f}$, где $\mathbf{v}$ есть скорость заряда в той точке пространства, где находится элемент $d\mathbf{f}$. Вектор $d\mathbf{f}$ направлен, как это всегда принимается, по внешней нормали к поверхности, т. е. по нормали, направленной наружу от рассматриваемого объема. Поэтому $\rho \mathbf{v}\, d\mathbf{f}$ положительно, если заряд выходит из нашего объема, и отрицательно, если заряд входит в него. Полное количество заряда, выходящего в единицу времени из данного объема, есть, следовательно, $\oint \rho \mathbf{v}\, d\mathbf{f}$, где интеграл распространен по всей замкнутой поверхности, ограничивающей этот объем.

Из сравнения обоих полученных выражений находим:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int \rho\, dV = -\oint \rho \mathbf{v}\, d\mathbf{f}. \qquad (29,1)$$

Справа поставлен знак минус, так как левая часть положительна, если полный заряд в данном объеме увеличивается. Уравнение (29,1), выражающее собой закон сохранения заряда, есть так называемое *уравнение непрерывности*, написанное в интегральном виде. Замечая, что $\rho \mathbf{v}$ есть плотность тока, можно переписать (29,1) в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}\int \rho\, dV = -\oint \mathbf{j}\, d\mathbf{f}. \qquad (29,2)$$

Напишем это же уравнение в дифференциальном виде. Применив к правой части (29,2) теорему Гаусса:

$$\oint \mathbf{j}\, d\mathbf{f} = \int \operatorname{div} \mathbf{j}\, dV,$$

находим:

$$\int \left(\operatorname{div} \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) dV = 0.$$

Поскольку это равенство должно иметь место при интегрировании по любому объему, то подынтегральное выражение должно быть равно нулю:

$$\operatorname{div} \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \tag{29,3}$$

Это и есть уравнение непрерывности в дифференциальном виде.

Легко убедиться в том, что выражение (28,1) для ρ в виде δ-функций автоматически удовлетворяет уравнению (29,3). Для простоты предположим, что имеется всего лишь один заряд, так что

$$\rho = e\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0).$$

Ток $\mathbf{j}$ есть тогда

$$\mathbf{j} = e\mathbf{v}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0),$$

где $\mathbf{v}$ — скорость заряда. Найдем производную $\partial\rho/\partial t$. При движении заряда меняются его координаты, т. е. меняется $\mathbf{r}_0$. Поэтому

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial \rho}{\partial \mathbf{r}_0} \frac{\partial \mathbf{r}_0}{\partial t}.$$

Но $\partial\mathbf{r}_0/\partial t$ есть не что иное, как скорость $\mathbf{v}$ заряда. Далее, поскольку ρ есть функция от $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0$,

$$\frac{\partial \rho}{\partial \mathbf{r}_0} = -\frac{\partial \rho}{\partial \mathbf{r}}.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\mathbf{v} \operatorname{grad} \rho = -\operatorname{div} \rho\mathbf{v}$$

(скорость $\mathbf{v}$ заряда не зависит, конечно, от $\mathbf{r}$). Таким образом, мы приходим к уравнению (29,3).

В четырехмерной форме уравнение непрерывности (29,3) выражается равенством нулю 4-дивергенции 4-вектора тока:

$$\frac{\partial j^i}{\partial x^i} = 0. \tag{29,4}$$

В предыдущем параграфе мы видели, что полный заряд, находящийся во всем пространстве, может быть написан в виде

$$\frac{1}{c} \int j^i dS_i,$$

где интегрирование производится по гиперплоскости $x^0=\text{const}$. В другой момент времени полный заряд изобразится таким же интегралом, взятым по другой гиперплоскости, перпендикулярной к оси x^0. Легко проверить, что уравнение (29,4) действительно приводит к закону сохранения заряда, т. е. к тому, что интеграл $\int j^i dS_i$ одинаков, по какой бы гиперплоскости $x^0=\text{const}$ мы ни интегрировали. Разность между интегралами $\int j^i dS_i$, взятыми по двум таким гиперплоскостям, можно написать в виде $\oint j^i dS_i$, где интеграл берется по всей замкнутой гиперповерхности, охватывающей 4-объем между двумя рассматриваемыми гиперплоскостями (этот интеграл отличается от искомой разности интегралом по бесконечно удаленной «боковой» гиперповерхности, который, однако, исчезает, так как на бесконечности нет зарядов). С помощью теоремы Гаусса (6,15) можно, преобразовав этот интеграл в интеграл по 4-объему между двумя гиперплоскостями, убедиться, что

$$\oint j^i dS_i = \int \frac{\partial j^i}{\partial x^i} d\Omega = 0, \tag{29,5}$$

что и требовалось доказать.

Приведенное доказательство остается, очевидно, в силе и для двух интегралов $\int j^i dS_i$, в которых интегрирование производится по любым двум бесконечным гиперповерхностям (а не только по гиперплоскостям $x^0=\text{const}$), включающим в себе все (трехмерное) пространство. Отсюда видно, что интеграл $\frac{1}{c}\int j^i dS_i$ действительно имеет одно и то же значение (равное полному заряду в пространстве), по какой бы такой гиперповерхности ни производилось интегрирование.

Мы уже упоминали (см. примечание на стр. 74) о тесной связи между калибровочной инвариантностью уравнений электродинамики и законом сохранения заряда. Продемонстрируем ее еще раз на выражении действия в виде (28,6). При замене A_i на $A_i - \frac{\partial f}{\partial x^i}$ ко второму члену в этом выражении добавится интеграл

$$\frac{1}{c^2}\int j^i \frac{\partial f}{\partial x^i} d\Omega.$$

Именно сохранение заряда, выражаемое уравнением непрерывности (29,4), позволяет написать подынтегральное выражение в виде 4-дивергенции $\frac{\partial}{\partial x^i}(f j^i)$, после чего согласно теореме Гаусса интеграл по 4-объему преобразуется в интеграл по граничным гиперповерхностям; при варьировании действия эти интегралы выпадают и, таким образом, не отражаются на уравнениях движения.

§ 30. Вторая пара уравнений Максвелла

При нахождении уравнений поля из принципа наименьшего действия мы должны считать заданными движение зарядов и должны варьировать только потенциалы поля (играющие здесь роль «координат» системы); при нахождении уравнений движения мы, наоборот, считали поле заданным и варьировали траекторию частицы.

Поэтому вариация первого члена в (28,6) равна нулю, а во втором не должен варьироваться ток j^i. Таким образом,

$$\delta S = -\frac{1}{c}\int\left[\frac{1}{c}j^i\delta A_i + \frac{1}{8\pi}F^{ik}\delta F_{ik}\right]d\Omega = 0$$

(при варьировании во втором члене учтено, что $F^{ik}\delta F_{ik} \equiv F_{ik}\delta F^{ik}$). Подставляя

$$F_{ik} = \frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k},$$

имеем:

$$\delta S = -\frac{1}{c}\int\left\{\frac{1}{c}j^i\delta A_i + \frac{1}{8\pi}F^{ik}\frac{\partial}{\partial x^i}\delta A_k - \frac{1}{8\pi}F^{ik}\frac{\partial}{\partial x^k}\delta A_i\right\}d\Omega.$$

Во втором члене меняем местами индексы i и k, по которым производится суммирование, и, кроме того, заменяем F_{ki} на $-F_{ik}$. Тогда мы получим:

$$\delta S = -\frac{1}{c}\int\left\{\frac{1}{c}j^i\delta A_i - \frac{1}{4\pi}F^{ik}\frac{\partial}{\partial x^k}\delta A_i\right\}d\Omega.$$

Второй из этих интегралов берем по частям, т. е. применяем теорему Гаусса:

$$\delta S = -\frac{1}{c}\int\left\{\frac{1}{c}j^i + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k}\right\}\delta A_i d\Omega - \frac{1}{4\pi c}\int F^{ik}\delta A_i dS_k\Big| . \quad (30,1)$$

Во втором члене мы должны взять его значение на пределах интегрирования. Пределами интегрирования по координатам является бесконечность, где поле исчезает. На пределах же интегрирования по времени, т. е. в заданные начальный и конечный моменты времени, вариация потенциалов равна нулю, так как по смыслу принципа наименьшего действия потенциалы в эти моменты заданы. Таким образом, второй член в (30,1) равен нулю, и мы находим:

$$\int\left(\frac{1}{c}j^i + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k}\right)\delta A_i d\Omega = 0.$$

Ввиду того, что по смыслу принципа наименьшего действия вариации δA_i произвольны, нулю должен равняться коэффициент при

δA_i, т. е.

$$\frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k} = -\frac{4\pi}{c} j^i. \qquad (30,2)$$

Перепишем эти четыре ($i=0$, 1, 2, 3) уравнения в трехмерной форме. При $i=1$ имеем:

$$\frac{1}{c}\frac{\partial F^{10}}{\partial t} + \frac{\partial F^{11}}{\partial x} + \frac{\partial F^{12}}{\partial y} + \frac{\partial F^{13}}{\partial z} = -\frac{4\pi}{c} j^1.$$

Подставляя значения составляющих тензора F^{ik}, находим:

$$\frac{1}{c}\frac{\partial E_x}{\partial t} - \frac{\partial H_z}{\partial y} + \frac{\partial H_y}{\partial z} = -\frac{4\pi}{c} j_x.$$

Вместе с двумя следующими ($i=2$, 3) уравнениями они могут быть записаны как одно векторное:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}. \qquad (30,3)$$

Наконец, уравнение с $i=0$ дает:

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho. \qquad (30,4)$$

Уравнения (30,3) и (30,4) и составляют искомую вторую пару Максвелла[1]). Вместе с первой парой, они вполне определяют электромагнитное поле и являются основными уравнениями теории этих полей — *электродинамики*.

Напишем эти уравнения в интегральной форме. Интегрируя (30,4) по некоторому объему и применяя теорему Гаусса

$$\int \operatorname{div} \mathbf{E}\, dV = \oint \mathbf{E}\, d\mathbf{f},$$

находим:

$$\oint \mathbf{E}\, d\mathbf{f} = 4\pi \int \rho\, dV. \qquad (30,5)$$

Таким образом, поток электрического поля через замкнутую поверхность равен полному заряду, находящемуся в объеме, ограниченном этой поверхностью, умноженному на 4π.

Интегрируя (30,3) по некоторой незамкнутой поверхности и применяя теорему Стокса

$$\int \operatorname{rot} \mathbf{H}\, d\mathbf{f} = \oint \mathbf{H}\, d\mathbf{l},$$

находим:

$$\oint \mathbf{H}\, d\mathbf{l} = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int \mathbf{E}\, d\mathbf{f} + \frac{4\pi}{c}\int \mathbf{j}\, d\mathbf{f}. \qquad (30,6)$$

---

[1]) Уравнения Максвелла в форме, применимой к электромагнитному полю в пустоте вместе с находящимися в нем точечными зарядами, были сформулированы Лоренцом.

Величину

$$\frac{1}{4\pi}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \tag{30,7}$$

называют *током смещения*. Из (30,6), написанного в виде

$$\oint \mathbf{H}\,d\mathbf{l} = \frac{4\pi}{c}\int\left(\mathbf{j} + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\right)d\mathbf{f}, \tag{30,8}$$

видно, что циркуляция магнитного поля по некоторому контуру равна помноженной на $4\pi/c$ сумме токов истинного и смещения, протекающих сквозь поверхность, ограничиваемую этим контуром.

Из уравнений Максвелла можно получить известное уже нам уравнение непрерывности (29,3). Беря с обеих сторон (30,3) дивергенцию, находим:

$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div}\mathbf{E} + \frac{4\pi}{c}\operatorname{div}\mathbf{j}.$$

Но $\operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{H} \equiv 0$ и $\operatorname{div}\mathbf{E} = 4\pi\rho$ согласно (30,4). Таким образом, мы приходим снова к уравнению (29,3). В четырехмерном виде из (30,2) имеем:

$$\frac{\partial^2 F^{ik}}{\partial x^i \partial x^k} = -\frac{4\pi}{c}\frac{\partial j^i}{\partial x^i}.$$

Но симметричный по индексам i, k оператор $\frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^k}$, примененный к антисимметричному тензору F^{ik}, обращает его тождественно в нуль, и мы приходим к уравнению непрерывности, написанному в четырехмерном виде (29,4).

§ 31. Плотность и поток энергии

Умножим обе части уравнения (30,3) на $\mathbf{E}$, а обе части уравнения (26,1) на $\mathbf{H}$ и сложим полученные уравнения почленно:

$$\frac{1}{c}\mathbf{E}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{1}{c}\mathbf{H}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = -\frac{4\pi}{c}\mathbf{jE} - (\mathbf{H}\operatorname{rot}\mathbf{E} - \mathbf{E}\operatorname{rot}\mathbf{H}).$$

Пользуясь известной формулой векторного анализа

$$\operatorname{div}[\mathbf{ab}] = \mathbf{b}\operatorname{rot}\mathbf{a} - \mathbf{a}\operatorname{rot}\mathbf{b},$$

переписываем это соотношение в виде

$$\frac{1}{2c}\frac{\partial}{\partial t}(E^2 + H^2) = -\frac{4\pi}{c}\mathbf{jE} - \operatorname{div}[\mathbf{EH}]$$

или

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{E^2+H^2}{8\pi} = -\mathbf{jE} - \operatorname{div}\mathbf{S}. \tag{31,1}$$

Вектор

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi}[\mathbf{EH}] \tag{31,2}$$

называют *вектором Пойнтинга*.

Проинтегрируем (31,1) по некоторому объему и применим ко второму члену справа теорему Гаусса. Мы получим тогда:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\frac{E^2+H^2}{8\pi}\,dV = -\int\mathbf{jE}\,dV - \oint\mathbf{S}\,d\mathbf{f}. \tag{31,3}$$

Если интегрирование производится по всему пространству, то интеграл по поверхности исчезает (поле на бесконечности равно нулю). Далее, мы можем написать интеграл $\int\mathbf{jE}\,dV$ в виде суммы $\sum e\mathbf{vE}$ по всем зарядам, находящимся в поле, и подставить согласно (17,7)

$$e\mathbf{vE} = \frac{d}{dt}\mathscr{E}_{\text{кин}}.$$

Тогда (31,3) переходит в

$$\frac{d}{dt}\left\{\int\frac{E^2+H^2}{8\pi}\,dV + \sum\mathscr{E}_{\text{кин}}\right\} = 0. \tag{31,4}$$

Таким образом, для замкнутой системы, состоящей из электромагнитного поля вместе с находящимися в нем частицами, сохраняется величина, стоящая в написанном уравнении в скобках. Второй член в этом выражении есть кинетическая энергия (вместе с энергией покоя всех частиц; см. примечание на стр. 72); первый же член есть, следовательно, энергия самого электромагнитного поля. Величину

$$W = \frac{E^2+H^2}{8\pi} \tag{31,5}$$

мы можем поэтому назвать *плотностью энергии* электромагнитного поля; это есть энергия единицы объема поля.

При интегрировании по некоторому конечному объему поверхностный интеграл в (31,3), вообще говоря, не исчезает, так что мы можем написать это уравнение в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{\int\frac{E^2+H^2}{8\pi}\,dV + \sum\mathscr{E}_{\text{кин}}\right\} = -\oint\mathbf{S}\,d\mathbf{f}, \tag{31,6}$$

где теперь во втором члене в скобках суммирование производится только по частицам, находящимся в рассматриваемом объеме. Слева стоит изменение полной энергии поля и частиц в единицу времени.

Поэтому интеграл $\oint \mathbf{S}\, d\mathbf{f}$ надо рассматривать как поток энергии поля через поверхность, ограничивающую данный объем, так что вектор Пойнтинга $\mathbf{S}$ есть плотность этого потока,— количество энергии поля, протекающее в единицу времени через единицу поверхности[1]).

§ 32. Тензор энергии-импульса

В предыдущем параграфе мы вывели выражение для энергии электромагнитного поля. Выведем это выражение, вместе с выражением для импульса поля, в четырехмерной форме. При этом мы будем для простоты рассматривать пока электромагнитное поле без зарядов. Имея в виду дальнейшее применение (к гравитационным полям), а также упрощение выкладок, мы проделаем вывод в общем виде, не конкретизируя род системы.

Рассмотрим некоторую систему, интеграл действия для которой имеет вид

$$S = \int \Lambda\left(q, \frac{\partial q}{\partial x^i}\right) dV\, dt = \frac{1}{c}\int \Lambda\, d\Omega, \qquad (32,1)$$

где Λ — некоторая функция от величин q, определяющих состояние системы и их производных по координатам и времени (для электромагнитного поля величинами q являются компоненты 4-потенциала); для краткости мы пишем здесь всего одну такую величину q. Заметим, что интеграл по пространству $\int \Lambda\, dV$ есть функция Лагранжа системы, так что Λ можно рассматривать как «плотность» функции Лагранжа. Математическим выражением замкнутости системы является отсутствие явной зависимости Λ от x^i, подобно тому, как функция Лагранжа для замкнутой механической системы не зависит явно от времени.

«Уравнения движения» (т. е. уравнения поля, если речь идет о каком-либо поле) получаются согласно принципу наименьшего действия путем варьирования S. Имеем (для краткости обозначаем $q_{,i} \equiv \partial q/\partial x^i$):

$$\delta S = \frac{1}{c}\int\left(\frac{\partial \Lambda}{\partial q}\,\delta q + \frac{\partial \Lambda}{\partial q_{,i}}\,\delta q_{,i}\right) d\Omega =$$
$$= \frac{1}{c}\int\left[\frac{\partial \Lambda}{\partial q}\,\delta q + \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{\partial \Lambda}{\partial q_{,i}}\,\delta q\right) - \delta q\,\frac{\partial}{\partial x^i}\,\frac{\partial \Lambda}{\partial q_{,i}}\right] d\Omega = 0.$$

Второй член под интегралом, будучи преобразован по теореме Гаусса, исчезает при интегрировании по всему пространству, и мы находим

[1]) Мы предполагаем, что на самой поверхности рассматриваемого объема в данный момент времени нет частиц. В противном случае в правой стороне равенства должен был бы тоять также и поток энергии, переносимой пересекающими поверхность частицами.

тогда следующие «уравнения движения»:

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial\Lambda}{\partial q_{,i}}-\frac{\partial\Lambda}{\partial q}=0 \tag{32,2}$$

(везде, конечно, подразумевается суммирование по дважды повторяющемуся индексу i).

Дальнейший вывод аналогичен тому, который производится в механике для вывода закона сохранения энергии. Именно, пишем:

$$\frac{\partial\Lambda}{\partial x^i}=\frac{\partial\Lambda}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial x^i}+\frac{\partial\Lambda}{\partial q_{,k}}\frac{\partial q_{,k}}{\partial x^i}.$$

Подставляя сюда (32,2) и замечая, что $q_{,k,i}=q_{,i,k}$, находим:

$$\frac{\partial\Lambda}{\partial x^i}=\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\frac{\partial\Lambda}{\partial q_{,k}}\right)q_{,i}+\frac{\partial\Lambda}{\partial q_{,k}}\frac{\partial q_{,i}}{\partial x^k}=\frac{\partial}{\partial x^k}\left(q_{,i}\frac{\partial\Lambda}{\partial q_{,k}}\right);$$

Заменив в левой стороне равенства

$$\frac{\partial\Lambda}{\partial x^i}=\delta_i^k\frac{\partial\Lambda}{\partial x^k}$$

и введя обозначение

$$T_i^k=q_{,i}\frac{\partial\Lambda}{\partial q_{,k}}-\delta_i^k\Lambda, \tag{32,3}$$

напишем полученное соотношение в виде

$$\frac{\partial T_i^k}{\partial x^k}=0. \tag{32,4}$$

Если имеется не одна, а несколько величин $q^{(l)}$, то вместо (32,3) надо, очевидно, писать:

$$T_i^k=\sum_l q_{,i}^{(l)}\frac{\partial\Lambda}{\partial q_{,k}^{(l)}}-\delta_i^k\Lambda. \tag{32,5}$$

Мы видели в § 29, что уравнение вида $\partial A^k/\partial x^k=0$, т. е. равенство нулю 4-дивергенции вектора, эквивалентно утверждению, что сохраняется интеграл $\int A^k dS_k$ от этого вектора по гиперповерхности, заключающей в себе все трехмерное пространство. Очевидно, что аналогичное утверждение справедливо и для тензора: уравнение (32,4) эквивалентно утверждению, что сохраняется вектор

$$P^i=\text{const}\int T^{ik}dS_k.$$

Этот вектор и должен быть отождествлен с 4-импульсом системы. Постоянный множитель перед интегралом мы выберем так, чтобы временная компонента P^0 в соответствии с прежним опреде-

лением была равна энергии системы, деленной на c. Для этого замечаем, что

$$P^0 = \text{const} \int T^{0k} dS_k = \text{const} \int T^{00} dV,$$

если интегрирование производится по гиперплоскости $x^0 = \text{const}$. С другой стороны, согласно (32,3) имеем:

$$T^{00} = \dot{q}\frac{\partial \Lambda}{\partial \dot{q}} - \Lambda$$

(где $\dot{q} \equiv \partial q/\partial t$). В соответствии с обычной формулой, связывающей энергию с функцией Лагранжа, эту величину надо рассматривать как плотность энергии, и поэтому $\int T^{00} dV$ есть полная энергия системы. Таким образом, надо положить $\text{const} = 1/c$, и мы получаем окончательно для 4-импульса системы выражение

$$P^i = \frac{1}{c} \int T^{ik} dS_k. \tag{32,6}$$

Тензор T^{ik} называется *тензором энергии-импульса* системы.

Необходимо заметить, что определение тензора T^{ik} по существу не однозначно. Действительно, если T^{ik} — тензор, определенный согласно (32,3), то и всякий другой тензор вида

$$T^{ik} + \frac{\partial}{\partial x^l}\psi^{ikl}, \quad \psi^{ikl} = -\psi^{ilk} \tag{32,7}$$

удовлетворяет уравнению сохранения (32,4), так как мы имеем тождественно $\frac{\partial^2}{\partial x^k \partial x^l}\psi^{ikl} = 0$ ввиду антисимметричности тензора ψ^{ikl} по индексам k, l. Полный 4-импульс системы при этом вообще не изменится, так как согласно (6,17) имеем:

$$\int \frac{\partial \psi^{ikl}}{\partial x^l} dS_k = \frac{1}{2} \int \left(dS_k \frac{\partial \psi^{ikl}}{\partial x^l} - dS_l \frac{\partial \psi^{ikl}}{\partial x^k} \right) = \frac{1}{2} \int \psi^{ikl} df^*_{kl},$$

где интегрирование с правой стороны равенства производится по поверхности (обычной), «охватывающей» гиперповерхность, по которой производится интегрирование с левой стороны равенства. Эта поверхность находится, очевидно, на бесконечности трехмерного пространства, и поскольку поле или частицы на бесконечности отсутствуют, интеграл равен нулю. Таким образом, 4-импульс системы является, как и следовало, однозначно определенной величиной.

Для однозначного же определения тензора T^{ik} можно воспользоваться требованием, чтобы 4-тензор момента импульса (§ 14)

выражался через 4-импульс посредством

$$M^{ik}=\int (x^i dP^k - x^k dP^i) = \frac{1}{c}\int (x^i T^{kl} - x^k T^{il})\, dS_l, \qquad (32,8)$$

т. е. так, чтобы его плотность выражалась через плотность импульса обычной формулой.

Легко найти, какому условию должен для этого удовлетворять тензор энергии-импульса. Закон сохранения момента может быть выражен, как мы уже знаем, равенством нулю дивергенции подынтегрального выражения в M^{ik}. Таким образом,

$$\frac{\partial}{\partial x^l}(x^i T^{kl} - x^k T^{il}) = 0.$$

Замечая, что $\partial x^i/\partial x^l = \delta^i_l$ и $\partial T^{kl}/\partial x^l = 0$, находим:

$$\delta^i_l T^{kl} - \delta^k_l T^{il} = T^{ki} - T^{ik} = 0,$$

или

$$T^{ik} = T^{ki}, \qquad (32,9)$$

т. е. тензор энергии-импульса должен быть симметричен.

Заметим, что тензор T^{ik}, определенный формулой (32,5), вообще говоря, не симметричен, но может быть сделан таковым заменой (32,7) с надлежащим образом выбранным ψ^{ikl}. В дальнейшем (§ 94) мы увидим, что существует способ непосредственного получения симметричного тензора T^{ik}.

Как уже упоминалось выше, если производить интегрирование в (32,6) по гиперплоскости $x^0 = \mathrm{const}$, то P^i приобретает вид

$$P^i = \frac{1}{c}\int T^{i0}\, dV, \qquad (32,10)$$

где интегрирование производится по всему пространству (трехмерному). Пространственные компоненты P^i образуют трехмерный вектор импульса системы, а временная компонента есть деленная на c ее энергия. Поэтому вектор с составляющими

$$\frac{1}{c}T^{10}, \quad \frac{1}{c}T^{20}, \quad \frac{1}{c}T^{30}$$

можно назвать *плотностью импульса*, а величину

$$W = T^{00}$$

можно рассматривать как *плотность энергии*.

Для выяснения смысла остальных компонент T^{ik} напишем уравнения сохранения (32,4), отделив в них пространственные и

временные производные:

$$\frac{1}{c}\frac{\partial T^{00}}{\partial t}+\frac{\partial T^{0\alpha}}{\partial x^{\alpha}}=0, \qquad \frac{1}{c}\frac{\partial T^{\alpha 0}}{\partial t}+\frac{\partial T^{\alpha\beta}}{\partial x^{\beta}}=0. \qquad (32,11)$$

Проинтегрируем эти уравнения по некоторому объему пространства V. Из первого имеем:

$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int T^{00}\,dV+\int\frac{\partial T^{0\alpha}}{\partial x^{\alpha}}\,dV=0,$$

или, преобразуя второй интеграл по (трехмерной) теореме Гаусса:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int T^{00}\,dV=-c\oint T^{0\alpha}\,df_{\alpha}, \qquad (32,12)$$

где интеграл справа берется по поверхности, охватывающей объем V (df_x, df_y, df_z — компоненты трехмерного вектора элемента поверхности $d\mathbf{f}$). В левой стороне равенства (32,12) стоит скорость изменения энергии, находящейся в объеме V. Отсюда видно, что выражение справа есть количество энергии, протекающей через границу этого объема, а вектор $\mathbf{S}$ с составляющими

$$cT^{01}, \quad cT^{02}, \quad cT^{03}$$

есть плотность этого потока — количество энергии, протекающей в единицу времени через единицу поверхности. Таким образом, мы приходим к важному выводу о том, что требования релятивистской инвариантности, заключенные в тензорном характере величин T^{ik}, автоматически приводят к определенной связи между потоком энергии и импульсом: плотность потока энергии равна плотности импульса, умноженной на c^2.

Из второго уравнения (32,11) аналогичным путем находим:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\frac{1}{c}\,T^{\alpha 0}\,dV=-\oint T^{\alpha\beta}\,df_{\beta}. \qquad (32,13)$$

Слева стоит изменение импульса системы в объеме V в единицу времени; поэтому $\oint T^{\alpha\beta}\,df_{\beta}$ есть количество импульса, вытекающее в единицу времени из этого объема. Таким образом, компоненты $T^{\alpha\beta}$ тензора энергии-импульса составляют трехмерный тензор плотности потока импульса — так называемый *тензор напряжений*; обозначим его через $\sigma_{\alpha\beta}$ ($\alpha, \beta = x, y, z$). Плотность потока энергии есть вектор; плотность же потока импульса, который сам по себе есть вектор, должна, очевидно, быть тензором (компонента $\sigma_{\alpha\beta}$ этого тензора есть количество α-й компоненты импульса, протекающее в единицу времени через единицу поверхности, перпендикулярную к оси x^{β}).

Выпишем еще раз таблицу, указывающую смысл различных компонент тензора энергии-импульса:

$$T^{ik}=\begin{pmatrix} W & S_x/c & S_y/c & S_z/c \\ S_x/c & \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ S_y/c & \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ S_z/c & \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}. \qquad (32,14)$$

§ 33. Тензор энергии-импульса электромагнитного поля

Применим теперь полученные в предыдущем параграфе общие соотношения к электромагнитному полю. Для электромагнитного поля величина, стоящая под знаком интеграла (32,1), равна согласно (27,4)

$$\Lambda=-\frac{1}{16\pi}F_{kl}F^{kl}.$$

Величинами q являются компоненты 4-потенциала поля A_k, так что определение (32,5) тензора T_i^k принимает вид

$$T_i^k=\frac{\partial A_l}{\partial x^i}\frac{\partial\Lambda}{\partial(\partial A_l/\partial x^k)}-\delta_i^k\Lambda.$$

Для вычисления стоящей здесь производной от Λ напишем вариацию

$$\delta\Lambda=-\frac{1}{8\pi}F^{kl}\delta F_{kl}=-\frac{1}{8\pi}F^{kl}\delta\left(\frac{\partial A_l}{\partial x^k}-\frac{\partial A_k}{\partial x^l}\right).$$

Переставляя индексы и имея в виду антисимметричность F_{kl}, получим:

$$\delta\Lambda=-\frac{1}{4\pi}F^{kl}\delta\frac{\partial A_l}{\partial x^k}.$$

Отсюда мы видим, что

$$\frac{\partial\Lambda}{\partial(\partial A_l/\partial x^k)}=-\frac{1}{4\pi}F^{kl},$$

и поэтому

$$T_i^k=-\frac{1}{4\pi}\frac{\partial A_l}{\partial x^i}F^{kl}+\frac{1}{16\pi}\delta_i^kF_{lm}F^{lm},$$

или для контравариантных компонент:

$$T^{ik}=-\frac{1}{4\pi}\frac{\partial A_l}{\partial x_i}F^k{}_l+\frac{1}{16\pi}g^{ik}F_{lm}F^{lm}.$$

Этот тензор, однако, не симметричен. Для его симметризации прибавим к нему величину

$$\frac{1}{4\pi}\frac{\partial A^i}{\partial x_l}F^k{}_l.$$

Согласно уравнению поля (30,2) в отсутствие зарядов $\partial F^{k}{}_{l}/\partial x_l = 0$, а потому

$$\frac{1}{4\pi}\frac{\partial A^i}{\partial x_l}F^k{}_l = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial x_l}(A^i F^k{}_l),$$

так что производимая замена T^{ik} относится к виду (32,7) и является допустимой. Поскольку $\frac{\partial A^l}{\partial x_i} - \frac{\partial A^i}{\partial x_l} = F^{il}$, то мы находим окончательно следующее выражение для тензора энергии-импульса электромагнитного поля:

$$T^{ik} = \frac{1}{4\pi}\left(-F^{il}F^k{}_l + \frac{1}{4}g^{ik}F_{lm}F^{lm}\right). \qquad (33,1)$$

Симметричность этого тензора очевидна. Кроме того, его след равен нулю:

$$T^i_i = 0. \qquad (33,2)$$

Выразим компоненты тензора T^{ik} через напряженности электрического и магнитного полей. С помощью значений F_{ik} из (23,5) легко убедиться в том, что T^{00} совпадает, как и следовало, с плотностью энергии (31,5), а компоненты $cT^{0\alpha}$ — с компонентами вектора Пойнтинга **S** (31,2). Пространственные же компоненты $T^{\alpha\beta}$ образуют трехмерный тензор с составляющими

$$\sigma_{xx} = \frac{1}{8\pi}\left(E_y^2 + E_z^2 - E_x^2 + H_y^2 + H_z^2 - H_x^2\right),$$

$$\sigma_{xy} = -\frac{1}{4\pi}(E_x E_y + H_x H_y)$$

и т. д., или

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{1}{4\pi}\left\{-E_\alpha E_\beta - H_\alpha H_\beta + \frac{1}{2}\delta_{\alpha\beta}(E^2 + H^2)\right\}. \qquad (33,3)$$

Этот трехмерный тензор называют *максвелловским тензором напряжений*.

Для приведения тензора T^{ik} к диагональному виду надо произвести преобразование к системе отсчета, в которой векторы **E** и **H** (в данной точке пространства и в данный момент времени) параллельны друг другу, либо один из них равен нулю; как мы знаем (§ 25), такое преобразование возможно всегда, за исключением случая, когда **E** и **H** взаимно перпендикулярны и равны по величине. Легко видеть, что после преобразования единственными отличными от нуля компонентами T^{ik} будут:

$$T^{00} = -T^{11} = T^{22} = T^{33} = W$$

(ось x выбрана в направлении полей).

Если же векторы **E** и **H** взаимно перпендикулярны и равны по величине, то тензор T^{ik} не может быть приведен к диагональному

виду[1]). Отличные от нуля его компоненты в этом случае равны

$$T^{00}=T^{33}=T^{30}=W$$

(причем ось x выбрана вдоль направления **E**, а ось y — вдоль **H**).

До сих пор мы рассматривали поле без зарядов. При наличии заряженных частиц тензор энергии-импульса всей системы представляет собой сумму тензоров энергии-импульса электромагнитного поля и частиц, причем в последнем частицы рассматриваются как невзаимодействующие.

Для определения вида тензора энергии-импульса частиц необходимо описывать распределение масс в пространстве с помощью «плотности массы», аналогично тому, как мы описываем распределение точечных зарядов с помощью их плотности. Аналогично формуле (28,1) для плотности зарядов, плотность масс можно написать в виде

$$\mu=\sum_a m_a\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_a), \tag{33,4}$$

где $\mathbf{r}_a$ — радиус-векторы частиц, а суммирование производится по всем частицам системы.

«Плотность 4-импульса» частиц напишется в виде $\mu c u_i$. Как мы знаем, эта плотность представляет собой компоненты $T^{0\alpha}/c$ тензора энергии-импульса, т. е. $T^{0\alpha}=\mu c^2 u^\alpha$ $(\alpha=1,2,3)$. Но плотность массы является временной компонентой 4-вектора $\frac{\mu}{c}\frac{dx^k}{dt}$ (аналогично плотности зарядов, см. § 28). Поэтому тензор энергии-импульса системы невзаимодействующих частиц есть

$$T^{ik}=\mu c\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^k}{dt}=\mu c u^i u^k\frac{ds}{dt}. \tag{33,5}$$

Этот тензор, как и следовало, симметричен.

Убедимся прямым вычислением в том, что энергия и импульс системы, определенные как суммы энергий и импульсов поля и частиц, действительно сохраняются. Другими словами, мы должны проверить уравнение

$$\frac{\partial}{\partial x^k}\left(T^{(п)k}_{i}+T^{(ч)k}_{i}\right)=0, \tag{33,6}$$

выражающее эти законы сохранения.

Дифференцируя выражение (33,1), пишем:

$$\frac{\partial T^{(п)k}_{i}}{\partial x^k}=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{2}F^{lm}\frac{\partial F_{lm}}{\partial x^i}-F^{kl}\frac{\partial F_{il}}{\partial x^k}-F_{il}\frac{\partial F^{kl}}{\partial x^k}\right).$$

[1]) Тот факт, что приведение симметричного 4-тензора T^{ik} к главным осям может оказаться невозможным, связан с псевдоевклидовостью 4-пространства (см. также задачу к § 94).

Подставив сюда согласно уравнениям Максвелла (26,5) и (30,2)

$$\frac{\partial F_{lm}}{\partial x^i} = -\frac{\partial F_{mi}}{\partial x^l} - \frac{\partial F_{il}}{\partial x^m}, \quad \frac{\partial F^{kl}}{\partial x^k} = \frac{4\pi}{c} j^l,$$

получим:

$$\frac{\partial T^{(\text{п})k}_i}{\partial x^k} = \frac{1}{4\pi}\left(-\frac{1}{2} F^{lm}\frac{\partial F_{mi}}{\partial x^l} - \frac{1}{2} F^{lm}\frac{\partial F_{il}}{\partial x^m} - F^{kl}\frac{\partial F_{il}}{\partial x^k} - \frac{4\pi}{c} F_{il} j^l\right).$$

Перестановкой индексов легко показать, что первые три члена взаимно сокращаются и остается

$$\frac{\partial T^{(\text{п})k}_i}{\partial x^k} = -\frac{1}{c} F_{il} j^l. \tag{33,7}$$

Дифференцирование же тензора (33,5) дает

$$\frac{\partial T^{(\text{ч})k}_i}{\partial x^k} = c u_i \frac{\partial}{\partial x^k}\left(\mu \frac{dx^k}{dt}\right) + \mu c \frac{dx^k}{dt}\frac{\partial u_i}{\partial x^k}.$$

Первый член в этом выражении обращается в нуль в силу сохранения массы невзаимодействующих частиц. Действительно, величины $\mu \frac{dx^k}{dt}$ составляют 4-вектор «тока масс», аналогичный 4-вектору тока зарядов (28,2); сохранение же масс выражается равенством нулю 4-дивергенции этого 4-вектора

$$\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\mu \frac{dx^k}{dt}\right) = 0, \tag{33,8}$$

подобно тому, как сохранение заряда выражается уравнением (29,4).

Таким образом, имеем:

$$\frac{\partial T^{(\text{ч})k}_i}{\partial x^k} = \mu c \frac{dx^k}{dt}\frac{\partial u_i}{\partial x^k} = \mu c \frac{du_i}{dt}.$$

Для дальнейшего преобразования воспользуемся уравнением движения зарядов в поле, написанным в четырехмерном виде (23,4),

$$mc\frac{du_i}{ds} = \frac{e}{c} F_{ik} u^k.$$

При переходе к непрерывному распределению заряда и массы имеем, по определению плотностей μ и ρ: $\mu/m = \rho/e$. Поэтому можно написать уравнение движения в виде

$$\mu c \frac{du_i}{ds} = \frac{\rho}{c} F_{ik} u^k$$

или

$$\mu c \frac{du_i}{dt} = \frac{1}{c} F_{ik} \rho u^k \frac{ds}{dt} = \frac{1}{c} F_{ik} j^k.$$

Таким образом,

$$\frac{\partial T^{(ч)k}_i}{\partial x^k} = \frac{1}{c} F_{ik} j^k. \tag{33,9}$$

Складывая с (33,7), мы действительно получаем нуль, т. е. приходим к уравнению (33,6).

§ 34. Теорема вириала

Поскольку след тензора энергии-импульса электромагнитного поля равен нулю, то сумма T_i^i для любой системы взаимодействующих частиц сводится к следу тензора энергии-импульса одних лишь частиц. Воспользовавшись выражением (33,5), имеем поэтому:

$$T_i^i = T^{(ч)i}_i = \mu c u_i u^i \frac{ds}{dt} = \mu c \frac{ds}{dt} = \mu c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

Перепишем этот результат, возвратившись к суммированию по частицам, т. е. подставив μ в виде суммы (33,4). Тогда получим окончательно:

$$T_i^i = \sum_a m_a c^2 \sqrt{1 - \frac{v_a^2}{c^2}}\, \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a). \tag{34,1}$$

Отметим, что согласно этой формуле для всякой системы имеем:

$$T_i^i \geqslant 0, \tag{34,2}$$

причем знак равенства имеет место только для электромагнитного поля без зарядов.

Рассмотрим замкнутую систему заряженных частиц, совершающих финитное движение, при котором все характеризующие систему величины (координаты, импульсы) меняются в конечных интервалах [1].

Усредним уравнение

$$\frac{1}{c} \frac{\partial T^{\alpha 0}}{\partial t} + \frac{\partial T^{\alpha\beta}}{\partial x^\beta} = 0$$

[см. (32,11)] по времени. При этом среднее значение производной $\partial T^{\alpha 0}/\partial t$, как и вообще производной от всякой величины, меняющейся

[1]) При этом предполагается также, что и электромагнитное поле системы исчезает на бесконечности. Это значит, что если в системе происходит излучение электромагнитных волн, то предполагается, что специальные «отражающие стенки» препятствуют уходу этих волн на бесконечность.

в конечном интервале, равно нулю[1]). Поэтому находим:

$$\frac{\partial}{\partial x^\beta}\overline{T}^\beta_\alpha = 0.$$

Умножаем это уравнение на x^α и интегрируем по всему пространству. Интеграл преобразуем по теореме Гаусса, имея в виду, что на бесконечности $\overline{T}^\beta_\alpha = 0$, и потому интеграл по поверхности исчезает:

$$\int x^\alpha \frac{\partial \overline{T}^\beta_\alpha}{\partial x^\beta} dV = -\int \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^\beta}\overline{T}^\beta_\alpha dV = -\int \delta^\alpha_\beta \overline{T}^\beta_\alpha dV = 0,$$

или окончательно

$$\int \overline{T}^\alpha_\alpha dV = 0. \qquad (34,3)$$

На основании этого равенства мы можем написать для интеграла от $\overline{T}^i_i = \overline{T}^\alpha_\alpha + \overline{T}^0_0$:

$$\int \overline{T}^i_i dV = \int \overline{T}^0_0 dV = \mathscr{E},$$

где $\mathscr{E}$ — полная энергия системы.

Наконец, подставляя сюда (34,1), найдем:

$$\mathscr{E} = \sum_a \overline{m_a c^2 \sqrt{1 - \frac{v_a^2}{c^2}}}. \qquad (34,4)$$

Это соотношение является релятивистским обобщением *теоремы вириала* классической механики (см. I § 10). Для малых скоростей оно переходит в

$$\mathscr{E} - \sum_a m_a c^2 = -\sum_a \overline{\frac{m_a v_a^2}{2}},$$

т. е. полная энергия системы за вычетом энергии покоя частиц равна взятому с обратным знаком среднему значению кинетической энергии, в согласии с результатом, получаемым из классической теоремы вириала для системы заряженных частиц (взаимодействующих по закону Кулона).

---

[1]) Пусть f есть такая величина. Тогда среднее значение производной df/dt за некоторый интервал времени T есть

$$\overline{\frac{df}{dt}} = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{df}{dt} dt = \frac{f(T) - f(0)}{T}.$$

Поскольку $f(t)$ меняется только в конечных пределах, то при неограниченном увеличении T это среднее значение действительно стремится к нулю.

§ 35. Тензор энергии-импульса макроскопических тел

Наряду с тензором энергии-импульса системы точечных частиц (33,5) нам понадобится в дальнейшем выражение этого тензора для макроскопических тел, рассматриваемых как сплошные.

Поток импульса через элемент поверхности тела есть не что иное, как действующая на этот элемент сила. Поэтому $\sigma_{\alpha\beta}\,df_\beta$ есть α-я компонента силы, действующей на элемент поверхности $d\mathbf{f}$. Воспользуемся теперь системой отсчета, в которой данный элемент объема тела покоится. В такой системе отсчета имеет место закон Паскаля, т. е. давление p, оказываемое данным участком тела, одинаково по всем направлениям и везде перпендикулярно к площадке, на которую оно производится [1]). Поэтому мы можем написать $\sigma_{\alpha\beta}\,df_\beta = p\,df_\alpha$, откуда тензор напряжений $\sigma_{\alpha\beta} = p\delta_{\alpha\beta}$. Что касается компонент $T^{\alpha 0}$, дающих плотность импульса, то для данного элемента объема тела в рассматриваемой системе отсчета они равны нулю. Компонента же T^{00}, как всегда, равна плотности энергии тела, которую мы обозначим здесь через ε; ε/c^2 есть при этом плотность массы, т. е. масса единицы объема. Подчеркнем, что речь идет здесь о единице собственного объема, т. е. объема в той системе отсчета, в которой данный участок тела покоится.

Таким образом, в рассматриваемой системе отсчета тензор энергии-импульса (для данного участка тела) имеет вид:

$$T^{ik} = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix}. \qquad (35,1)$$

Легко найти теперь выражение для тензора энергии-импульса в любой системе отсчета. Для этого введем 4-скорость u^i макроскопического движения элемента объема тела. В системе покоя этого элемента $u^i = (1,0)$. Выражение для T^{ik} должно быть выбрано так, чтобы в этой системе он приобретал вид (35,1). Легко проверить, что таковым является

$$T^{ik} = (p+\varepsilon)\,u^i u^k - p g^{ik}, \qquad (35,2)$$

или для смешанных компонент:

$$T_i^k = (p+\varepsilon)\,u_i u^k - p\delta_i^k.$$

---

[1]) Строго говоря, закон Паскаля имеет место только для жидкостей и газов. Однако для твердых тел максимальные возможные разности давлений в разных направлениях ничтожны по сравнению с теми давлениями, которые могут играть роль в теории относительности, так что их учет не представляет интереса.

Этим и определяется тензор энергии-импульса макроскопического тела. Соответствующие выражения для плотности энергии ε, плотности потока энергии $\mathbf{S}$ и тензора напряжений $\sigma_{\alpha\beta}$:

$$W=\frac{\varepsilon+p\frac{v^2}{c^2}}{1-\frac{v^2}{c^2}},\qquad \mathbf{S}=\frac{(p+\varepsilon)\,\mathbf{v}}{1-\frac{v^2}{c^2}},$$

$$\sigma_{\alpha\beta}=\frac{(p+\varepsilon)\,v_\alpha v_\beta}{c^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}+p\delta_{\alpha\beta}. \qquad (35,3)$$

Если скорость $\mathbf{v}$ макроскопического движения мала по сравнению со скоростью света, то имеем приближенно:

$$\mathbf{S}=(p+\varepsilon)\,\mathbf{v}.$$

Поскольку $\mathbf{S}/c^2$ есть плотность импульса, то мы видим, что роль плотности массы играет в этом случае сумма $(p+\varepsilon)/c^2$.

Выражение для T^{ik} упрощается в случае, если скорости всех частиц, входящих в состав тела, малы по сравнению со скоростью света (скорость же макроскопического движения может быть произвольной). В этом случае в плотности энергии ε можно пренебречь всеми ее частями, малыми по сравнению с энергией покоя, т. е. можно писать $\mu_0 c^2$ вместо ε, где μ_0 — сумма масс частиц, находящихся в единице (собственного) объема тела (подчеркнем, что в общем случае μ_0 надо отличать от точной плотности массы ε/c^2, включающей в себя также и массу, происходящую от энергии микроскопического движения частиц в теле и энергии их взаимодействия). Что касается давления, определяемого энергией микроскопического движения молекул, то оно в рассматриваемом случае, конечно, тоже мало по сравнению с плотностью энергии покоя $\mu_0 c^2$. Таким образом, находим в этом случае:

$$T^{ik}=\mu_0 c^2 u^i u^k. \qquad (35,4)$$

Из выражения (35,2) имеем:

$$T_i^i=-\varepsilon+3p. \qquad (35,5)$$

Общее свойство (34,2) тензора энергии-импульса любой системы показывает теперь, что для давления и плотности макроскопического тела всегда имеет место неравенство

$$p<\frac{\varepsilon}{3}. \qquad (35,6)$$

Сравним выражение (35,5) с общей формулой (34,1), имеющей место для любых систем. Поскольку мы рассматриваем сейчас макроскопическое тело, то выражение (34,1) надо усреднить по всем

значениям $\mathbf{r}$ в единице объема. В результате находим:

$$\varepsilon-3p=\sum m_a c^2\sqrt{1-\frac{v_a^2}{c^2}} \tag{35,7}$$

(суммирование производится по частицам, находящимся в единице объема).

Применим полученные формулы к идеальному газу, который мы предположим состоящим из одинаковых частиц. Поскольку частицы идеального газа не взаимодействуют друг с другом, можно воспользоваться формулой (33,5), усреднив ее. Таким образом, для идеального газа

$$T^{ik}=nmc\overline{\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^k}{ds}},$$

где n — число частиц в единице объема, а черта обозначает усреднение по всем частицам. Если в газе нет никакого макроскопического движения, то мы имеем, с другой стороны, для T^{ik} выражение (35,1). Сравнение обеих формул приводит к уравнениям:

$$\varepsilon=nm\overline{\frac{c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}},\quad p=\frac{nm}{3}\overline{\frac{v^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}}. \tag{35,8}$$

Эти уравнения определяют плотность и давление релятивистского идеального газа через скорости частиц; вторая из них заменяет собой известную формулу $p=nm\overline{v^2}/3$ нерелятивистской кинетической теории газов.

ГЛАВА V

ПОСТОЯННОЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ

§ 36. Закон Кулона

Для постоянного электрического *(электростатического)* поля уравнения Максвелла имеют вид:

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho, \tag{36,1}$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0. \tag{36,2}$$

Электрическое поле $\mathbf{E}$ выражается через один только скалярный потенциал соотношением

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \varphi. \tag{36,3}$$

Подставляя (36,3) в (36,1), находим уравнение, которому удовлетворяет потенциал постоянного электрического поля:

$$\Delta\varphi = -4\pi\rho. \tag{36,4}$$

Это уравнение носит название *уравнения Пуассона*. В пустоте, т. е. при $\rho = 0$, потенциал удовлетворяет *уравнению Лапласа*

$$\Delta\varphi = 0. \tag{36,5}$$

Из последнего уравнения следует, в частности, что потенциал электрического поля нигде не может иметь ни максимума, ни минимума. Действительно, для того чтобы φ имело экстремальное значение, необходимо, чтобы все первые производные от φ по координатам были равны нулю, а вторые производные $\partial^2\varphi/\partial x^2$, $\partial^2\varphi/\partial y^2$, $\partial^2\varphi/\partial z^2$ имели одинаковый знак. Последнее, однако, невозможно, так как при этом не может быть удовлетворено уравнение (36,5).

Определим теперь поле, создаваемое точечным зарядом. Из соображений симметрии ясно, что оно будет направлено в каждой точке по радиусу-вектору, проведенному из точки, в которой находится заряд e. Из тех же соображений ясно, что абсолютная величина E поля будет зависеть только от расстояния R до заряда. Для нахождения этой абсолютной величины применим уравнение (36,1) в интегральной

форме (30,5). Поток электрического поля через шаровую поверхность с радиусом R, проведенную вокруг заряда e, равен $4\pi R^2 E$; этот поток должен быть равен $4\pi e$. Отсюда находим:

$$E = \frac{e}{R^2}.$$

В векторном виде:

$$\mathbf{E} = \frac{e\mathbf{R}}{R^3}. \qquad (36,6)$$

Таким образом, поле, создаваемое точечным зарядом, обратно пропорционально квадрату расстояния от этого заряда. Это — так называемый *закон Кулона*. Потенциал этого поля

$$\varphi = \frac{e}{R}. \qquad (36,7)$$

Если мы имеем систему зарядов, то создаваемое ею поле, согласно принципу суперпозиции, равно сумме полей, создаваемых каждым из зарядов в отдельности. В частности, потенциал такого поля равен

$$\varphi = \sum_a \frac{e_a}{R_a},$$

где R_a — расстояние от заряда e_a до точки, в которой мы ищем потенциал. Если ввести плотность заряда ρ, то эта формула приобретает вид

$$\varphi = \int \frac{\rho}{R} dV, \qquad (36,8)$$

где R — расстояние от элемента объема dV до данной точки («точки наблюдения») поля.

Отметим здесь математическое соотношение, получающееся при подстановке в (36,4) значений ρ и φ для точечного заряда, т. е. $\rho = e\delta(\mathbf{R})$ и $\varphi = e/R$. Мы находим тогда:

$$\Delta \frac{1}{R} = -4\pi\delta(\mathbf{R}). \qquad (36,9)$$

§ 37. Электростатическая энергия зарядов

Определим энергию системы зарядов. При этом будем исходить из представления об энергии поля, т. е. из выражения (31,5) для плотности энергии. Именно, энергия системы зарядов должна быть равна

$$U = \frac{1}{8\pi} \int E^2 dV,$$

где $\mathbf{E}$ есть поле, создаваемое этими зарядами, а интеграл берется по всему пространству. Подставляя сюда $\mathbf{E} = -\operatorname{grad}\varphi$, можно

преобразовать U следующим образом:

$$U = -\frac{1}{8\pi}\int \mathbf{E}\operatorname{grad}\varphi\, dV = -\frac{1}{8\pi}\int \operatorname{div}(\mathbf{E}\varphi)\, dV + \frac{1}{8\pi}\int \varphi \operatorname{div}\mathbf{E}\, dV.$$

Первый из этих интегралов согласно теореме Гаусса равен интегралу от $\mathbf{E}\varphi$ по поверхности, ограничивающей объем интегрирования; но поскольку интегрирование производится по всему пространству, а на бесконечности поле равно нулю, то этот интеграл исчезает. Подставляя во второй интеграл $\operatorname{div}\mathbf{E} = 4\pi\rho$, находим следующее выражение для энергии системы зарядов:

$$U = \frac{1}{2}\int \rho\varphi\, dV. \tag{37,1}$$

Для системы точечных зарядов e_a можно вместо интеграла написать сумму по зарядам

$$U = \frac{1}{2}\sum e_a\varphi_a, \tag{37,2}$$

где φ_a — потенциал поля, создаваемого всеми зарядами в точке, где находится заряд e_a.

Если применить полученную формулу к одной элементарной заряженной частице (скажем, электрону) и полю, производимому им самим, мы придем к выводу, что частица должна обладать «собственной» потенциальной энергией, равной $e\varphi/2$, где φ — потенциал производимого зарядом поля в месте, где он сам находится. Но мы знаем, что в теории относительности всякую элементарную частицу надо рассматривать как точечную. Потенциал же $\varphi = e/R$ ее поля в точке $R = 0$ обращается в бесконечность. Таким образом, согласно электродинамике электрон должен был бы обладать бесконечной «собственной» энергией, а следовательно, и бесконечной массой. Физическая бессмысленность этого результата показывает, что уже основные принципы самой электродинамики приводят к тому, что ее применимость должна быть ограничена определенными пределами.

Заметим, что ввиду бесконечности получающихся из электродинамики «собственной» энергии и массы в рамках самой классической электродинамики нельзя поставить вопрос о том, является ли вся масса электрона электромагнитной (т. е. связанной с электромагнитной собственной энергией частицы) [1]).

Поскольку возникновение не имеющей физического смысла бесконечной «собственной» энергии элементарной частицы связано с тем, что такую частицу надо рассматривать как точечную, мы можем за-

[1]) С чисто формальной точки зрения конечность массы электрона можно трактовать путем введения бесконечной отрицательной массы неэлектромагнитного происхождения, компенсирующей бесконечность электромагнитной массы («перенормировка» массы). Мы увидим, однако, в дальнейшем (§ 75), что этим способом не ликвидируются все внутренние противоречия классической электродинамики.

ключить, что электродинамика как логически замкнутая физическая теория становится внутренне-противоречивой при переходе к достаточно малым расстояниям. Можно поставить вопрос о том, каков порядок величины этих расстояний. На этот вопрос можно ответить, заметив, что для собственной электромагнитной энергии электрона надо было бы получить значение порядка величины энергии покоя mc^2. Если, с другой стороны, рассматривать электрон, как обладающий некоторыми размерами R_0, то его собственная потенциальная энергия была бы порядка e^2/R_0. Из требования, чтобы обе эти величины были одного порядка, $e^2/R_0 \sim mc^2$, находим:

$$R_0 \sim \frac{e^2}{mc^2}. \qquad (37,3)$$

Эти размеры (их называют «радиусом» электрона) определяют границы применимости электродинамики к электрону, следующие уже из ее собственных основных принципов. Надо, однако, иметь в виду, что в действительности пределы применимости излагаемой здесь классической электродинамики лежат еще гораздо выше вследствие квантовых явлений [1]).

Вернемся снова к формуле (37,2). Стоящие в ней потенциалы φ_a, согласно закону Кулона, равны

$$\varphi_a = \sum \frac{e_b}{R_{ab}}, \qquad (37,4)$$

где R_{ab} — расстояние между зарядами e_a, e_b. Выражение для энергии (37,2) состоит из двух частей. Во-первых, оно содержит бесконечную постоянную — собственную энергию зарядов, — не зависящую от их взаимного расположения. Вторая часть есть энергия взаимодействия зарядов, зависящая от их расположения. Только эта часть и имеет, очевидно, физический интерес. Она равна

$$U' = \frac{1}{2} \sum e_a \varphi_a', \qquad (37,5)$$

где

$$\varphi_a' = \sum_{b\,(\neq a)} \frac{e_b}{R_{ab}} \qquad (37,6)$$

есть потенциал в точке нахождения e_a, создаваемый всеми зарядами, за исключением e_a. Иначе можно написать

$$U' = \frac{1}{2} \sum_{a \neq b} \frac{e_a e_b}{R_{ab}}. \qquad (37,7)$$

В частности, энергия взаимодействия двух зарядов

$$U' = \frac{e_1 e_2}{R_{12}}. \qquad (37,8)$$

[1]) Квантовые эффекты становятся существенными при расстояниях порядка $\hbar/mc$, где $\hbar$ — постоянная Планка.

§ 38. Поле равномерно движущегося заряда

Определим поле, создаваемое зарядом e, движущимся равномерно со скоростью V. Неподвижную систему отсчета будем называть системой K; систему отсчета, движущуюся вместе с зарядом, — системой K'. Пусть заряд находится в начале координат системы K'; система K' движется относительно K параллельно оси x; оси y и z параллельны y' и z'. В момент времени $t=0$ начала обеих систем совпадают. Координаты заряда в системе K, следовательно, $x=Vt$, $y=z=0$. В системе K' мы имеем постоянное электрическое поле с векторным потенциалом $\mathbf{A}'=0$ и скалярным $\varphi'=e/R'$, где $R'^2=x'^2+y'^2+z'^2$. В системе K согласно формулам (24,1) с $\mathbf{A}'=0$:

$$\varphi=\frac{\varphi'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}=\frac{e}{R'\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}. \tag{38,1}$$

Мы должны теперь выразить R' через координаты x, y, z в системе K. Согласно формулам преобразования Лоренца

$$x'=\frac{x-Vt}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}},\quad y'=y,\quad z'=z,$$

и отсюда

$$R'^2=\frac{(x-Vt)^2+\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)(y^2+z^2)}{1-\frac{V^2}{c^2}}. \tag{38,2}$$

Подставляя это в (38,1), находим:

$$\varphi=\frac{e}{R^*}, \tag{38,3}$$

где введено обозначение

$$R^{*2}=(x-Vt)^2+\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)(y^2+z^2). \tag{38,4}$$

Векторный потенциал в системе K равен

$$\mathbf{A}=\varphi\frac{\mathbf{V}}{c}=\frac{e\mathbf{V}}{cR^*}. \tag{38,5}$$

В системе K' магнитное поле $\mathbf{H}'$ отсутствует, а электрическое

$$\mathbf{E}'=\frac{e\mathbf{R}'}{R'^3}.$$

По формулам (24,2) находим:

$$E_x = E'_x = \frac{ex'}{R'^3}, \quad E_y = \frac{E'_y}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} = \frac{ey'}{R'^3\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}, \quad E_z = \frac{ez'}{R'^3\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}.$$

Подставляя сюда R', x', y', z', выраженные через x, y, z, находим:

$$\mathbf{E} = \left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)\frac{e\mathbf{R}}{R^{*3}}, \tag{38,6}$$

где $\mathbf{R}$ — радиус-вектор от заряда e к точке наблюдения x, y, z поля (его компоненты равны $x-Vt$, y, z).

Это выражение для $\mathbf{E}$ можно написать в другом виде, введя угол θ между направлением движения и радиус-вектором $\mathbf{R}$. Очевидно, что $y^2+z^2=R^2\sin^2\theta$, и потому R^{*2} можно написать в виде

$$R^{*2} = R^2\left(1-\frac{V^2}{c^2}\sin^2\theta\right). \tag{38,7}$$

Тогда для $\mathbf{E}$ имеем:

$$\mathbf{E} = \frac{e\mathbf{R}}{R^3}\frac{1-\frac{V^2}{c^2}}{\left(1-\frac{V^2}{c^2}\sin^2\theta\right)^{3/2}}. \tag{38,8}$$

При заданном расстоянии R от заряда величина поля E возрастает с увеличением θ от нуля до $\pi/2$ (или при уменьшении от π до $\pi/2$). Наименьшее значение поле имеет в направлении, параллельном направлению движения ($\theta=0$, π); оно равно

$$E_{\parallel} = \frac{e}{R^2}\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right).$$

Наибольшим же является поле, перпендикулярное к скорости ($\theta = \pi/2$), равное

$$E_{\perp} = \frac{e}{R^2}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}.$$

Отметим, что при увеличении скорости поле $E_{\parallel}$ падает, а $E_{\perp}$ возрастает. Можно сказать наглядно, что электрическое поле движущегося заряда как бы «сплющивается» по направлению движения. При скоростях V, близких к скорости света, знаменатель в формуле (38,8) близок к нулю в узком интервале значений θ вокруг значения $\theta=\pi/2$. «Ширина» этого интервала порядка величины

$$\Delta\theta \sim \sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}.$$

Таким образом, электрическое поле быстро движущегося заряда, на заданном расстоянии от него, заметно отлично от нуля лишь в узком интервале углов вблизи экваториальной плоскости, причем ширина этого интервала падает с увеличением V как $\sqrt{1-V^2/c^2}$.

Магнитное поле в системе K равно

$$\mathbf{H}=\frac{1}{c}\,[\mathbf{VE}] \tag{38,9}$$

[см. (24,5)]. В частности, при $V \ll c$ электрическое поле приближенно дается обычной формулой закона Кулона $\mathbf{E}=e\mathbf{R}/R^3$, и тогда магнитное поле

$$\mathbf{H}=\frac{e}{c}\,\frac{[\mathbf{VR}]}{R^3}. \tag{38,10}$$

Задача

Определить силу взаимодействия (в системе K) между двумя зарядами, движущимися с одинаковыми скоростями $\mathbf{V}$.

Решение. Искомую силу $\mathbf{F}$ вычисляем как силу, действующую на один из зарядов (e_1) в поле, создаваемом вторым зарядом (e_2). Имеем с помощью (38,9):

$$\mathbf{F}=e_1\mathbf{E}_2+\frac{e_1}{c}\,[\mathbf{V}\mathbf{H}_2]=e_1\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)\mathbf{E}_2+\frac{e_1}{c^2}\,\mathbf{V}\,(\mathbf{V}\mathbf{E}_2).$$

Подставив сюда $\mathbf{E}_2$ из (38,8), получим для составляющих силы в направлении движения (F_x) и перпендикулярно к нему (F_y):

$$F_x=\frac{e_1e_2}{R^2}\,\frac{\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)\cos\theta}{\left(1-\frac{V^2}{c^2}\sin^2\theta\right)^{3/2}},\qquad F_y=\frac{e_1e_2}{R^2}\,\frac{\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)^2\sin\theta}{\left(1-\frac{V^2}{c^2}\sin^2\theta\right)^{3/2}},$$

где $\mathbf{R}$ — радиус-вектор от e_2 к e_1, а θ — угол между $\mathbf{R}$ и $\mathbf{V}$.

§ 39. Движение в кулоновом поле

Рассмотрим движение частицы с массой m и зарядом e в поле создаваемом другим зарядом e'; мы предполагаем, что масса последнего настолько велика, что его можно считать неподвижным. Тогда задача сводится к исследованию движения заряда e в центрально-симметрическом электрическом поле с потенциалом $\varphi=e'/r$.

Полная энергия частицы равна

$$\mathscr{E}=c\sqrt{p^2+m^2c^2}+\frac{\alpha}{r},$$

где $\alpha=ee'$. Если пользоваться полярными координатами в плоскости движения частицы, то, как известно из механики,

$$p^2=\frac{M^2}{r^2}+p_r^2,$$

где p_r — радиальная компонента импульса, а M — постоянный момент импульса частицы. Тогда

$$\mathscr{E} = c\sqrt{p_r^2 + \frac{M^2}{r^2} + m^2c^2} + \frac{\alpha}{r}. \tag{39,1}$$

Выясним вопрос о том, может ли частица при своем движении приближаться сколь угодно близко к центру. Прежде всего очевидно, что это во всяком случае невозможно, если заряды e и e' отталкиваются, т. е. e и e' — одного знака. Далее, в случае притяжения (e и e' имеют различные знаки) неограниченное приближение к центру невозможно, если $Mc > |\alpha|$; действительно, в этом случае первый член в (39,1) всегда больше второго, и при $r \to 0$ правая сторона этого равенства стремилась бы к бесконечности. Напротив, если $Mc < |\alpha|$, то при $r \to 0$ это выражение может оставаться конечным (при этом, разумеется, стремится к бесконечности p_r). Таким образом, если

$$cM < |\alpha|, \tag{39,2}$$

то частица при своем движении «падает» на притягивающий ее заряд, — в противоположность тому, что в нерелятивистской механике в кулоновом поле такое падение вообще невозможно (за исключением только случая $M = 0$, когда частица e летит прямо на частицу e').

Полное определение движения заряда в кулоновом поле удобнее всего производить, исходя из уравнения Гамильтона — Якоби. Выберем полярные координаты r, φ в плоскости движения. Уравнение Гамильтона — Якоби (16,11) имеет вид

$$-\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\alpha}{r}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \varphi}\right)^2 + m^2c^2 = 0.$$

Ищем S в виде

$$S = -\mathscr{E}t + M\varphi + f(r),$$

где $\mathscr{E}$ и M — постоянные энергия и момент импульса движущейся частицы. В результате находим:

$$S = -\mathscr{E}t + M\varphi + \int \sqrt{\frac{1}{c^2}\left(\mathscr{E} - \frac{\alpha}{r}\right)^2 - \frac{M^2}{r^2} - m^2c^2} \cdot dr. \tag{39,3}$$

Траектория определяется уравнением $\partial S/\partial M = \text{const}$. Интегрирование в (39,3) приводит к следующим результатам для траектории:

а) если $Mc > |\alpha|$:

$$(c^2M^2 - \alpha^2)\frac{1}{r} = c\sqrt{(M\mathscr{E})^2 - m^2c^2(M^2c^2 - \alpha^2)}\cos\left(\varphi\sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{c^2M^2}}\right) - \mathscr{E}\alpha; \tag{39,4}$$

b) Если $Mc < |\alpha|$:

$$(\alpha^2 - c^2M^2)\frac{1}{r} = \pm c\sqrt{(M\mathcal{E})^2 + m^2c^2(\alpha^2 - M^2c^2)}\,\mathrm{ch}\left(\varphi\sqrt{\frac{\alpha^2}{c^2M^2} - 1}\right) + \mathcal{E}\alpha$$

c) если $Mc = |\alpha|$: (39,5)

$$\frac{2\mathcal{E}\alpha}{r} = \mathcal{E}^2 - m^2c^4 - \varphi^2\left(\frac{\mathcal{E}\alpha}{cM}\right)^2. \qquad (39,6)$$

Постоянная интегрирования заключена в произвольном выборе начала отсчета угла φ.

В (39,4) выбор знака перед корнем несуществен, так как тоже связан с выбором начала отсчета угла φ под знаком cos. Изображаемая этим уравнением траектория в случае притяжения ($\alpha < 0$) лежит целиком при конечных значениях r (финитное движение), если $\mathcal{E} < mc^2$. Если же $\mathcal{E} > mc^2$, то r может обращаться в бесконечность (движение инфинитно). Финитному движению соответствует в нерелятивистской механике движение по замкнутым орбитам (эллипсам). В релятивистской же механике траектория никогда не может быть замкнутой — из (39,4) видно, что при изменении угла φ на 2π расстояние r от центра не возвращается к исходному значению. Вместо эллипсов мы имеем здесь орбиты в виде незамкнутых «розеток». Таким образом, в то время как в нерелятивистской механике финитное движение в кулоновом поле происходит по замкнутым орбитам, в релятивистской механике кулоново поле теряет это свое свойство.

В (39,5) перед корнем должен быть выбран знак $+$ при $\alpha < 0$ и знак $-$ при $\alpha > 0$ [другой выбор знаков соответствовал бы измененному знаку перед корнем в (39,1)].

При $\alpha < 0$ траектории (39,5) и (39,6) представляют собой спирали с радиусом r, стремящимся к нулю при $\varphi \to \infty$. Время же, в течение которого происходит «падение» заряда в начало координат, конечно. Убедиться в этом можно, замечая, что зависимость координаты r от времени определяется равенством $\partial S/\partial\mathcal{E} = \mathrm{const}$; подставляя сюда (39,3), увидим, что время определяется интегралом, сходящимся при $r \to 0$.

Задачи

1. Определить угол отклонения заряда, пролетающего в кулоновом поле отталкивания ($\alpha > 0$).

Решение. Угол отклонения χ равен $\chi = \pi - 2\varphi_0$, где φ_0 — угол между двумя асимптотами траектории (39,4). Находим:

$$\chi = \pi - \frac{2cM}{\sqrt{c^2M^2 - \alpha^2}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{v\sqrt{c^2M^2 - \alpha^2}}{c\alpha},$$

где v — скорость заряда на бесконечности.

2. Определить эффективное сечение рассеяния на малые углы при рассеянии частиц кулоновым полем.

Решение. Эффективное сечение $d\sigma$ есть отношение числа частиц, рассеянных (в 1 *сек*) в данный элемент d_0 телесного угла, к плотности рассеиваемого потока частиц (т. е. к числу частиц, проходящих в 1 *сек* через 1 $см^2$ площади поперечного сечения пучка частиц).

Поскольку угол χ отклонения частицы при ее пролетании через поле определяется «прицельным расстоянием» ρ (т. е. расстоянием от центра до прямой, по которой двигался бы заряд в отсутствие поля), то

$$d\sigma = 2\pi\rho\, d\rho = 2\pi\rho \frac{d\rho}{d\chi} d\chi = \rho \frac{d\rho}{d\chi} \frac{d_0}{\sin\chi},$$

где $d_0 = 2\pi \sin\chi\, d\chi$ (см. I § 18). Угол отклонения (если он мал) можно считать равным отношению приращения импульса к его первоначальному значению. Приращение импульса равно интегралу по времени от силы, действующей на заряд в направлении, перпендикулярном к направлению движения; последняя приближенно равна $\frac{\alpha}{r^2}\frac{\rho}{r}$. Таким образом, имеем:

$$\chi = \frac{1}{p}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\alpha\rho\, dt}{(\rho^2+v^2t^2)^{3/2}} = \frac{2\alpha}{p\rho v}$$

(v — скорость частиц). Отсюда находим эффективное сечение для малых χ:

$$d\sigma = 4\left(\frac{\alpha}{pv}\right)^2 \frac{d_0}{\chi^4}.$$

В нерелятивистском случае $p \approx mv$, и это выражение совпадает с получающимся по формуле Резерфорда при малых χ (см. I § 19).

§ 40. Дипольный момент

Рассмотрим поле, создаваемое системой зарядов на расстояниях, больших по сравнению с размерами системы.

Введем систему координат с началом где-нибудь внутри системы зарядов. Радиус-векторы отдельных зарядов пусть будут $\mathbf{r}_a$. Потенциал поля, создаваемого всеми зарядами в точке с радиус-вектором $\mathbf{R}_0$, равен

$$\varphi = \sum \frac{e_a}{|\mathbf{R}_0 - \mathbf{r}_a|} \tag{40,1}$$

(суммирование производится по всем зарядам); здесь $(\mathbf{R}_0 - \mathbf{r}_a)$ — радиус-векторы от зарядов e_a к точке, где мы ищем потенциал.

Мы должны исследовать это выражение для больших $\mathbf{R}_0$ ($\mathbf{R}_0 \gg \mathbf{r}_a$). Для этого разложим его в ряд по степеням $\mathbf{r}_a/R_0$, воспользовавшись формулой

$$f(\mathbf{R}_0 - \mathbf{r}) = f(\mathbf{R}_0) - \mathbf{r}\operatorname{grad} f(\mathbf{R}_0)$$

(в grad дифференцирование производится по координатам конца

вектора $\mathbf{R}_0$). С точностью до членов первого порядка

$$\varphi = \frac{\sum e_a}{R_0} - \sum e_a \mathbf{r}_a \operatorname{grad} \frac{1}{R_0}. \tag{40,2}$$

Сумма

$$\mathbf{d} = \sum e_a \mathbf{r}_a \tag{40,3}$$

носит название *дипольного момента* системы зарядов. Существенно, что если сумма $\sum e_a$ всех зарядов равна нулю, то дипольный момент не зависит от выбора начала координат. Действительно, радиус-векторы $\mathbf{r}_a$ и $\mathbf{r}'_a$ одного и того же заряда в двух разных системах координат связаны друг с другом соотношением

$$\mathbf{r}'_a = \mathbf{r}_a + \mathbf{a},$$

где $\mathbf{a}$ — некоторый постоянный вектор. Поэтому если $\sum e_a = 0$, то дипольный момент в обеих системах одинаков:

$$\mathbf{d}' = \sum e_a \mathbf{r}'_a = \sum e_a \mathbf{r}_a + \mathbf{a} \sum e_a = \mathbf{d}.$$

Если обозначить посредством e_a^+, $\mathbf{r}_a^+$ и $-e_a^-$, $\mathbf{r}_a^-$ положительные и отрицательные заряды системы и их радиус-векторы, то можно написать дипольный момент в виде

$$\mathbf{d} = \sum e_a^+ \mathbf{r}_a^+ - \sum e_a^- \mathbf{r}_a^- = \mathbf{R}^+ \sum e_a^+ - \mathbf{R}^- \sum e_a^-, \tag{40,4}$$

где

$$\mathbf{R}^+ = \frac{\sum e_a^+ \mathbf{r}_a^+}{\sum e_a^+}, \quad \mathbf{R}^- = \frac{\sum e_a^- \mathbf{r}^-}{\sum e_a^-} \tag{40,5}$$

радиус-векторы «центров зарядов» положительных и отрицательных. Если $\sum e_a^+ = \sum e_a^- = e$, то

$$\mathbf{d} = e\mathbf{R}_{+-}, \tag{40,6}$$

где $\mathbf{R}_{+-} = \mathbf{R}^+ - \mathbf{R}^-$ есть радиус-вектор от центра отрицательных к центру положительных зарядов. В частности, если имеются всего два заряда, то $\mathbf{R}_{+-}$ есть радиус-вектор между ними.

Если полный заряд системы равен нулю, то потенциал ее поля на больших расстояниях

$$\varphi = -\mathbf{d}\nabla \frac{1}{R_0} = \frac{\mathbf{d}\mathbf{R}_0}{R_0^3}. \tag{40,7}$$

Напряженность поля

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \frac{\mathbf{d}\mathbf{R}_0}{R_0^3} = -\frac{1}{R_0^3} \operatorname{grad} (\mathbf{d}\mathbf{R}_0) - (\mathbf{d}\mathbf{R}_0) \operatorname{grad} \frac{1}{R_0^3}$$

или окончательно

$$\mathbf{E}=\frac{3(\mathbf{nd})\,\mathbf{n}-\mathbf{d}}{R_0^3}, \tag{40,8}$$

где $\mathbf{n}$ — единичный вектор в направлении $\mathbf{R}_0$. Полезно также указать, что ее можно представить, до выполнения дифференцирований, в виде

$$\mathbf{E}=(\mathbf{d}\nabla)\,\nabla\frac{1}{R_0}. \tag{40,9}$$

Таким образом, потенциал поля, создаваемого системой с равным нулю полным зарядом, на больших расстояниях обратно пропорционален квадрату, а напряженность поля — кубу расстояния. Это поле обладает аксиальной симметрией вокруг направления $\mathbf{d}$. В плоскости, проходящей через это направление (которое выберем в качестве оси z), компоненты вектора $\mathbf{E}$:

$$E_z=d\,\frac{3\cos^2\theta-1}{R_0^3},\quad E_x=d\,\frac{3\sin\theta\cos\theta}{R_0^3}. \tag{40,10}$$

Радиальная же и тангенциальная составляющие в этой плоскости

$$E_R=d\,\frac{2\cos\theta}{R_0^3},\quad E_\theta=-d\,\frac{\sin\theta}{R_0^3}. \tag{40,11}$$

§ 41. Мультипольные моменты

В разложении потенциала по степеням $1/R_0$

$$\varphi=\varphi^{(0)}+\varphi^{(1)}+\varphi^{(2)}+\ldots \tag{41,1}$$

член $\varphi^{(n)}$ пропорционален $1/R_0^{n+1}$. Мы видели, что первый член, $\varphi^{(0)}$, определяется суммой всех зарядов; второй, $\varphi^{(1)}$, называемый дипольным потенциалом системы, определяется ее дипольным моментом.

Третий член разложения равен

$$\varphi^{(2)}=\frac{1}{2}\sum e x_\alpha x_\beta\,\frac{\partial^2}{\partial X_\alpha\partial X_\beta}\frac{1}{R_0}, \tag{41,2}$$

где сумма берется по всем зарядам; индекс, указывающий номер заряда, мы здесь опустили; x_α — компоненты вектора $\mathbf{r}$, а X_α — вектора $\mathbf{R}_0$. Эта часть потенциала обычно называется квадрупольным потенциалом. Если сумма зарядов и дипольный момент системы равны нулю, то разложение начинается с $\varphi^{(2)}$.

В выражение (41,2) входит шесть величин $\sum e x_\alpha x_\beta$. Легко, однако, видеть, что в действительности поле зависит не от шести независимых величин, а только от пяти. Это следует из того, что

функция $1/R_0$ удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta \frac{1}{R_0} \equiv \delta_{\alpha\beta} \frac{\partial^2}{\partial X_\alpha \partial X_\beta} \frac{1}{R_0} = 0.$$

Мы можем поэтому написать $\varphi^{(2)}$ в виде

$$\varphi^{(2)} = \frac{1}{2} \sum e \left(x_\alpha x_\beta - \frac{1}{3} r^2 \delta_{\alpha\beta} \right) \frac{\partial^2}{\partial X_\alpha \partial X_\beta} \frac{1}{R_0}.$$

Тензор

$$D_{\alpha\beta} = \sum e \left(3x_\alpha x_\beta - r^2 \delta_{\alpha\beta} \right) \tag{41,3}$$

называется *квадрупольным моментом* системы. Из определения $D_{\alpha\beta}$ следует, что сумма его диагональных компонент равна нулю:

$$D_{\alpha\alpha} = 0. \tag{41,4}$$

Симметричный тензор $D_{\alpha\beta}$ имеет поэтому всего пять независимых компонент. С его помощью можно написать

$$\varphi^{(2)} = \frac{D_{\alpha\beta}}{6} \frac{\partial^2}{\partial X_\alpha \partial X_\beta} \frac{1}{R_0} \tag{41,5}$$

или, производя дифференцирование

$$\frac{\partial^2}{\partial X_\alpha \partial X_\beta} \frac{1}{R_0} = \frac{3X_\alpha X_\beta}{R_0^5} - \frac{\delta_{\alpha\beta}}{R_0^3}$$

и учитывая, что $\delta_{\alpha\beta} D_{\alpha\beta} = D_{\alpha\alpha} = 0$,

$$\varphi^{(2)} = \frac{D_{\alpha\beta} n_\alpha n_\beta}{2R_0^3}. \tag{41,6}$$

Как и всякий симметричный трехмерный тензор, тензор $D_{\alpha\beta}$ может быть приведен к главным осям. При этом в силу условия (41,4) в общем случае лишь два из трех главных значений независимы. Если же система зарядов симметрична относительно некоторой оси (ось z)[1], то она же является одной из главных осей тензора $D_{\alpha\beta}$, положение двух других осей в плоскости xy произвольно, и все три главных значения связаны между собой:

$$D_{xx} = D_{yy} = -\frac{1}{2} D_{zz}. \tag{41,7}$$

Обозначая компоненту D_{zz} как D (ее называют обычно в этом случае просто квадрупольным моментом), получим потенциал в виде

$$\varphi^{(2)} = \frac{D}{4R_0^3} (3\cos^2\theta - 1) = \frac{D}{2R_0^3} P_2(\cos\theta), \tag{41,8}$$

где θ — угол между R_0 и осью z, а P_2 — полином Лежандра.

[1]) Имеется в виду ось симметрии любого порядка выше второго.

Подобно тому как это было сделано в предыдущем параграфе для дипольного момента, легко убедиться в том, что квадрупольный момент системы не зависит от выбора начала координат, если равны нулю как полный заряд, так и дипольный момент системы.

Аналогичным образом можно было бы написать следующие члены разложения (41,1). l-й член разложения определяется тензором (так называемым тензором 2^l-польного момента) l-го ранга, симметричным по всем своим индексам и обращающимся в нуль при свертывании по любой паре индексов; можно показать, что такой тензор обладает $2l+1$ независимыми компонентами [1]).

Мы напишем, однако, здесь общий член разложения потенциала в другом виде, использовав известную из теории сферических функций формулу

$$\frac{1}{|\mathbf{R}_0-\mathbf{r}|}=\frac{1}{\sqrt{R_0^2+r^2-2rR_0\cos\chi}}=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{r^l}{R_0^{l+1}}P_l(\cos\chi), \qquad (41,9)$$

где χ — угол между $\mathbf{R}_0$ и $\mathbf{r}$. Введем сферические углы Θ, Φ и θ, φ, образуемые соответственно векторами $\mathbf{R}_0$ и $\mathbf{r}$ с фиксированными осями координат, и воспользуемся известной теоремой сложения для сферических функций:

$$P_l(\cos\chi)=\sum_{m=-l}^{l}\frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}P_l^{|m|}(\cos\Theta)P_l^{|m|}(\cos\theta)e^{-im(\Phi-\varphi)}, \quad (41,10)$$

где P_l^m — присоединенные полиномы Лежандра. Введем также сферические функции [2])

$$Y_{lm}(\theta,\varphi)=(-1)^m i^l\sqrt{\frac{2l+1}{2}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}P_l^m(\cos\theta)e^{im\varphi}, \quad m\geqslant 0,$$
$$Y_{l,-|m|}(\theta,\varphi)=(-1)^{l-m}Y^*_{l|m|}. \qquad (41,11)$$

Тогда разложение (41,9) примет вид:

$$\frac{1}{|\mathbf{R}_0-\mathbf{r}|}=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\frac{r^l}{R_0^{l+1}}\frac{4\pi}{2l+1}Y^*_{lm}(\Theta,\Phi)Y_{lm}(\theta,\varphi).$$

Произведя такое разложение в каждом члене суммы (40,1), получим окончательно следующее выражение для l-го члена разложения

[1]) Такой тензор называют неприводимым. Обращение в нуль при свертывании означает, что из его компонент нельзя составить компонент какого-либо тензора более низкого ранга.

[2]) В соответствии с определением, принятым в квантовой механике.

потенциала:

$$\varphi^{(l)} = \frac{1}{R_0^{l+1}} \sum_{m=-l}^{l} \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} Q_m^{(l)} Y_{lm}^* (\Theta, \Phi), \tag{41,12}$$

где

$$Q_m^{(l)} = \sum_a e_a r_a^l \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} Y_{lm} (\theta_a, \varphi_a). \tag{41,13}$$

Совокупность $2l+1$ величин $Q_m^{(l)}$ составляет 2^l-польный момент системы зарядов.

Определенные таким образом величины $Q_m^{(1)}$ связаны с компонентами вектора дипольного момента **d** формулами

$$Q_0^{(1)} = id_z, \qquad Q_{\pm 1}^{(1)} = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} (d_x \pm id_y). \tag{41,14}$$

Величины же $Q_m^{(2)}$ связаны с компонентами тензора $D_{\alpha\beta}$ соотношениями

$$Q_0^{(2)} = -\frac{1}{2} D_{zz}, \qquad Q_{\pm 1}^{(2)} = \pm \frac{1}{\sqrt{6}} (D_{xz} \pm iD_{yz}),$$
$$Q_{\pm 2}^{(2)} = -\frac{1}{2\sqrt{6}} (D_{xx} - D_{yy} \pm 2iD_{xy}). \tag{41,15}$$

Задача

Определить квадрупольный момент однородно заряженного эллипсоида относительно его центра.

Решение. Заменяя суммирование в (41,3) интегрированием по объему эллипсоида, имеем:

$$D_{xx} = \rho \iint (2x^2 - y^2 - z^2)\, dx\, dy\, dz, \text{ и т. д.}$$

Выбираем оси координат вдоль осей эллипсоида с началом в его центре; из соображений симметрии очевидно, что эти же оси являются главными осями тензора $D_{\alpha\beta}$. Преобразованием

$$x = x'a, \quad y = y'b, \quad z = z'c$$

интегрирование по объему эллипсоида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

сводится к интегрированию по объему сферы радиуса 1

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1.$$

В результате получим:

$$D_{xx} = \frac{e}{5} (2a^2 - b^2 - c^2), \qquad D_{yy} = \frac{e}{5} (2b^2 - a^2 - c^2),$$
$$D_{zz} = \frac{e}{5} (2c^2 - a^2 - b^2),$$

где $e = \frac{4\pi}{3} abc\rho$ — полный заряд эллипсоида.

§ 42. Система зарядов во внешнем поле

Рассмотрим систему зарядов, находящуюся во внешнем электрическом поле. Посредством $\varphi(\mathbf{r})$ будем теперь обозначать потенциал этого внешнего поля. Потенциальная энергия каждого из зарядов есть $e_a\varphi(\mathbf{r}_a)$, а полная потенциальная энергия системы равна

$$U = \sum_a e_a \varphi(\mathbf{r}_a). \tag{42,1}$$

Выберем снова систему координат с началом где-нибудь внутри системы зарядов; $\mathbf{r}_a$ — радиус-вектор заряда e_a в этих координатах.

Предположим, что внешнее поле слабо меняется на протяжении системы зарядов, т. е. является по отношению к этой системе квазиоднородным. Тогда мы можем разложить энергию U в ряд по степеням $\mathbf{r}_a$. В этом разложении

$$U = U^{(0)} + U^{(1)} + U^{(2)} + \ldots \tag{42,2}$$

первый член есть

$$U^{(0)} = \varphi_0 \sum_a e_a, \tag{42,3}$$

где φ_0 — значение потенциала в начале координат. В этом приближении энергия системы такова, как если бы все заряды находились в одной точке.

Второй член разложения

$$U^{(1)} = (\operatorname{grad} \varphi)_0 \cdot \sum e_a \mathbf{r}_a.$$

Введя напряженность $\mathbf{E}_0$ поля в начале координат и дипольный момент $\mathbf{d}$ системы, имеем:

$$U^{(1)} = -\mathbf{d}\mathbf{E}_0. \tag{42,4}$$

Полная сила, действующая на систему во внешнем квазиоднородном поле, есть, с точностью до рассмотренных членов,

$$\mathbf{F} = \mathbf{E}_0 \sum e_a + (\operatorname{grad} \mathbf{d}\mathbf{E})_0.$$

Если полный заряд равен нулю, то первый член исчезает и тогда

$$\mathbf{F} = (\mathbf{d}\nabla)\,\mathbf{E}, \tag{42,5}$$

т. е. сила определяется производными напряженности поля (взятыми в начале координат). Полный же момент действующих на систему сил есть

$$\mathbf{K} = \sum [\mathbf{r}_a \cdot e_a \mathbf{E}_0] = [\mathbf{d}\mathbf{E}_0], \tag{42,6}$$

т. е. определяется самой напряженностью поля.

Рассмотрим две системы с равными нулю суммами зарядов в каждой из них и дипольными моментами $\mathbf{d}_1$ и $\mathbf{d}_2$, причем их взаимное

расстояние велико по сравнению с их собственными размерами. Определим потенциальную энергию U их взаимодействия. Для этого можно рассматривать одну из этих систем как находящуюся в поле второй. Тогда

$$U = -\mathbf{d}_2\mathbf{E}_1,$$

где $\mathbf{E}_1$ — поле первой системы. Подставляя для $\mathbf{E}_1$ выражение (40,8), находим:

$$U = \frac{(\mathbf{d}_1\mathbf{d}_2)\,R^2 - 3\,(\mathbf{d}_1\mathbf{R})\,(\mathbf{d}_2\mathbf{R})}{R^5}, \tag{42,7}$$

где $\mathbf{R}$ — вектор расстояния между обеими системами.

Для случая, когда у одной из систем сумма зарядов отлична от нуля (и равна e), получаем аналогичным образом:

$$U = e\frac{\mathbf{dR}}{R^3}, \tag{42,8}$$

где $\mathbf{R}$ — вектор, направленный от диполя к заряду.

Следующий член разложения (42,1) равен

$$U^{(2)} = \frac{1}{2}\sum e x_\alpha x_\beta \frac{\partial^2\varphi_0}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}.$$

Здесь мы, как и в § 41, опустили индексы, указывающие номер заряда; значения вторых производных от потенциала берутся в начале координат. Но потенциал φ удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_\alpha^2} = \delta_{\alpha\beta}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} = 0.$$

Поэтому мы можем написать

$$U^{(2)} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}\sum e\left(x_\alpha x_\beta - \frac{1}{3}\delta_{\alpha\beta}r^2\right),$$

или, окончательно,

$$U^{(2)} = \frac{D_{\alpha\beta}}{6}\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}. \tag{42,9}$$

Общий член ряда (42,2) может быть выражен через определенные в предыдущем параграфе 2^l-польные моменты $D_m^{(l)}$. Для этого надо предварительно разложить потенциал $\varphi(\mathbf{r})$ в ряд по шаровым функциям; общий вид такого разложения:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} e r^l \sum_{m=-l}^{l} a_{lm}\sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}}\,Y_{lm}(\theta,\ \varphi), \tag{42,10}$$

где r, θ, φ — сферические координаты точки, а a_{lm} — постоянные коэффициенты. Составляя сумму (42,1) и учитывая определение (41,13), получим:

$$U^{(l)} = \sum_{m=-l}^{l} a_{lm} Q_m^{(l)}. \tag{42,11}$$

§ 43. Постоянное магнитное поле

Рассмотрим магнитное поле, создаваемое зарядами, совершающими финитное движение, при котором частицы остаются все время в конечной области пространства, причем импульсы тоже остаются всегда конечными. Такое движение имеет стационарный характер, и представляет интерес рассмотреть среднее (по времени) магнитное поле $\overline{\mathbf{H}}$, создаваемое зарядами; это поле будет теперь функцией только от координат, но не от времени, т. е. будет постоянным.

Для того чтобы найти уравнения, определяющие среднее магнитное поле, усредним по времени уравнения Максвелла

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}.$$

Первое из них дает просто

$$\operatorname{div} \overline{\mathbf{H}} = 0. \tag{43,1}$$

Во втором уравнении среднее значение производной $\partial \mathbf{E}/\partial t$, как и вообще производной от всякой величины, меняющейся в конечном интервале, равно нулю (см. примечание на стр. 117). Поэтому второе уравнение Максвелла приобретает вид

$$\operatorname{rot} \overline{\mathbf{H}} = \frac{4\pi}{c}\overline{\mathbf{j}}. \tag{43,2}$$

Эти два уравнения и определяют постоянное поле $\overline{\mathbf{H}}$.

Введем средний векторный потенциал $\overline{\mathbf{A}}$ согласно

$$\operatorname{rot} \overline{\mathbf{A}} = \overline{\mathbf{H}}.$$

Подставив это в уравнение (43,2), получим:

$$\operatorname{grad} \operatorname{div} \overline{\mathbf{A}} - \Delta \overline{\mathbf{A}} = \frac{4\pi}{c}\overline{\mathbf{j}}.$$

Но мы знаем, что векторный потенциал поля определен неоднозначно, и поэтому на него можно наложить любое дополнительное условие. На этом основании выберем потенциал $\overline{\mathbf{A}}$ так, чтобы

$$\operatorname{div} \overline{\mathbf{A}} = 0. \tag{43,3}$$

Тогда уравнение, определяющее векторный потенциал постоянного магнитного поля, приобретает вид

$$\Delta\overline{\mathbf{A}} = -\frac{4\pi}{c}\overline{\mathbf{j}}. \tag{43,4}$$

Решение этого уравнения легко найти, заметив, что (43,4) вполне аналогично уравнению Пуассона (36,4) для скалярного потенциала постоянного электрического поля, причем вместо плотности заряда ρ стоит плотность тока $\overline{\mathbf{j}}/c$. По аналогии с решением (36,8) уравнения Пуассона мы можем написать

$$\overline{\mathbf{A}} = \frac{1}{c}\int\frac{\overline{\mathbf{j}}}{R}\,dV, \tag{43,5}$$

где R — расстояние от точки наблюдения поля до элемента объема dV.

В формуле (43,5) можно перейти от интеграла к сумме по зарядам, подставляя вместо $\mathbf{j}$ произведение $\rho\mathbf{v}$ и помня, что все заряды точечные. При этом необходимо иметь в виду, что в интеграле (43,5) R является просто переменной интегрирования и потому, конечно, не подвергается усреднению. Если же написать вместо интеграла $\int\frac{\mathbf{j}}{R}dV$ сумму $\sum\frac{e_a\mathbf{v}_a}{R_a}$, то R_a будут радиус-векторами отдельных частиц, меняющимися при движении зарядов. Поэтому надо писать

$$\overline{\mathbf{A}} = \frac{1}{c}\overline{\sum\frac{e_a\mathbf{v}_a}{R_a}}, \tag{43,6}$$

где усредняется все выражение, стоящее под чертой.

Зная $\overline{\mathbf{A}}$, можно найти напряженность поля

$$\overline{\mathbf{H}} = \operatorname{rot}\overline{\mathbf{A}} = \operatorname{rot}\frac{1}{c}\int\frac{\overline{\mathbf{j}}}{R}\,dV.$$

Операция rot производится по координатам точки наблюдения. Поэтому rot можно перенести под знак интеграла и при дифференцировании считать $\mathbf{j}$ постоянным. Применяя известную формулу

$$\operatorname{rot} f\mathbf{a} = f\operatorname{rot}\mathbf{a} + [\operatorname{grad} f\cdot\mathbf{a}],$$

где f и $\mathbf{a}$ — любые скаляр и вектор, к произведению $\overline{\mathbf{j}}\cdot\frac{1}{R}$, находим:

$$\operatorname{rot}\frac{\overline{\mathbf{j}}}{R} = \left[\operatorname{grad}\frac{1}{R}\cdot\overline{\mathbf{j}}\right] = \frac{[\overline{\mathbf{j}}\mathbf{R}]}{R^3},$$

и, следовательно,

$$\overline{\mathbf{H}} = \frac{1}{c}\int\frac{[\overline{\mathbf{j}}\mathbf{R}]}{R^3}\,dV \tag{43,7}$$

(радиус-вектор $\mathbf{R}$ направлен из dV в точку наблюдения поля). Это — так называемый *закон Био и Савара*.

§ 44. Магнитный момент

Рассмотрим среднее магнитное поле, создаваемое системой стационарно движущихся зарядов на больших расстояниях от этой системы.

Введем систему координат с началом где-нибудь внутри системы зарядов, аналогично тому, как мы делали в § 40. Обозначим опять радиус-векторы отдельных зарядов посредством $\mathbf{r}_a$, а радиус-вектор точки, в которой мы ищем поле, посредством $\mathbf{R}_0$. Тогда $\mathbf{R}_0-\mathbf{r}_a$ есть радиус-вектор от заряда e_a к точке наблюдения. Согласно (43,6) имеем для векторного потенциала:

$$\overline{\mathbf{A}}=\frac{1}{c}\sum\frac{\overline{e_a\mathbf{v}_a}}{|\mathbf{R}_0-\mathbf{r}_a|}. \qquad (44,1)$$

Как и в § 40, разложим это выражение по степеням $\mathbf{r}_a$. С точностью до членов первого порядка (индекс a для краткости опускаем):

$$\overline{\mathbf{A}}=\frac{1}{cR_0}\sum e\overline{\mathbf{v}}-\frac{1}{c}\sum\overline{e\mathbf{v}\left(\mathbf{r}\nabla\frac{1}{R_0}\right)}.$$

В первом члене можно написать

$$\sum e\overline{\mathbf{v}}=\overline{\frac{d}{dt}\sum e\mathbf{r}}.$$

Но среднее значение производной от меняющейся в конечном интервале величины $\sum e\mathbf{r}$ равно нулю. Таким образом, для $\overline{\mathbf{A}}$ остается выражение

$$\overline{\mathbf{A}}=-\frac{1}{c}\sum\overline{e\mathbf{v}\left(\mathbf{r}\nabla\frac{1}{R_0}\right)}=\frac{1}{cR_0^3}\sum\overline{e\mathbf{v}(\mathbf{r}\mathbf{R}_0)}.$$

Преобразуем его следующим образом. Замечая, что $\mathbf{v}=\dot{\mathbf{r}}$, мы можем написать (помня, что $\mathbf{R}_0$ есть постоянный вектор):

$$\sum e(\mathbf{R}_0\mathbf{r})\mathbf{v}=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\sum e\mathbf{r}(\mathbf{r}\mathbf{R}_0)+\frac{1}{2}\sum e[\mathbf{v}(\mathbf{r}\mathbf{R}_0)-\mathbf{r}(\mathbf{v}\mathbf{R}_0)].$$

При подстановке этого выражения в $\mathbf{A}$ среднее значение от первого члена (с производной по времени) снова обратится в нуль, и мы получим:

$$\overline{\mathbf{A}}=\frac{1}{2cR_0^3}\sum e[\overline{\mathbf{v}(\mathbf{r}\mathbf{R}_0)}-\overline{\mathbf{r}(\mathbf{v}\mathbf{R}_0)}].$$

Введем вектор

$$\mathfrak{m}=\frac{1}{2c}\sum e[\mathbf{r}\mathbf{v}], \qquad (44,2)$$

называемый *магнитным моментом* системы. Тогда

$$\overline{\mathbf{A}}=\frac{[\overline{\mathfrak{m}}\mathbf{R}_0]}{R_0^3}=\left[\nabla\frac{1}{R_0}\cdot\overline{\mathfrak{m}}\right]. \qquad (44,3)$$

Зная векторный потенциал, легко найти напряженность магнитного поля. С помощью формулы

$$\operatorname{rot}[\mathbf{ab}] = (\mathbf{b}\nabla)\,\mathbf{a} - (\mathbf{a}\nabla)\,\mathbf{b} + \mathbf{a}\operatorname{div}\mathbf{b} - \mathbf{b}\operatorname{div}\mathbf{a}$$

находим:

$$\overline{\mathbf{H}} = \operatorname{rot}\left[\overline{\mathfrak{m}}\,\frac{\mathbf{R}_0}{R_0^3}\right] = \overline{\mathfrak{m}}\operatorname{div}\frac{\mathbf{R}_0}{R_0^3} - (\overline{\mathfrak{m}}\nabla)\,\frac{\mathbf{R}_0}{R_0^3}.$$

Далее,

$$\operatorname{div}\frac{\mathbf{R}_0}{R_0^3} = \mathbf{R}_0\operatorname{grad}\frac{1}{R_0^3} + \frac{1}{R_0^3}\operatorname{div}\mathbf{R}_0 = 0$$

и

$$(\overline{\mathfrak{m}}\nabla)\,\frac{\mathbf{R}_0}{R_0^3} = \frac{1}{R_0^3}\,(\overline{\mathfrak{m}}\nabla)\,\mathbf{R}_0 + \mathbf{R}_0\left(\overline{\mathfrak{m}}\nabla\,\frac{1}{R_0^3}\right) = \frac{\overline{\mathfrak{m}}}{R_0^3} - \frac{3\mathbf{R}_0\,(\overline{\mathfrak{m}}\mathbf{R}_0)}{R_0^5}.$$

Таким образом,

$$\overline{\mathbf{H}} = \frac{3\mathbf{n}\,(\overline{\mathfrak{m}}\mathbf{n}) - \overline{\mathfrak{m}}}{R_0^3}, \tag{44,4}$$

где $\mathbf{n}$ — снова единичный вектор в направлении $\mathbf{R}_0$. Мы видим, что магнитное поле выражается через магнитный момент такой же формулой, какой электрическое поле выражается через дипольный момент [см. (40,8)].

Если у всех зарядов системы отношение заряда к массе одинаково, то мы можем написать:

$$\mathfrak{m} = \frac{1}{2c}\sum e\,[\mathbf{rv}] = \frac{e}{2mc}\sum m\,[\mathbf{rv}].$$

Если скорости всех зарядов $v \ll c$, то $m\mathbf{v}$ есть импульс $\mathbf{p}$ заряда, и мы получаем:

$$\mathfrak{m} = \frac{e}{2mc}\sum[\mathbf{rp}] = \frac{e}{2mc}\,\mathbf{M}, \tag{44,5}$$

где $\mathbf{M} = \sum[\mathbf{rp}]$ есть механический момент импульса системы. Таким образом, в этом случае отношение магнитного момента к механическому постоянно и равно $e/2mc$.

Задача

Определить отношение магнитного и механического моментов для системы из двух зарядов (скорости $v \ll c$).

Решение. Выбирая начало координат в центре инерции обеих частиц, будем иметь $m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2 = 0$ и $\mathbf{p}_1 = -\mathbf{p}_2 = \mathbf{p}$, где $\mathbf{p}$ — импульс относительного движения. С помощью этих соотношений найдем:

$$\mathfrak{m} = \frac{1}{2c}\left(\frac{e_1}{m_1^2} + \frac{e_2}{m_2^2}\right)\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\,\mathbf{M}.$$

§ 45. Теорема Лармора

Рассмотрим систему зарядов, находящуюся во внешнем постоянном однородном магнитном поле.

Средняя (по времени) сила, действующая на систему

$$\overline{\mathbf{F}} = \sum \frac{e}{c}\,\overline{[\mathbf{vH}]} = \overline{\frac{d}{dt}\sum \frac{e}{c}\,[\mathbf{rH}]},$$

обращается в нуль как среднее значение производной по времени от всякой величины, меняющейся в конечных пределах. Среднее же значение момента сил

$$\overline{\mathbf{K}} = \sum \frac{e}{c}\,\overline{[\mathbf{r}\,[\mathbf{vH}]]}$$

отлично от нуля. Его можно выразить через магнитный момент системы, для чего пишем, раскрывая двойное векторное произведение:

$$\mathbf{K} = \sum \frac{e}{c}\,\{\mathbf{v}\,(\mathbf{rH}) - \mathbf{H}\,(\mathbf{vr})\} = \sum \frac{e}{c}\left\{\mathbf{v}\,(\mathbf{rH}) - \frac{1}{2}\,\mathbf{H}\,\frac{d}{dt}\,\mathbf{r}^2\right\}.$$

При усреднении второй член обращается в нуль, так что

$$\overline{\mathbf{K}} = \sum \frac{e}{c}\,\overline{\mathbf{v}\,(\mathbf{rH})} = \frac{1}{2c}\sum e\,\{\overline{\mathbf{v}\,(\mathbf{rH})} - \overline{\mathbf{r}\,(\mathbf{vH})}\}$$

[последнее преобразование аналогично произведенному при выводе (44,3)], или окончательно

$$\overline{\mathbf{K}} = [\overline{\mathbf{m}}\mathbf{H}]. \qquad (45,1)$$

Обратим внимание на аналогию с формулой (42,6) электрического случая.

Функция Лагранжа системы зарядов во внешнем постоянном однородном магнитном поле содержит дополнительный (по отношению к функции Лагранжа замкнутой системы) член

$$L_H = \sum \frac{e}{c}\,\mathbf{A}\mathbf{v} = \sum \frac{e}{2c}\,[\mathbf{Hr}]\,\mathbf{v} = \sum \frac{e}{2c}\,[\mathbf{rv}]\,\mathbf{H} \qquad (45,2)$$

[мы воспользовались выражением (19,4) для векторного потенциала однородного поля]. Вводя магнитный момент системы, имеем:

$$L_H = \mathbf{mH}. \qquad (45,3)$$

Обратим внимание на аналогию с электрическим полем: в однородном электрическом поле функция Лагранжа системы с равным нулю полным зарядом и дипольным моментом содержит член

$$L_E = \mathbf{dE},$$

являющийся в этом случае потенциальной энергией системы зарядов, взятой с обратным знаком (см. § 42).

Рассмотрим систему зарядов, совершающих финитное движение (со скоростями $v \ll c$) в центрально-симметрическом электрическом поле, создаваемом некоторой неподвижной частицей.

Перейдем от неподвижной системы координат к системе, равномерно вращающейся вокруг оси, проходящей через неподвижную частицу. Согласно известной формуле скорость $\mathbf{v}$ частицы в новой системе координат связана с ее же скоростью $\mathbf{v}'$ в старой системе соотношением

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v} + [\mathbf{\Omega}\mathbf{r}],$$

где $\mathbf{r}$ — радиус-вектор частицы, а $\mathbf{\Omega}$ — угловая скорость вращающейся системы координат. В неподвижной системе функция Лагранжа системы зарядов есть

$$L = \sum \frac{mv'^2}{2} - U,$$

где U — потенциальная энергия зарядов во внешнем электрическом поле вместе с энергией их взаимодействия друг с другом. U является функцией от расстояний зарядов до неподвижной частицы и от их взаимных расстояний; при переходе к вращающейся системе координат она остается, очевидно, неизменной. Поэтому в новой системе функция Лагранжа будет

$$L = \sum \frac{m}{2} (\mathbf{v} + [\mathbf{\Omega}\mathbf{r}])^2 - U.$$

Предположим, что у всех частиц отношение e/m зарядов к массам одинаково, и положим

$$\mathbf{\Omega} = \frac{e}{2mc} \mathbf{H}. \tag{45,4}$$

Тогда при достаточно малых H (когда можно пренебречь членами с H^2) функция Лагранжа приобретает вид:

$$L = \sum \frac{mv^2}{2} + \frac{1}{2c} \sum e\, [\mathbf{H}\mathbf{r}]\, \mathbf{v} - U.$$

Мы видим, что она совпадает с функцией Лагранжа, которой описывалось бы движение рассматриваемых зарядов в неподвижной системе координат при наличии постоянного магнитного поля [ср. (45,2)].

Таким образом, мы приходим к результату, что в нерелятивистском случае поведение системы зарядов с одинаковыми отношениями e/m, совершающих финитное движение в центрально-симметрическом электрическом поле и в слабом однородном магнитном поле $\mathbf{H}$, эквивалентно поведению этой же системы зарядов в том же электрическом поле в системе координат, равномерно вращающейся с угловой скоростью (45,4). Это утверждение составляет содержание так называемой *теоремы Лармора*, а угловая скорость $\Omega = eH/2mc$ называется *ларморовой частотой*.

К этому же вопросу можно подойти с другой точки зрения. При достаточно слабом магнитном поле H частота мала по сравнению с частотами финитного движения данной системы зарядов, и можно рассматривать относящиеся к этой системе величины, усредненные по временам, малым по сравнению с периодом $2\pi/\Omega$. Эти величины будут медленно (с частотой Ω) меняться со временем.

Рассмотрим изменение среднего механического момента системы $\mathbf{M}$. Согласно известному уравнению механики производная $\mathbf{M}$ равна моменту действующих на систему сил $\mathbf{K}$. Поэтому имеем, с помощью формулы (45,1):

$$\frac{d\overline{\mathbf{M}}}{dt}=\overline{\mathbf{K}}=[\overline{\mathfrak{m}}\mathbf{H}].$$

Если отношение e/m для всех частиц в системе одинаково, то механический и магнитный моменты пропорциональны друг другу, и с помощью формул (44,5) и (45,4) находим:

$$\frac{d\overline{\mathbf{M}}}{dt}=-[\mathbf{\Omega}\overline{\mathbf{M}}]. \tag{45,5}$$

Это уравнение означает, что вектор $\overline{\mathbf{M}}$ (а с ним и магнитный момент $\overline{\mathfrak{m}}$) вращается с угловой скоростью $-\mathbf{\Omega}$ вокруг направления поля, сохраняя при этом свою абсолютную величину и угол, образуемый им с этим направлением (так называемая *ларморова прецессия*).

ГЛАВА VI

ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ

§ 46. Волновое уравнение

Электромагнитное поле в пустоте определяется уравнениями Максвелла, в которых надо положить $\rho = 0$, $\mathbf{j} = 0$. Выпишем их еще раз:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad \operatorname{div} \mathbf{H} = 0, \tag{46,1}$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad \operatorname{div} \mathbf{E} = 0. \tag{46,2}$$

Эти уравнения могут иметь отличные от нуля решения. Это значит, что электромагнитное поле может существовать даже при отсутствии каких бы то ни было зарядов.

Электромагнитные поля, существующие в пустоте при отсутствии зарядов, называют *электромагнитными волнами*. Мы займемся теперь исследованием свойств таких полей.

Прежде всего отметим, что эти поля обязательно должны быть переменными. Действительно, в противном случае $\partial \mathbf{H}/\partial t = \partial \mathbf{E}/\partial t = 0$, и уравнения (46,1—2) переходят в уравнения (36,1—2) и (43,1—2) постоянного поля, в которых, однако, теперь $\rho = 0$, $\mathbf{j} = 0$. Но решения этих уравнений, определенные формулами (36,8) и (43,5), при $\rho = 0$, $\mathbf{j} = 0$ обращаются в нуль.

Выведем уравнения, определяющие потенциалы электромагнитных волн.

Как мы уже знаем, в силу неоднозначности потенциалов всегда можно наложить на них некоторое дополнительное условие. На этом основании выберем потенциалы электромагнитных волн так, чтобы скалярный потенциал был равен нулю:

$$\varphi = 0. \tag{46,3}$$

Тогда

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{H} = \operatorname{rot} \mathbf{A}. \tag{46,4}$$

Подставляя оба эти выражения в первое из уравнений (46,2), находим:

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{A} = -\Delta\mathbf{A} + \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{A} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2}. \tag{46,5}$$

Несмотря на то, что мы уже наложили одно дополнительное условие на потенциалы, потенциал $\mathbf{A}$ все же еще не вполне однозначен. Именно, к нему можно прибавить градиент любой не зависящей от времени функции (не меняя при этом φ). В частности, можно выбрать потенциал электромагнитной волны таким образом, чтобы

$$\operatorname{div}\mathbf{A} = 0. \tag{46,6}$$

Действительно, подставляя $\mathbf{E}$ из (46,4) в $\operatorname{div}\mathbf{E} = 0$, имеем:

$$\operatorname{div}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div}\mathbf{A} = 0,$$

т. е. $\operatorname{div}\mathbf{A}$ есть функция только от координат. Эту функцию всегда можно обратить в нуль прибавлением к $\mathbf{A}$ градиента от соответствующей не зависящей от времени функции.

Уравнение (46,5) приобретает теперь вид

$$\Delta\mathbf{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} = 0. \tag{46,7}$$

Это и есть уравнение, определяющее потенциал электромагнитных волн. Оно называется *уравнением д'Аламбера* или *волновым уравнением* [1]).

Применяя к (46,7) операции rot и $\partial/\partial t$, убедимся в том, что напряженности $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ удовлетворяют таким же волновым уравнениям.

Повторим вывод волнового уравнения в четырехмерном виде. Для этого напишем вторую пару уравнений Максвелла для поля в отсутствие зарядов в виде

$$\frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k} = 0$$

[уравнение (30,2) с $j^i = 0$]. Подставив сюда F^{ik}, выраженные через потенциалы,

$$F^{ik} = \frac{\partial A^k}{\partial x_i} - \frac{\partial A^i}{\partial x_k},$$

---

[1]) Волновое уравнение иногда записывают в виде $\Box\mathbf{A} = 0$, где

$$\Box = -\frac{\partial^2}{\partial x_i\,\partial x^i} = \Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

есть так называемый *оператор д'Аламбера*.

получим:

$$\frac{\partial^2 A^k}{\partial x_i \partial x^k} - \frac{\partial^2 A^i}{\partial x_k \partial x^k} = 0. \qquad (46,8)$$

Наложим на потенциалы дополнительное условие

$$\frac{\partial A^k}{\partial x^k} = 0 \qquad (46,9)$$

(это условие называют лоренцевым, а об удовлетворяющих ему потенциалах говорят как о потенциалах в *лоренцевой калибровке*). Тогда в уравнении (46,8) первый член выпадает и остается

$$\frac{\partial^2 A^i}{\partial x_k \partial x^k} \equiv g^{kl} \frac{\partial^2 A^i}{\partial x^k \partial x^l} = 0. \qquad (46,10)$$

Это и есть волновое уравнение, записанное в четырехмерном виде [1]).

В трехмерной форме условие (46,9) имеет вид:

$$\frac{1}{c}\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{A} = 0. \qquad (46,11)$$

Оно является более общим, чем использованные нами выше условия $\varphi = 0$, $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$; потенциалы, удовлетворяющие этим последним, удовлетворяют также и условию (46,11). В отличие от них, однако, условие Лоренца имеет релятивистски инвариантный характер: потенциалы, удовлетворяющие ему в одной системе отсчета, удовлетворяют ему и во всякой другой системе [между тем как условия (46,3), (46,6) нарушаются, вообще говоря, при преобразовании системы отсчета].

§ 47. Плоские волны

Рассмотрим частный случай электромагнитных волн, в котором поле зависит только от одной координаты, скажем x (и от времени). Такие волны называются *плоскими*. В этом случае уравнения поля принимают вид

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0, \qquad (47,1)$$

где под f подразумевается любая компонента векторов **E** или **H**.

Для решения этого уравнения перепишем его в виде

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - c\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} + c\frac{\partial}{\partial x}\right) f = 0$$

---

[1]) Следует отметить, что условие (46,9) не определяет еще выбор потенциалов вполне однозначным образом. Именно, к **A** можно прибавить $\operatorname{grad} f$, а из φ при этом вычесть $\frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t}$, причем, однако, функция f не произвольна, а должна удовлетворять, как легко убедиться, волновому уравнению $\square f = 0$.

и введем новые переменные

$$\xi = t - \frac{x}{c}, \quad \eta = t + \frac{x}{c},$$

так что

$$t = \frac{1}{2}(\eta + \xi), \quad x = \frac{c}{2}(\eta - \xi).$$

Тогда

$$\frac{\partial}{\partial \xi} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial t} - c\frac{\partial}{\partial x}\right), \quad \frac{\partial}{\partial \eta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial t} + c\frac{\partial}{\partial x}\right),$$

и уравнение для f:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \xi \partial \eta} = 0.$$

Очевидно, что его решение имеет вид

$$f = f_1(\xi) + f_2(\eta),$$

где f_1 и f_2 — произвольные функции. Таким образом,

$$f = f_1\left(t - \frac{x}{c}\right) + f_2\left(t + \frac{x}{c}\right). \qquad (47,2)$$

Пусть, например, $f_2 = 0$, так что $f = f_1(t - x/c)$. Выясним смысл этого решения. В каждой плоскости $x = \text{const}$ поле меняется со временем; в каждый данный момент поле различно для разных x. Очевидно, что поле имеет одинаковое значение для координат x и моментов времени t, удовлетворяющих соотношениям $t - x/c = \text{const}$, т. е.

$$x = \text{const} + ct.$$

Это значит, что если в некоторый момент $t = 0$ в некоторой точке x пространства поле имело определенное значение, то через промежуток времени t то же самое значение поле имеет на расстоянии ct вдоль оси x от первоначального места. Мы можем сказать, что все значения электромагнитного поля распространяются в пространстве вдоль оси x со скоростью, равной скорости света c.

Таким образом, $f_1(t - x/c)$ представляет собой плоскую волну, бегущую в положительном направлении оси x. Очевидно, что $f_2(t + x/c)$ представляет собой волну, бегущую в противоположном, отрицательном, направлении оси x.

В § 46 было показано, что потенциалы электромагнитной волны можно выбрать так, чтобы $\varphi = 0$, причем $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$. Выберем потенциалы рассматриваемой теперь плоской волны именно таким образом. Условие $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$ дает в этом случае

$$\frac{\partial A_x}{\partial x} = 0,$$

поскольку все величины не зависят от y и z. Согласно (47,1) будем иметь тогда и $\partial^2 A_x/\partial t^2 = 0$, т. е. $\partial A_x/\partial t = \text{const}$. Но производная $\partial \mathbf{A}/\partial t$ определяет электрическое поле, и мы видим, что отличная от нуля компонента A_x означала бы в рассматриваемом случае наличие постоянного продольного электрического поля. Поскольку такое поле не имеет отношения к электромагнитной волне, то можно положить $A_x = 0$.

Таким образом, векторный потенциал плоской волны может быть всегда выбран перпендикулярным к оси x, т. е. к направлению распространения этой волны.

Рассмотрим плоскую волну, бегущую в положительном направлении оси x; в такой волне все величины, в частности и $\mathbf{A}$, являются функциями только от $t - x/c$. Из формул

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{H} = \operatorname{rot} \mathbf{A}$$

мы находим поэтому:

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\mathbf{A}', \quad \mathbf{H} = [\nabla \mathbf{A}] = \left[\nabla\left(t - \frac{x}{c}\right)\cdot \mathbf{A}'\right] = -\frac{1}{c}[\mathbf{n}\mathbf{A}'], \qquad (47,3)$$

где штрих обозначает дифференцирование по $t - x/c$, а $\mathbf{n}$ — единичный вектор вдоль направления распространения волны. Подставляя первое равенство во второе, находим:

$$\mathbf{H} = [\mathbf{n}\mathbf{E}]. \qquad (47,4)$$

Мы видим, что электрическое и магнитное поля $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ плоской волны направлены перпендикулярно к направлению распространения волны. На этом основании электромагнитные волны называют *поперечными*. Из (47,4) видно, далее, что электрическое и магнитное поля плоской волны перпендикулярны друг к другу и одинаковы по абсолютной величине.

Поток энергии в плоской волне:

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi}[\mathbf{E}\mathbf{H}] = \frac{c}{4\pi}[\mathbf{E}[\mathbf{n}\mathbf{E}]],$$

и поскольку $\mathbf{E}\mathbf{n} = 0$, то

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi}E^2\mathbf{n} = \frac{c}{4\pi}H^2\mathbf{n}.$$

Таким образом, поток энергии направлен вдоль направления распространения волны. Поскольку $W = \frac{1}{8\pi}(E^2 + H^2) = \frac{E^2}{4\pi}$ есть плотность энергии волны, то можно написать

$$\mathbf{S} = cW\mathbf{n}, \qquad (47,5)$$

в согласии с тем, что поле распространяется со скоростью света.

Импульс единицы объема электромагнитного поля есть $\mathbf{S}/c^2$. Для плоской волны это дает $(W/c)\,\mathbf{n}$. Обратим внимание на то, что соотношение между энергией W и импульсом W/c электромагнитной волны оказывается таким же, как для частиц, движущихся со скоростью света [см. (9,9)].

Поток импульса поля дается максвелловским тензором напряжений $\sigma_{\alpha\beta}$ (33,3). Выбирая по-прежнему направление распространения волны в качестве оси x, найдем, что единственная отличная от нуля компонента $\sigma_{\alpha\beta}$ есть

$$\sigma_{xx}=W. \tag{47,6}$$

Как и следовало, поток импульса направлен по направлению распространения волны и равен по величине плотности энергии.

Найдем закон преобразования плотности энергии плоской электромагнитной волны при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой. Для этого в формулу

$$W=\frac{1}{1-\frac{V^2}{c^2}}\left(W'+2\frac{V}{c^2}S'_x+\frac{V^2}{c^2}\sigma'_{xx}\right)$$

(см. задачу 1 к § 6) надо подставить

$$S'_x=cW'\cos\alpha',\quad \sigma'_{xx}=W'\cos^2\alpha',$$

где α' — угол (в системе K') между осью x' (вдоль которой направлена скорость $\mathbf{V}$) и направлением распространения волны. В результате находим:

$$W=W'\frac{\left(1+\frac{V}{c}\cos\alpha'\right)^2}{1-\frac{V^2}{c^2}}. \tag{47,7}$$

Поскольку $W=E^2/4\pi=H^2/4\pi$, то абсолютные величины напряженностей поля волны преобразуются как $\sqrt{W}$.

Задачи

1. Определить силу, действующую на стенку, от которой отражается (с коэффициентом отражения R) падающая на нее плоская электромагнитная волна.

Решение. Сила $\mathbf{f}$, действующая на единицу площади стенки, дается потоком импульса через эту площадь, т. е. есть вектор с составляющими

$$f_\alpha=\sigma_{\alpha\beta}N_\beta+\sigma'_{\alpha\beta}N_\beta,$$

где $\mathbf{N}$ — вектор нормали к поверхности стенки, а $\sigma_{\alpha\beta}$ и $\sigma'_{\alpha\beta}$ — компоненты тензоров напряжений падающей и отраженной волн. Учитывая (47,6), получим:

$$\mathbf{f}=W\mathbf{n}(\mathbf{N}\mathbf{n})+W'\mathbf{n}'(\mathbf{N}\mathbf{n}').$$

По определению коэффициента отражения имеем: $W' = RW$. Введя также угол падения θ (и равный ему же угол отражения) и переходя к компонентам, найдем нормальную силу *(световое давление)*

$$f_N = W(1+R)\cos^2\theta$$

и тангенциальную силу

$$f_t = W(1-R)\sin\theta\cos\theta.$$

2. Методом Гамильтона — Якоби определить движение заряда в поле плоской электромагнитной волны.

Решение. Уравнение Гамильтона — Якоби, записанное в четырехмерной форме:

$$g^{ik}\left(\frac{\partial S}{\partial x^i}+\frac{e}{c}A_i\right)\left(\frac{\partial S}{\partial x^k}+\frac{e}{c}A_k\right)=m^2c^2. \tag{1}$$

Тот факт, что поле представляет собой плоскую волну, означает, что A^i являются функциями одной независимой переменной, которую можно представить в виде $\xi = k_ix^i$, где k^i — постоянный 4-вектор с равным нулю квадратом, $k_ik^i = 0$ (ср. следующий параграф). Потенциалы подчиним лоренцеву условию

$$\frac{\partial A^i}{\partial x^i}=\frac{dA^i}{d\xi}k_i=0;$$

для переменного поля волны это условие эквивалентно равенству $A^ik_i = 0$.

Ищем решение уравнения (1) в виде

$$S = -f_ix^i + F(\xi),$$

где $f^i = (f^0, \mathbf{f})$ — постоянный вектор, удовлетворяющий условию $f_if^i = m^2c^2$ ($S = -f_ix^i$ — решение уравнения Гамильтона — Якоби для свободной частицы с 4-импульсом $p^i = f^i$). Подстановка в (1) приводит к уравнению

$$\frac{e^2}{c^2}A_iA^i - 2\gamma\frac{dF}{d\xi} - \frac{2e}{c}f_iA^i = 0,$$

где постоянная $\gamma = k_if^i$. Определив отсюда F, получим:

$$S = -f_ix^i - \frac{e}{c\gamma}\int f_iA^i\,d\xi + \frac{e^2}{2\gamma c^2}\int A_iA^i\,d\xi. \tag{2}$$

Переходя к трехмерным обозначениям с фиксированной системой отсчета, выберем направление распространения волны в качестве оси x. Тогда $\xi = ct - x$, а постоянная $\gamma = f^0 - f^1$. Обозначив двухмерный вектор f_y, f_z через $\varkappa$, получим из условия $f_if^i = (f^0)^2 - (f^1)^2 - \varkappa^2 = m^2c^2$

$$f^0 + f^1 = \frac{m^2c^2+\varkappa^2}{\gamma}.$$

Выберем потенциалы в калибровке, в которой $\varphi = 0$, а $\mathbf{A}(\xi)$ лежит в плоскости yz. После этого выражение (2) примет вид:

$$S = \varkappa\mathbf{r} - \frac{\gamma}{2}(ct+x) - \frac{m^2c^2+\varkappa^2}{2\gamma}\xi + \frac{e}{c\gamma}\int \varkappa\mathbf{A}\,d\xi - \frac{e^2}{2\gamma c^2}\int \mathbf{A}^2\,d\xi.$$

Согласно общим правилам (см. I § 47) для определения движения надо приравнять производные $\partial S/\partial\varkappa$, $\partial S/\partial\gamma$ некоторым новым постоянным, которые можно обратить в нуль соответствующим выбором начала координат

и начала отсчета времени. Таким образом получим параметрические формулы (ξ — параметр):

$$y=\frac{1}{\gamma}\varkappa_y\xi-\frac{e}{c\gamma}\int A_y\,d\xi,\quad z=\frac{1}{\gamma}\varkappa_z\xi-\frac{e}{c\gamma}\int A_z\,d\xi,$$

$$x=\frac{1}{2}\left(\frac{m^2c^2+\varkappa^2}{\gamma^2}-1\right)\xi-\frac{e}{c\gamma^2}\int\varkappa\mathbf{A}\,d\xi+\frac{e^2}{2\gamma^2c^2}\int\mathbf{A}^2\,d\xi,\quad ct=\xi+x.$$

Обобщенный импульс $\mathbf{P}=\mathbf{p}+\frac{e}{c}\mathbf{A}$ и энергия $\mathscr{E}$ определяются дифференцированием действия по координатам и времени; это дает:

$$p_y=\varkappa_y-\frac{e}{c}A_y,\quad p_z=\varkappa_z-\frac{e}{c}A_z,$$

$$p_x=-\frac{\gamma}{2}+\frac{m^2c^2+\varkappa^2}{2\gamma}-\frac{e}{c\gamma}\varkappa\mathbf{A}+\frac{e^2}{2\gamma c^2}\mathbf{A}^2;$$

$$\mathscr{E}=(\gamma+p_x)c.$$

Если усреднить эти величины по времени, то члены с первой степенью периодической функции $\mathbf{A}(\xi)$ обратятся в нуль. Пусть система отсчета выбрана таким образом, что в ней частица в среднем покоится, т. е. ее средний импульс равен нулю. При этом будет

$$\varkappa=0,\quad \gamma^2=m^2c^2+e^2\overline{\mathbf{A}^2}.$$

Тогда окончательные формулы для определения движения примут вид:

$$x=\frac{e^2}{2\gamma^2c^2}\int(\mathbf{A}^2-\overline{\mathbf{A}^2})\,d\xi,\quad y=-\frac{e}{c\gamma}\int A_y\,d\xi,\quad z=-\frac{e}{c\gamma}\int A_z\,d\xi,$$

$$ct=\xi+\frac{e^2}{2\gamma^2c^2}\int(\mathbf{A}^2-\overline{\mathbf{A}^2})\,d\xi; \tag{3}$$

$$p_x=\frac{e^2}{2\gamma c^2}(\mathbf{A}^2-\overline{\mathbf{A}^2}),\quad p_y=-\frac{e}{c}A_y,\quad p_z=-\frac{e}{c}A_z,$$

$$\mathscr{E}=c\gamma+\frac{e^2}{2\gamma c}(\mathbf{A}^2-\overline{\mathbf{A}^2}). \tag{4}$$

§ 48. Монохроматическая плоская волна

Важный частный случай электромагнитных волн представляют волны, в которых поле является простой периодической функцией времени. Такая волна называется *монохроматической*. Все величины (потенциалы, компоненты полей) в монохроматической волне зависят от времени посредством множителя вида $\cos(\omega t+\alpha)$, где ω — *циклическая частота* (или просто *частота*) волны.

В волновом уравнении вторая производная от поля по времени равна теперь $\partial^2 f/\partial t^2=-\omega^2 f$, так что распределение поля по пространству определяется в монохроматической волне уравнением

$$\Delta f+\frac{\omega^2}{c^2}f=0. \tag{48,1}$$

В плоской волне (распространяющейся вдоль оси x) поле является функцией только от $t-x/c$. Поэтому если плоская волна монохроматична, то ее поле является простой периодической функцией от $t-x/c$. Векторный потенциал такой волны удобнее всего написать в виде вещественной части комплексного выражения

$$\mathbf{A} = \operatorname{Re}\left\{\mathbf{A}_0 e^{-i\omega(t-x/c)}\right\}. \tag{48,2}$$

Здесь $\mathbf{A}_0$ — некоторый постоянный комплексный вектор. Очевидно, что и напряженности $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ в такой волне будут иметь аналогичный вид с той же частотой ω. Величина

$$\lambda = \frac{2\pi c}{\omega} \tag{48,3}$$

называется *длиной волны*; это есть период изменения поля с координатой x в заданный момент времени t.

Вектор

$$\mathbf{k} = \frac{\omega}{c}\mathbf{n} \tag{48,4}$$

(где $\mathbf{n}$ — единичный вектор в направлении распространения волны) называется *волновым вектором*. С его помощью можно представить (48,2) в виде

$$\mathbf{A} = \operatorname{Re}\left\{\mathbf{A}_0 e^{i(\mathbf{kr}-\omega t)}\right\}, \tag{48,5}$$

не зависящем от выбора осей координат. Величину, стоящую с множителем i в показателе, называют *фазой* волны.

До тех пор, пока мы производим над величинами лишь линейные операции, можно опускать знак взятия вещественной части и оперировать с комплексными величинами как таковыми[1]). Так,

---

[1]) Если какие-либо две величины $\mathbf{A}(t)$ и $\mathbf{B}(t)$ пишутся в комплексном виде

$$\mathbf{A}(t) = \mathbf{A}_0 e^{-i\omega t}, \quad \mathbf{B}(t) = \mathbf{B}_0 e^{-i\omega t},$$

то при образовании их произведения надо, разумеется, сначала отделить вещественную часть. Но если, как это часто бывает, нас интересует лишь среднее (по времени) значение этого произведения, то его можно вычислить как

$$\frac{1}{2}\operatorname{Re}\{\mathbf{AB}^*\}.$$

Действительно, имеем:

$$\operatorname{Re}\mathbf{A}\operatorname{Re}\mathbf{B} = \frac{1}{4}\left(\mathbf{A}_0 e^{-i\omega t} + \mathbf{A}_0^* e^{i\omega t}\right)\left(\mathbf{B}_0 e^{-i\omega t} + \mathbf{B}_0^* e^{i\omega t}\right).$$

При усреднении члены, содержащие множители $e^{\pm 2i\omega t}$, обращаются в нуль, так что остается

$$\overline{\operatorname{Re}\mathbf{A}\operatorname{Re}\mathbf{B}} = \frac{1}{4}(\mathbf{AB}^* + \mathbf{A}^*\mathbf{B}) = \frac{1}{2}\operatorname{Re}(\mathbf{AB}^*).$$

подставив

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 e^{i(\mathbf{kr} - \omega t)}$$

в (47,3), получим связь между напряженностями и векторным потенциалом плоской монохроматической волны в виде

$$\mathbf{E} = ik\mathbf{A}, \quad \mathbf{H} = i[\mathbf{kA}]. \tag{48,6}$$

Рассмотрим подробнее вопрос о направлении поля монохроматической волны. Будем для определенности говорить об электрическом поле

$$\mathbf{E} = \mathrm{Re}\{\mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{kr} - \omega t)}\}$$

(все сказанное ниже относится, разумеется, в той же мере и к магнитному полю). $\mathbf{E}_0$ есть некоторый комплексный вектор. Его квадрат $\mathbf{E}_0^2$ есть некоторое, вообще говоря, тоже комплексное число. Если аргумент этого числа есть -2α (т. е. $\mathbf{E}_0^2 = |\mathbf{E}_0^2| e^{-2i\alpha}$), то вектор $\mathbf{b}$, определенный согласно

$$\mathbf{E}_0 = \mathbf{b} e^{-i\alpha}, \tag{48,7}$$

будет иметь вещественный квадрат $\mathbf{b}^2 = |\mathbf{E}_0|^2$. С таким определением напишем:

$$\mathbf{E} = \mathrm{Re}\{\mathbf{b} e^{i(\mathbf{kr} - \omega t - \alpha)}\}. \tag{48,8}$$

Представим $\mathbf{b}$ в виде

$$\mathbf{b} = \mathbf{b}_1 + i\mathbf{b}_2,$$

где $\mathbf{b}_1$ и $\mathbf{b}_2$ — два вещественных вектора. Поскольку квадрат $\mathbf{b}^2 = b_1^2 - b_2^2 + 2i\mathbf{b}_1\mathbf{b}_2$ должен быть вещественной величиной, то $\mathbf{b}_1\mathbf{b}_2 = 0$, т. е. векторы $\mathbf{b}_1$ и $\mathbf{b}_2$ взаимно перпендикулярны. Выберем направление $\mathbf{b}_1$ в качестве оси y (ось x — по направлению распространения волны). Тогда из (48,8) имеем:

$$E_y = b_1 \cos(\omega t - \mathbf{kr} + \alpha), \quad E_z = \pm b_2 \sin(\omega t - \mathbf{kr} + \alpha), \tag{48,9}$$

где знак плюс или минус имеет место в зависимости от того, направлен вектор $\mathbf{b}_2$ в положительном или отрицательном направлении оси z. Из (48,9) следует, что

$$\frac{E_y^2}{b_1^2} + \frac{E_z^2}{b_2^2} = 1. \tag{48,10}$$

Мы видим, таким образом, что в каждой точке пространства вектор электрического поля вращается в плоскости, перпендикулярной к направлению распространения волны, причем его конец описывает эллипс (48,10). Такая волна называется *эллиптически поляризованной*. Вращение происходит в направлении по или против направления винта, ввинчиваемого вдоль оси x, соответственно при знаке плюс или минус в (48,10).

Если $b_1 = b_2$, то эллипс (48,10) превращается в круг, т. е. вектор $\mathbf{E}$ вращается, оставаясь постоянным по величине. В этом случае говорят, что *волна поляризована по кругу*. Выбор направлений осей y и z при этом становится, очевидно, произвольным. Отметим, что в такой волне отношение y- и z-составляющих комплексной амплитуды $\mathbf{E}_0$ равно

$$\frac{E_{0z}}{E_{0y}} = \pm i \tag{48,11}$$

соответственно для вращения по и против направления винта (*правая* и *левая* поляризации)[1]).

Наконец, если b_1 или b_2 равно нулю, то поле волны направлено везде и всегда параллельно (или антипараллельно) одному и тому же направлению. Волну называют в этом случае *линейно поляризованной* или поляризованной в плоскости. Эллиптически поляризованную волну можно рассматривать, очевидно, как наложение двух линейно поляризованных волн.

Вернемся к определению волнового вектора и введем четырехмерный волновой вектор с компонентами

$$k^i = \left(\frac{\omega}{c},\ \mathbf{k}\right). \tag{48,12}$$

Тот факт, что эти величины действительно составляют 4-вектор, очевиден хотя бы из того, что при умножении на 4-вектор x^i он дает скаляр — фазу волны:

$$k_i x^i = \omega t - \mathbf{kr}. \tag{48,13}$$

Из определений (48,4) и (48,12) видно, что квадрат волнового 4-вектора равен нулю:

$$k^i k_i = 0. \tag{48,14}$$

Это соотношение следует также и непосредственно из того, что выражение

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 \exp(-ik_i x^i)$$

должно быть решением волнового уравнения (46,10).

Как у всякой плоской волны, в монохроматической волне, распространяющейся вдоль оси x, отличны от нуля лишь следующие компоненты тензора энергии-импульса (см. § 47):

$$T^{00} = T^{01} = T^{11} = W.$$

[1]) Подразумевается, что оси x, y, z образуют, как всегда, правовинтовую систему.

С помощью волнового 4-вектора эти равенства можно записать в тензорном виде как

$$T^{ik} = \frac{Wc^2}{\omega^2} k^i k^k. \tag{48,15}$$

Наконец, используя закон преобразования волнового 4-вектора, легко рассмотреть так называемый *эффект Допплера* — изменение частоты волны ω, испускаемой источником, движущимся по отношению к наблюдателю, по сравнению с «собственной» частотой ω_0 того же источника в системе отсчета (K_0), в которой он покоится.

Пусть V — скорость источника, т. е. скорость системы отсчета K_0 относительно K. Согласно общим формулам преобразования 4-векторов имеем:

$$k^{(0)0} = \frac{k^0 - \frac{V}{c} k^1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

(скорость системы K относительно K_0 есть — V). Подставив сюда $k^0 = \omega/c$, $k^1 = k\cos\alpha = \frac{\omega}{c}\cos\alpha$, где α — угол (в системе K) между направлением испускания волны и направлением движения источника, и выражая ω через ω_0, получим:

$$\omega = \omega_0 \frac{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 - \frac{V}{c}\cos\alpha}. \tag{48,16}$$

Это и есть искомая формула. При $V \ll c$ она дает, если угол α не слишком близок к $\pi/2$:

$$\omega \approx \omega_0 \left(1 + \frac{V}{c}\cos\alpha\right). \tag{48,17}$$

При $\alpha = \pi/2$ имеем:

$$\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} \approx \omega_0 \left(1 - \frac{V^2}{2c^2}\right); \tag{48,18}$$

в этом случае относительное изменение частоты пропорционально квадрату отношения V/c.

Задачи

1. Определить направление и величину осей эллипса поляризации по комплексной амплитуде $\mathbf{E}_0$.

Решение. Задача заключается в определении вектора $\mathbf{b} = \mathbf{b}_1 + i\mathbf{b}_2$ с вещественным квадратом. Имеем из (48,7):

$$\mathbf{E}_0\mathbf{E}_0^* = b_1^2 + b_2^2, \quad [\mathbf{E}_0\mathbf{E}_0^*] = -2i[\mathbf{b}_1\mathbf{b}_2], \tag{1}$$

или

$$b_1^2+b_2^2=A^2+B^2, \quad b_1b_2=AB\sin\delta,$$

где введены обозначения

$$|E_{0y}|=A, \quad |E_{0z}|=B, \quad \frac{E_{0z}}{B}=\frac{E_{0y}}{A}e^{i\delta}$$

для абсолютных значений E_{0y} и E_{0z} и разности фаз (δ) между ними. Отсюда

$$b_{1,2}=\sqrt{A^2+B^2+2AB\sin\delta}\pm\sqrt{A^2+B^2-2AB\sin\delta}, \tag{2}$$

чем и определяются величины полуосей эллипса поляризации.

Для определения их направления (относительно произвольных исходных осей y, z) исходим из равенства

$$\operatorname{Re}\left\{(\mathbf{E}_0\mathbf{b}_1)\left(\mathbf{E}_0^*\mathbf{b}_2\right)\right\}=0,$$

в котором легко убедиться, подставив $\mathbf{E}_0=(\mathbf{b}_1+i\mathbf{b}_2)e^{-i\alpha}$. Раскрывая это равенство в координатах y, z, получим для угла θ между направлением $\mathbf{b}_1$ и осью y:

$$\operatorname{tg}2\theta=\frac{2AB\cos\delta}{A^2-B^2}. \tag{3}$$

Направление вращения поля определяется знаком x-компоненты вектора $[\mathbf{b}_1\mathbf{b}_2]$. Написав из (1):

$$2i\,[\mathbf{b}_1\mathbf{b}_2]_x=E_{0z}E_{0y}^*-E_{0z}^*E_{0y}=|E_{0y}|^2\left\{\left(\frac{E_{0z}}{E_{0y}}\right)-\left(\frac{E_{0z}}{E_{0y}}\right)^*\right\},$$

мы видим, что направление вектора $[\mathbf{b}_1\mathbf{b}_2]$ (по или против положительного направления оси x), а тем самым и знак вращения (по или против направления винта, ввинчиваемого вдоль оси x) дается знаком мнимой части отношения E_{0z}/E_{0y} (плюс в первом и минус во втором случае). Это правило обобщает правило (48,11) при круговой поляризации.

2. Определить движение заряда в поле плоской монохроматической линейно поляризованной волны.

Решение. Выбирая направление поля $\mathbf{E}$ в волне в качестве оси y, пишем:

$$E_y=E=E_0\cos\omega\xi, \quad A_y=A=-\frac{cE_0}{\omega}\sin\omega\xi$$

($\xi=t-x/c$). По формулам (3—4) задачи 2 § 47 находим (в системе отсчета, в которой частица в среднем покоится) следующее параметрическое (параметр $\eta=\omega\xi$) представление движения:

$$x=-\frac{e^2E_0^2c}{8\gamma^2\omega^3}\sin2\eta, \qquad y=-\frac{eE_0c}{\gamma\omega^2}\cos\eta, \qquad z=0;$$

$$t=\frac{\eta}{\omega}-\frac{e^2E_0^2}{8\gamma^2\omega^3}\sin2\eta, \quad \gamma^2=m^2c^2+\frac{e^2E_0^2}{2\omega^2};$$

$$p_x=-\frac{e^2E_0^2}{4\gamma\omega^2}\cos2\eta, \qquad p_y=\frac{eE_0}{\omega}\sin\eta, \qquad p_z=0.$$

Заряд движется в плоскости xy по симметричной 8-образной кривой с продольной осью вдоль оси y.

3. Определить движение заряда в поле поляризованной по кругу волны.

Решение. Для поля в волне имеем:

$$E_y = E_0 \cos\omega\xi, \qquad E_z = E_0 \sin\omega\xi,$$

$$A_y = -\frac{cE_0}{\omega}\sin\omega\xi, \quad A_z = \frac{cE_0}{\omega}\cos\omega\xi.$$

Движение определяется формулами:

$$x = 0, \qquad y = -\frac{ecE_0}{\gamma\omega^2}\cos\omega t, \qquad z = -\frac{ecE_0}{\gamma\omega^2}\sin\omega t,$$

$$p_x = 0, \quad p_y = \frac{eE_0}{\omega}\sin\omega t, \qquad p_z = -\frac{eE_0}{\omega}\cos\omega t,$$

$$\gamma^2 = m^2c^2 + \frac{c^2E_0^2}{\omega^2}.$$

Таким образом, заряд движется в плоскости yz по окружности радиуса $ecE_0/\gamma\omega^2$ с постоянным по величине $p = eE_0/\omega$ импульсом; направление импульса $\mathbf{p}$ в каждый момент совпадает с направлением магнитного поля $\mathbf{H}$ волны.

§ 49. Спектральное разложение

Всякую волну можно подвергнуть так называемому спектральному разложению, т. е. представить в виде наложения монохроматических волн с различными частотами. Эти разложения имеют различный характер в зависимости от характера зависимости поля от времени.

К одной категории относятся случаи, когда разложение содержит частоты, образующие дискретный ряд значений. Простейший случай такого рода возникает при разложении чисто периодического (хотя и не монохроматического) поля. Это есть разложение в обычный ряд Фурье; оно содержит частоты, являющиеся целыми кратными «основной» частоты $\omega_0 = 2\pi/T$, где T — период поля. Напишем его в виде

$$f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n e^{-i\omega_0 nt} \tag{49,1}$$

(f — какая-либо из величин, описывающих поле). Величины f_n определяются по самой функции f интегралами

$$f_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\, e^{in\omega_0 t}\, dt. \tag{49,2}$$

Ввиду вещественности функции $f(t)$ очевидно, что

$$f_{-n} = f_n^*. \tag{49,3}$$

В более сложных случаях в разложении могут присутствовать частоты, являющиеся целыми кратными (и их суммами) нескольких различных, несоизмеримых друг с другом основных частот.

При возведении суммы (49,1) в квадрат и усреднении по времени произведения членов с различными частотами обращаются в нуль ввиду наличия в них осциллирующих множителей. Останутся лишь члены вида $f_n f_{-n} = |f_n|^2$. Таким образом, средний квадрат поля (средняя интенсивность волны) представится в виде суммы интенсивностей монохроматических компонент:

$$\overline{f^2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |f_n|^2 = 2\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|^2 \tag{49,4}$$

(подразумевается, что среднее по периоду значение самой функции $f(t)$ равно нулю, так что $f_0 = \overline{f} = 0$).

К другой категории относятся поля, разлагающиеся в интеграл Фурье, содержащий непрерывный ряд различных частот. Для этого функции $f(t)$ должны удовлетворять определенным условиям; обычно речь идет о функциях, обращающихся в нуль при $t = \pm\infty$. Такое разложение имеет вид

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_\omega e^{-i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi}, \tag{49,5}$$

причем компоненты Фурье определяются по самой функции $f(t)$ интегралами

$$f_\omega = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{i\omega t} dt. \tag{49,6}$$

При этом аналогично (49,3)

$$f_{-\omega} = f_\omega^*. \tag{49,7}$$

Выразим полную интенсивность волны, т. е. интеграл от f^2 по всему времени, через интенсивности компонент Фурье. С помощью (49,5—6) имеем:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ f \int_{-\infty}^{\infty} f_\omega e^{-i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi} \right\} dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ f_\omega \int_{-\infty}^{\infty} f e^{-i\omega t} dt \right\} \frac{d\omega}{2\pi} = \int_{-\infty}^{\infty} f_\omega f_{-\omega} \frac{d\omega}{2\pi},$$

или, учитывая (49,7),

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} |f_\omega|^2 \frac{d\omega}{2\pi} = 2\int_0^{\infty} |f_\omega|^2 \frac{d\omega}{2\pi}. \tag{49,8}$$

§ 50. Частично поляризованный свет

Всякая монохроматическая волна по самому своему определению непременно поляризована. Обычно, однако, приходится иметь дело с волнами лишь почти монохроматическими, содержащими частоты в некотором малом интервале $\Delta\omega$. Рассмотрим такую волну, и пусть ω есть некоторая средняя ее частота. Тогда ее поле (будем говорить, для определенности, об электрическом поле $\mathbf{E}$) в заданной точке пространства можно написать в виде

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0(t)\, e^{-i\omega t},$$

где комплексная амплитуда $\mathbf{E}_0(t)$ является некоторой медленно меняющейся функцией времени (у строго монохроматической волны было бы $\mathbf{E}_0 = \mathrm{const}$). Поскольку $\mathbf{E}_0$ определяет поляризацию волны, то это значит, что в каждой точке волны ее поляризация меняется со временем; такую волну называют *частично поляризованной*.

Свойства поляризации электромагнитных волн, в частности света, наблюдаются экспериментально посредством пропускания исследуемого света через различные тела (например, призмы Николя) и измерения интенсивности прошедшего через тело света. С математической точки зрения это означает, что о свойствах поляризации света делаются заключения, исходя из значений некоторых квадратичных функций его поля. При этом, разумеется, идет речь о средних по времени значениях этих функций.

Квадратичная функция поля состоит из членов, пропорциональных произведениям $E_\alpha E_\beta$, $E_\alpha^* E_\beta^*$ или $E_\alpha E_\beta^*$. Произведения вида

$$E_\alpha E_\beta = E_{0\alpha} E_{0\beta}\, e^{-2i\omega t}, \quad E_\alpha^* E_\beta^* = E_{0\alpha}^* E_{0\beta}^*\, e^{2i\omega t},$$

содержащие быстро осциллирующие множители $e^{\pm 2i\omega t}$, при усреднении по времени дают нуль. Произведения же $E_\alpha E_\beta^* = E_{0\alpha} E_{0\beta}^*$ такого множителя не содержат, и потому их средние значения отличны от нуля. Таким образом, мы видим, что свойства частично поляризованного света вполне характеризуются тензором

$$J_{\alpha\beta} = \overline{E_{0\alpha} E_{0\beta}^*}. \tag{50,1}$$

Поскольку вектор $\mathbf{E}_0$ всегда лежит в плоскости, перпендикулярной к направлению волны, то тензор $J_{\alpha\beta}$ имеет всего четыре компоненты (в этом параграфе индексы α, β подразумеваются пробегающими всего два значения: $\alpha, \beta = 1, 2$, отвечающих осям y и z; ось x — вдоль направления распространения волны).

Сумма диагональных компонент тензора $J_{\alpha\beta}$ (обозначим ее через J) есть вещественная величина — среднее значение квадрата модуля

вектора $\mathbf{E}_0$ (или, что то же, вектора $\mathbf{E}$):

$$J \equiv J_{\alpha\alpha} = \overline{\mathbf{E}_0 \mathbf{E}_0^*}. \qquad (50,2)$$

Этой величиной определяется интенсивность волны, измеряемая плотностью потока энергии в ней. Для того чтобы исключить эту величину, не имеющую прямого отношения к поляризационным свойствам, введем вместо $J_{\alpha\beta}$ тензор

$$\rho_{\alpha\beta} = \frac{J_{\alpha\beta}}{J}, \qquad (50,3)$$

для которого $\rho_{\alpha\alpha} = 1$; будем называть его *поляризациионным тензором*.

Из определения (50,1) видно, что компоненты тензора $J_{\alpha\beta}$, а с ним и $\rho_{\alpha\beta}$, связаны соотношениями

$$\rho_{\alpha\beta} = \rho_{\beta\alpha}^* \qquad (50,4)$$

(т. е. тензор, как говорят, эрмитов). В силу этих соотношений диагональные компоненты ρ_{11} и ρ_{22} вещественны (причем $\rho_{11} + \rho_{22} = 1$), а $\rho_{21} = \rho_{12}^*$. Всего, следовательно, поляризационный тензор характеризуется тремя вещественными параметрами.

Выясним условия, которым должен удовлетворять тензор $\rho_{\alpha\beta}$ для вполне поляризованного света. В этом случае $\mathbf{E}_0 = \text{const}$, и поэтому имеем просто

$$J_{\alpha\beta} = J\rho_{\alpha\beta} = E_{0\alpha} E_{0\beta}^* \qquad (50,5)$$

(без усреднения), т. е. компоненты тензора могут быть представлены в виде произведений компонент некоторого постоянного вектора. Необходимое и достаточное условие для этого выражается равенством нулю определителя

$$|\rho_{\alpha\beta}| = \rho_{11}\rho_{22} - \rho_{12}\rho_{21} = 0. \qquad (50,6)$$

Противоположным случаем является неполяризованный, или *естественный*, свет. Полное отсутствие поляризации означает, что все направления (в плоскости yz) вполне эквивалентны. Другими словами, поляризационный тензор должен иметь вид:

$$\rho_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\delta_{\alpha\beta}. \qquad (50,7)$$

При этом определитель $|\rho_{\alpha\beta}| = 1/4$.

В общем случае произвольной поляризации этот определитель имеет значения между 0 и $1/4$ [1]). Степенью поляризации назовем

[1]) В положительиости определителя для любого тензора вида (50,1) легко убедиться, рассматривая для простоты усредиеиие как суммирование по ряду различных дискретных значений и применяя известиое алгебраическое иеравеиство

$$\left|\sum_{a,\,b} x_a\, y_b\right|^2 \leqslant \sum_a |x_a|^2 \sum_b |y_b|^2.$$

положительную величину P, определенную согласно

$$|\rho_{\alpha\beta}| = \frac{1}{4}(1 - P^2). \qquad (50,8)$$

Она пробегает значения от 0 для неполяризованного до 1 для поляризованного света.

Произвольный тензор $\rho_{\alpha\beta}$ может быть разложен на две части — симметричную и антисимметричную. Из них первая

$$S_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\rho_{\alpha\beta} + \rho_{\beta\alpha})$$

в силу эрмитовости $\rho_{\alpha\beta}$ является вещественной. Антисимметричная же часть, напротив, чисто мнима. Как и всякий антисимметричный тензор ранга, равного числу измерений, она сводится к псевдоскаляру (см. примечание на стр. 33):

$$\frac{1}{2}(\rho_{\alpha\beta} - \rho_{\beta\alpha}) = -\frac{i}{2} e_{\alpha\beta} A,$$

где A — вещественный псевдоскаляр, $e_{\alpha\beta}$ — единичный антисимметричный тензор (с компонентами $e_{12} = -e_{21} = 1$). Таким образом, поляризационный тензор представится в виде

$$\rho_{\alpha\beta} = S_{\alpha\beta} - \frac{i}{2} e_{\alpha\beta} A, \quad S_{\alpha\beta} = S_{\beta\alpha}, \qquad (50,9)$$

т. е. сводится к одному вещественному симметричному тензору и одному псевдоскаляру.

Для поляризованной по кругу волны вектор $\mathbf{E}_0 = \mathrm{const}$, причем

$$E_{02} = \pm iE_{01}.$$

Легко видеть, что при этом $S_{\alpha\beta} = 0$, а $A = \pm 1$. Напротив, для линейно поляризованной волны постоянный вектор $\mathbf{E}_0$ может быть выбран вещественным, так что $A = 0$. В общем случае величину A можно назвать степенью круговой поляризации; она пробегает значения от $+1$ до -1, причем эти предельные значения отвечают соответственно право- и лево- циркулярно поляризованным волнам.

Вещественный тензор $S_{\alpha\beta}$, как и всякий симметричный тензор, может быть приведен к главным осям с двумя различными главными значениями, которые обозначим через λ_1 и λ_2. Направления главных осей взаимно перпендикулярны. Обозначая через $\mathbf{n}^{(1)}$ и $\mathbf{n}^{(2)}$ орты (единичные векторы) этих направлений, можно представить $S_{\alpha\beta}$ в виде

$$S_{\alpha\beta} = \lambda_1 n_\alpha^{(1)} n_\beta^{(1)} + \lambda_2 n_\alpha^{(2)} n_\beta^{(2)}, \quad \lambda_1 + \lambda_2 = 1. \qquad (50,10)$$

Величины λ_1 и λ_2 положительны и пробегают значения от 0 до 1.

Пусть $A = 0$, так что $\rho_{\alpha\beta} = S_{\alpha\beta}$. Каждый из двух членов в (50,10) имеет вид произведения двух компонент постоянного вещественного вектора ($\sqrt{\lambda_1}\mathbf{n}^{(1)}$ или $\sqrt{\lambda_2}\mathbf{n}^{(2)}$). Другими словами, каждый из этих

членов соответствует линейно поляризованному свету. Далее, мы видим, что в (50,10) нет члена, содержащего произведения компонент этих двух волн. Это означает, что обе части можно рассматривать как физически независимые друг от друга, или, как говорят, некогерентные. Действительно, если две волны независимы друг от друга, то среднее значение произведения $E_\alpha^{(1)}E_\beta^{(2)}$ равно произведению средних значений каждого из множителей, и поскольку каждое из последних равно нулю, то и

$$\overline{E_\alpha^{(1)}E_\beta^{(2)}} = 0.$$

Таким образом, мы приходим к результату, что в рассматриваемом случае ($A=0$) частично поляризованную волну можно представить как наложение двух некогерентных волн (с интенсивностями, пропорциональными λ_1 и λ_2), линейно поляризованных во взаимно перпендикулярных направлениях [1]). (В общем же случае комплексного тензора $\rho_{\alpha\beta}$ можно показать, что свет может быть представлен как наложение двух некогерентных эллиптически поляризованных волн, эллипсы поляризации которых подобны и взаимно перпендикулярны,— см. задачу 2.)

Пусть φ — угол между осью 1 (ось y) и ортом $\mathbf{n}^{(1)}$; тогда

$$\mathbf{n}^{(1)} = (\cos\varphi,\ \sin\varphi), \quad \mathbf{n}^{(2)} = (-\sin\varphi,\ \cos\varphi).$$

Вводя величину $l=\lambda_1-\lambda_2$ (пусть $\lambda_1>\lambda_2$), представим компоненты тензора (50,10) в следующем виде:

$$S_{\alpha\beta}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1+l\cos 2\varphi & l\sin 2\varphi\\ l\sin 2\varphi & 1-l\cos 2\varphi\end{pmatrix}. \tag{50,11}$$

Таким образом, при произвольном выборе осей y, z поляризационные свойства волны можно характеризовать следующими тремя вещественными параметрами: A — степень круговой поляризации, l — степень максимальной линейной поляризации, φ — угол между направлением $\mathbf{n}^{(1)}$ максимальной поляризации и осью y.

Вместо этих параметров может представить определенные преимущества другой набор трех параметров:

$$\xi_1 = l\sin 2\varphi, \quad \xi_2 = A, \quad \xi_3 = l\cos 2\varphi \tag{50,12}$$

(их называют *параметрами Стокса*). Поляризационный тензор выражается через них согласно

$$\rho_{\alpha\beta}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1+\xi_3 & \xi_1-i\xi_2\\ \xi_1+i\xi_2 & 1-\xi_3\end{pmatrix}. \tag{50,13}$$

---

[1]) Определитель $|S_{\alpha\beta}|=\lambda_1\lambda_2$; пусть $\lambda_1>\lambda_2$, тогда степень поляризации, определенная согласно (50,8), равна $P=1-2\lambda_2$. В данном случае ($A=0$) для характеристики степени поляризации света часто пользуются и так называемым *коэффициентом деполяризации*, определенным как отношение λ_2/λ_1.

Все три параметра пробегают значения между -1 и $+1$. Параметр ξ_3 характеризует линейную поляризацию вдоль осей y и z: значению $\xi_3=1$ отвечает полная линейная поляризация вдоль оси y, а значению $\xi_3=-1$ — вдоль оси z. Параметр же ξ_1 характеризует линейную поляризацию вдоль направлений, составляющих 45° с осью y: значению $\xi_1=1$ отвечает полная поляризация под углом $\varphi=\pi/4$, а значению $\xi_1=-1$ — под углом $\varphi=-\pi/4$ [1]).

Определитель тензора (50,13) равен

$$|\rho_{\alpha\beta}|=\frac{1}{4}\left(1-\xi_1^2-\xi_2^2-\xi_3^2\right). \qquad (50,14)$$

Сравнив с (50,8), мы видим, что

$$P=\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2}. \qquad (50,15)$$

Таким образом, при заданной общей степени поляризации P возможны различные типы поляризации, характеризуемые значениями трех величин ξ_1, ξ_2, ξ_3 с заданной суммой их квадратов; эти величины образуют как бы вектор заданной длины.

Отметим, что величины $\xi_2=A$ и $\sqrt{\xi_1^2+\xi_3^2}=l$ инвариантны относительно преобразований Лоренца. Это обстоятельство в значительной степени очевидно уже из самого смысла этих величин как степеней круговой и линейной поляризаций [2]).

Задачи

1. Разложить произвольный частично поляризованный свет на «естественную» и «поляризованную» части.

Решение. Такое разложение означает представление тензора $J_{\alpha\beta}$ в виде

$$J_{\alpha\beta}=\frac{1}{2}J^{(e)}\delta_{\alpha\beta}+E^{(n)}_{0\alpha}E^{(n)*}_{0\beta}.$$

---

[1]) Для полностью эллиптически поляризованной волны с осями эллипса $\mathbf{b}_1$ и $\mathbf{b}_2$ (см. § 48) параметры Стокса равны:

$$\xi_1=0, \quad \xi_2=\pm 2b_1b_2, \quad \xi_3=b_1^2-b_2^2.$$

При этом ось y направлена вдоль $\mathbf{b}_1$, а два знака в ξ_2 отвечают направлениям $\mathbf{b}_2$ в положительном или отрицательном направлении оси z.

[2]) Для прямого доказательства замечаем, что поскольку поле волны поперечно в любой системе отсчета, то заранее очевидно, что тензор $\rho_{\alpha\beta}$ остается двухмерным и в новой системе отсчета. При этом преобразование $\rho_{\alpha\beta}$ в $\rho'_{\alpha\beta}$ оставляет неизменной сумму квадратов модулей $\rho_{\alpha\beta}\rho^*_{\alpha\beta}$ (действительно, вид преобразования не зависит от конкретных поляризационных свойств света, а для вполне поляризованной волны эта сумма равна 1 в любой системе отсчета). В силу вещественности этого преобразования вещественная и мнимая части тензора $\rho_{\alpha\beta}$ (50,9) преобразуются независимо, а потому остаются неизменными также и суммы квадратов компонент каждой из них в отдельности, выражающиеся соответственно через l и A.

Первый член отвечает естественной, а второй — поляризованной частям света. Для определения интенсивностей этих частей замечаем, что определитель

$$\left| J_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} J^{(e)} \delta_{\alpha\beta} \right| = \left| E^{(\text{п})}_{0\alpha} E^{(\text{п})*}_{0\beta} \right| = 0.$$

Представив $J_{\alpha\beta} = J\rho_{\alpha\beta}$ в виде (50,13) и решая это уравнение, получим

$$J^{(e)} = J(1-P).$$

Интенсивность же поляризованной части $J^{(\text{п})} = \left| \mathbf{E}^{(\text{п})}_0 \right|^2 = J - J^{(e)} = JP.$

Поляризованная часть света представляет собой, вообще говоря, эллиптически поляризованную волну, причем направления осей эллипса совпадают с главными осями тензора $S_{\alpha\beta}$. Величины b_1 и b_2 осей эллипса и угол φ, образуемый осью $\mathbf{b}_1$ с осью y, определяются из равенств:

$$b_1^2 + b_2^2 = JP, \quad 2b_1b_2 = J\xi_2, \quad \operatorname{tg} 2\varphi = \frac{\xi_2}{\xi_3}.$$

2. Представить произвольную частично поляризованную волну в виде наложения двух некогерентных эллиптически поляризованных волн.

Решение. Для эрмитового тензора $\rho_{\alpha\beta}$ «главные оси» определяются двумя единичными комплексными ортами $\mathbf{n}\,(\mathbf{nn}^* = 1)$, удовлетворяющими уравнениям

$$\rho_{\alpha\beta} n_\beta = \lambda n_\alpha. \tag{1}$$

Главные значения λ_1 и λ_2 даются корнями уравнения

$$|\rho_{\alpha\beta} - \lambda\delta_{\alpha\beta}| = 0.$$

Умножив уравнение (1) с обеих сторон на $\overset{*}{n}_\alpha$, имеем:

$$\lambda = \rho_{\alpha\beta}\overset{*}{n}_\alpha n_\beta = \frac{1}{J}\overline{|E_{0\alpha} n_\alpha|^2},$$

откуда видно, что λ_1, λ_2 вещественны и положительны. Умножив уравнения

$$\rho_{\alpha\beta} n^{(1)}_\beta = \lambda_1 n^{(1)}_\alpha, \quad \overset{*}{\rho}_{\alpha\beta} n^{(2)*}_\beta = \lambda_2 \overset{*}{n}_\alpha$$

первое на $n^{(2)*}_\alpha$, а второе на $n^{(1)}_\alpha$, вычтя почленно одно из другого и воспользовавшись эрмитовостью тензора $\rho_{\alpha\beta}$, получим:

$$(\lambda_1 - \lambda_2)\, n^{(1)}_\alpha n^{(2)*}_\alpha = 0.$$

Отсюда следует, что $\mathbf{n}^{(1)}\mathbf{n}^{(2)*} = 0$, т. е. орты $\mathbf{n}^{(1)}$ и $\mathbf{n}^{(2)}$ ортогональны друг другу.

Искомое разложение волны осуществляется формулой

$$\rho_{\alpha\beta} = \lambda_1 n^{(1)}_\alpha n^{(1)*}_\beta + \lambda_2 n^{(2)}_\alpha n^{(2)*}_\beta.$$

Всегда можно выбрать комплексную амплитуду так, чтобы из двух взаимно перпендикулярных компонент одна была вещественна, а другая мнима (ср. § 48). Положив

$$n^{(1)}_1 = b_1, \quad n^{(1)}_2 = ib_2$$

(где теперь b_1 и b_2 подразумеваются нормированными условием $b_1^2 + b_2^2 = 1$), получим тогда из уравнения $\mathbf{n}^{(1)}\mathbf{n}^{(2)*} = 0$:

$$n^{(2)}_1 = ib_2, \quad n^{(2)}_2 = b_1.$$

Отсюда видно, что эллипсы обоих эллиптически поляризованных колебаний подобны (имеют одинаковые отношения осей), причем один из них повернут на прямой угол относительно другого.

3. Найти закон преобразования параметров Стокса при повороте осей y, z на угол φ.

Решение. Искомый закон определяется связью параметров Стокса с компонентами двухмерного тензора в плоскости yz и дается формулами

$$\xi_1' = \xi_1 \cos 2\varphi - \xi_3 \sin 2\varphi, \quad \xi_3' = \xi_1 \sin 2\varphi + \xi_3 \cos 2\varphi, \quad \xi_2' = \xi_2.$$

§ 51. Разложение электростатического поля

Поле, созданное зарядами, тоже можно формально разложить по плоским волнам (в интеграл Фурье). Это разложение, однако, существенно отличается от разложения электромагнитных волн в пустоте. Действительно, поле зарядов не удовлетворяет однородному волновому уравнению, а потому и каждый член разложения поля не удовлетворяет этому уравнению. Отсюда следует, что для плоских волн, на которые можно разложить поле зарядов, не выполняется соотношение $k^2 = \omega^2/c^2$, которое имеет место для плоских монохроматических электромагнитных волн.

В частности, если формально представить электростатическое поле в виде наложения плоских волн, то «частота» этих волн будет равна нулю, так как рассматриваемое поле не зависит от времени; волновые же векторы, конечно, отличны от нуля.

Рассмотрим поле, создаваемое точечным зарядом e, находящимся в начале координат. Потенциал φ этого поля определяется уравнением (см. § 36)

$$\Delta\varphi = -4\pi e\delta(\mathbf{r}). \tag{51,1}$$

Разложим φ в пространственный интеграл Фурье, т. е. представим его в виде

$$\varphi = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\mathbf{kr}} \varphi_{\mathbf{k}} \frac{d^3k}{(2\pi)^3}, \quad d^3k = dk_x dk_y dk_z. \tag{51,2}$$

При этом

$$\varphi_{\mathbf{k}} = \int \varphi(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{kr}} dV.$$

Применив к обеим частям равенства (51,2) оператор Лапласа, находим:

$$\Delta\varphi = -\int_{-\infty}^{+\infty} k^2 e^{i\mathbf{kr}} \varphi_{\mathbf{k}} \frac{d^3k}{(2\pi)^3},$$

так что компонента Фурье от выражения $\Delta\varphi$ есть

$$(\Delta\varphi)_{\mathbf{k}} = -k^2 \varphi_{\mathbf{k}}.$$

С другой стороны, можно найти $(\Delta\varphi)_{\mathbf{k}}$, взяв компоненту Фурье от обеих частей уравнения (51,1):

$$(\Delta\varphi)_{\mathbf{k}} = -\int 4\pi e\delta(\mathbf{r})\, e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}}\, dV = -4\pi e.$$

Сравнивая оба полученных выражения, находим:

$$\varphi_{\mathbf{k}} = \frac{4\pi e}{k^2}. \qquad (51,3)$$

Эта формула и решает поставленную задачу.

Аналогично потенциалу φ можно разложить и напряженность

$$\mathbf{E} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{E}_{\mathbf{k}}\, e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \frac{d^3k}{(2\pi)^3}. \qquad (51,4)$$

С помощью (51,2) имеем:

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{\mathbf{k}}\, e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} = -\int i\mathbf{k}\varphi_{\mathbf{k}}\, e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \frac{d^3k}{(2\pi)^3}.$$

Сравнивая с (51,4), находим:

$$\mathbf{E}_{\mathbf{k}} = -i\mathbf{k}\varphi_{\mathbf{k}} = -i\frac{4\pi e\mathbf{k}}{k^2}. \qquad (51,5)$$

Отсюда видно, что поле волн, на которое мы разложили кулоново поле, направлено по волновому вектору. Поэтому эти волны можно назвать продольными.

§ 52. Собственные колебания поля

Рассмотрим свободное (без зарядов) электромагнитное поле, находящееся в некотором конечном объеме пространства. Для упрощения дальнейших вычислений мы предполагаем, что этот объем обладает формой прямоугольного параллелепипеда со сторонами, равными соответственно A, B, C. Мы можем тогда разложить все величины, характеризующие поле в этом параллелепипеде, в тройной ряд Фурье (по трем координатам). Напишем это разложение (например, для векторного потенциала) в виде:

$$\mathbf{A} = \sum_{\mathbf{k}} \left(\mathbf{a}_{\mathbf{k}}\, e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} + \mathbf{a}^*_{\mathbf{k}} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}}\right), \qquad (52,1)$$

явным образом выражающем вещественность $\mathbf{A}$. Суммирование производится здесь по всем возможным значениям вектора $\mathbf{k}$, компоненты которого пробегают, как известно, значения

$$k_x = \frac{2\pi n_x}{A}, \quad k_y = \frac{2\pi n_y}{B}, \quad k_z = \frac{2\pi n_z}{C}, \qquad (52,2)$$

где n_x, n_y, n_z — положительные и отрицательные целые числа. Из уравнения div **A** следует, что для каждого **k**:

$$\mathbf{k}\mathbf{a}_\mathbf{k} = 0, \tag{52,3}$$

т. е. комплексные векторы $\mathbf{a}_\mathbf{k}$ ортогональны к соответствующим волновым векторам. Векторы $\mathbf{a}_\mathbf{k}$ являются, конечно, функциями времени; они удовлетворяют уравнениям

$$\ddot{\mathbf{a}}_\mathbf{k} + c^2k^2\mathbf{a}_\mathbf{k} = 0. \tag{52,4}$$

Если размеры A, B, C выбранного объема достаточно велики, то соседние значения k_x, k_y, k_z (у которых n_x, n_y, n_z отличаются на единицу) очень близки друг к другу. Мы можем говорить тогда о числе возможных значений k_x, k_y, k_z в небольших интервалах Δk_x, Δk_y, Δk_z.

Поскольку соседние значения, скажем k_x, соответствуют значениям n_x, отличающимся на единицу, то число Δn_x возможных значений k_x в интервале Δk_x равно просто соответствующему интервалу значений n_x. Таким образом, мы находим:

$$\Delta n_x = \frac{A}{2\pi}\Delta k_x, \qquad \Delta n_y = \frac{B}{2\pi}\Delta k_y, \qquad \Delta n_z = \frac{C}{2\pi}\Delta k_z.$$

Полное число Δn возможных значений вектора **k** с компонентами в интервалах Δk_x, Δk_y, Δk_z равно произведению $\Delta n_x \Delta n_y \Delta n_z$, т. е.

$$\Delta n = \frac{V}{(2\pi)^3}\Delta k_x \Delta k_y \Delta k_z, \tag{52,5}$$

где $V = ABC$ есть объем поля.

Легко определить отсюда число возможных значений волнового вектора с абсолютной величиной в интервале Δk и направлением в элементе телесного угла Δo. Для этого надо только перейти к сферическим координатам в «k-пространстве» и написать вместо $\Delta k_x \Delta k_y \Delta k_z$ элемент объема в этих координатах. Таким образом,

$$\Delta n = \frac{V}{(2\pi)^3} k^2 \Delta k \Delta o. \tag{52,6}$$

Наконец, полное число значений волнового вектора с абсолютными величинами k в интервале Δk и всеми направлениями равно (пишем 4π вместо Δo)

$$\Delta n = \frac{V}{2\pi^2} k^2 \Delta k. \tag{52,7}$$

Векторы $\mathbf{a}_\mathbf{k}$ как функции времени сводятся к простым периодическим функциям с частотами $\omega_k = ck$ [ср. уравнение (52,4)]. Представим разложение поля в таком виде, чтобы оно являлось разложением на бегущие плоские волны. Для этого будем считать, что каждое из $\mathbf{a}_\mathbf{k}$ зависит от времени посредством множителя $e^{-i\omega_k t}$:

$$\mathbf{a}_\mathbf{k} \sim e^{-i\omega_k t}, \quad \omega_k = ck. \tag{52,8}$$

Тогда каждый отдельный член в сумме (52,1) будет функцией только

от разности $\mathbf{kr}-\omega_k t$, что соответствует волне, распространяющейся в направлении вектора $\mathbf{k}$.

Вычислим полную энергию

$$\mathscr{E}=\frac{1}{8\pi}\int(E^2+H^2)\,dV$$

рассматриваемого поля в объеме V, выразив ее через величины $\mathbf{a_k}$. Для электрического поля имеем:

$$\mathbf{E}=-\frac{1}{c}\dot{\mathbf{A}}=-\frac{1}{c}\sum_{\mathbf{k}}(\dot{\mathbf{a}}_{\mathbf{k}}e^{i\mathbf{kr}}+\dot{\mathbf{a}}^*_{\mathbf{k}}e^{-i\mathbf{kr}}),$$

или, принимая во внимание (52,8):

$$\mathbf{E}=i\sum_{\mathbf{k}}k(\mathbf{a_k}\,e^{i\mathbf{kr}}-\mathbf{a}^*_{\mathbf{k}}e^{-i\mathbf{kr}}). \tag{52,9}$$

Для магнитного поля $\mathbf{H}=\operatorname{rot}\mathbf{A}$ находим:

$$\mathbf{H}=i\sum_{\mathbf{k}}([\mathbf{ka_k}]\,e^{i\mathbf{kr}}-[\mathbf{ka}^*_{\mathbf{k}}]\,e^{-i\mathbf{kr}}). \tag{52,10}$$

При вычислении квадратов этих сумм надо иметь в виду, что все произведения членов с волновыми векторами $\mathbf{k}\neq\mathbf{k}'$ дают нуль при интегрировании по всему объему. Действительно, такие члены содержат множители вида $e^{\pm i\mathbf{qr}}$, $\mathbf{q}=\mathbf{k}\pm\mathbf{k}'$, а интеграл, например,

$$\int\limits_0^A e^{i\frac{2\pi}{A}n_x x}\,dx$$

с целым отличным от нуля n_x равен нулю. По той же причине обращаются в нуль произведения, содержащие множители $e^{\pm 2i\mathbf{kr}}$. В членах же, в которых экспоненциальные множители выпадают, интегрирование по dV дает просто объем V.

В результате найдем:

$$\mathscr{E}=\frac{V}{4\pi}\sum_{\mathbf{k}}\{k^2\mathbf{a_k}\mathbf{a}^*_{\mathbf{k}}+[\mathbf{ka_k}][\mathbf{ka}^*_{\mathbf{k}}]\}.$$

Но ввиду того, что $\mathbf{a_k}\mathbf{k}=0$, имеем:

$$[\mathbf{ka_k}][\mathbf{ka}^*_{\mathbf{k}}]=k^2\mathbf{a_k}\mathbf{a}^*_{\mathbf{k}},$$

и мы получаем окончательно:

$$\mathscr{E}=\sum_{\mathbf{k}}\mathscr{E}_{\mathbf{k}},\quad \mathscr{E}_{\mathbf{k}}=\frac{k^2V}{2\pi}\mathbf{a_k}\mathbf{a}^*_{\mathbf{k}}. \tag{52,11}$$

Таким образом, полная энергия поля выражается в виде суммы энергий $\mathscr{E}_{\mathbf{k}}$, связанных с каждой из плоских волн в отдельности.

Аналогичным образом можно вычислить полный импульс поля

$$\frac{1}{c^2}\int\mathbf{S}\,dV=\frac{1}{4\pi c}\int[\mathbf{EH}]\,dV,$$

причем получается

$$\sum_{\mathbf{k}} \frac{\mathbf{k}}{k} \frac{\mathscr{E}_{\mathbf{k}}}{c}. \tag{52,12}$$

Этот результат можно было ожидать заранее ввиду известного соотношения между энергией и импульсом плоских волн (см. § 47).

Разложением (52,1) достигается описание поля посредством дискретного ряда переменных (векторы $\mathbf{a_k}$) вместо описания непрерывным рядом переменных, каковым по существу является описание потенциалом $\mathbf{A}(x, y, z, t)$, задающимся во всех точках пространства. Мы произведем теперь преобразование переменных $\mathbf{a_k}$, в результате которого окажется возможным придать уравнениям поля вид, аналогичный каноническим уравнениям (уравнениям Гамильтона) механики.

Введем вещественные «канонические переменные» $\mathbf{Q_k}$ и $\mathbf{P_k}$ согласно соотношениям

$$\begin{aligned} \mathbf{Q_k} &= \sqrt{\frac{V}{4\pi c^2}} (\mathbf{a_k} + \mathbf{a_k^*}), \\ \mathbf{P_k} &= -i\omega_k \sqrt{\frac{V}{4\pi c^2}} (\mathbf{a_k} - \mathbf{a_k^*}) = \dot{\mathbf{Q}}_\mathbf{k}. \end{aligned} \tag{52,13}$$

Функция Гамильтона поля получается подстановкой этих выражений в энергию (52,11)

$$\mathscr{H} = \sum_{\mathbf{k}} \mathscr{H}_{\mathbf{k}} = \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{2} (\mathbf{P_k^2} + \omega_k^2 \mathbf{Q_k^2}). \tag{52,14}$$

При этом уравнения Гамильтона $\partial\mathscr{H}/\partial\mathbf{P_k} = \dot{\mathbf{Q}}_\mathbf{k}$ совпадают с равенствами $\mathbf{P_k} = \dot{\mathbf{Q}}_\mathbf{k}$, которые, таким образом, действительно оказываются следствием уравнений движения [это достигнуто надлежащим выбором коэффициента в преобразовании (52,13)]. Уравнения же $\partial\mathscr{H}/\partial\mathbf{Q_k} = -\dot{\mathbf{P}}_\mathbf{k}$ приводят к уравнениям

$$\ddot{\mathbf{Q}}_\mathbf{k} + \omega_k^2 \mathbf{Q_k} = 0, \tag{52,15}$$

т. е. тождественны с уравнениями поля.

Каждый из векторов $\mathbf{Q_k}$ и $\mathbf{P_k}$ перпендикулярен к волновому вектору $\mathbf{k}$, т. е. имеет по две независимые компоненты. Направление этих векторов определяет направление поляризации соответствующей бегущей волны. Обозначив две компоненты вектора $\mathbf{Q_k}$ (в плоскости, перпендикулярной $\mathbf{k}$) посредством $Q_{\mathbf{k}j}$, $j = 1, 2$, имеем $\mathbf{Q_k^2} = \sum_j Q_{\mathbf{k}j}^2$, и аналогично для $\mathbf{P_k}$. Тогда

$$\mathscr{H} = \sum_{\mathbf{k}j} \mathscr{H}_{\mathbf{k}j}, \qquad \mathscr{H}_{\mathbf{k}j} = \frac{1}{2} (P_{\mathbf{k}j}^2 + \omega_k^2 Q_{\mathbf{k}j}^2). \tag{52,16}$$

Мы видим, что функция Гамильтона распадается на сумму независимых членов, каждый из которых содержит только по одной паре величин $Q_{\mathbf{k}j}$, $P_{\mathbf{k}j}$. Каждый такой член соответствует бегущей волне с определенными волновым вектором и поляризацией. При этом $\mathscr{H}_{\mathbf{k}j}$ имеет вид функции Гамильтона одномерного «осциллятора», совершающего простые гармонические колебания. Поэтому о полученном разложении говорят иногда как о разложении поля на осцилляторы.

Выпишем формулы, выражающие в явном виде поле через переменные $\mathbf{P}_\mathbf{k}$, $\mathbf{Q}_\mathbf{k}$. Из (52,13) имеем:

$$\mathbf{a}_\mathbf{k} = \frac{i}{k}\sqrt{\frac{\pi}{V}}(\mathbf{P}_\mathbf{k} - i\omega_k \mathbf{Q}_\mathbf{k}), \quad \mathbf{a}^*_\mathbf{k} = -\frac{i}{k}\sqrt{\frac{\pi}{V}}(\mathbf{P}_\mathbf{k} + i\omega_k \mathbf{Q}_\mathbf{k}). \quad (52,17)$$

Подставляя эти выражения в (52,1), найдем векторный потенциал поля:

$$\mathbf{A} = \sqrt{\frac{4\pi}{V}}\sum_\mathbf{k} \frac{1}{k}(ck\,\mathbf{Q}_\mathbf{k}\cos\mathbf{kr} - \mathbf{P}_\mathbf{k}\sin\mathbf{kr}). \quad (52,18)$$

Для электрического и магнитного полей получим:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= -\sqrt{\frac{4\pi}{V}}\sum_\mathbf{k}(ck\,\mathbf{Q}_\mathbf{k}\sin\mathbf{kr} + \mathbf{P}_\mathbf{k}\cos\mathbf{kr}), \\ \mathbf{H} &= -\sqrt{\frac{4\pi}{V}}\sum_\mathbf{k}\frac{1}{k}(ck\,[\mathbf{k}\mathbf{Q}_\mathbf{k}]\sin\mathbf{kr} + [\mathbf{k}\mathbf{P}_\mathbf{k}]\cos\mathbf{kr}). \end{aligned} \quad (52,19)$$

ГЛАВА VII

РАСПРОСТРАНЕНИЕ СВЕТА

§ 53. Геометрическая оптика

Плоская волна отличается тем свойством, что направление ее распространения и амплитуда везде одинаковы. Произвольные электромагнитные волны этим свойством, конечно, не обладают.

Однако часто электромагнитные волны, не являющиеся плоскими, тем не менее таковы, что их можно рассматривать как плоские в каждом небольшом участке пространства. Для этого необходимо, чтобы амплитуда и направление волны почти не менялись на протяжении расстояний порядка длины волны.

Если выполнено это условие, то можно ввести так называемые *волновые поверхности*, во всех точках которых фаза волны в данный момент времени одинакова (для плоской волны это — плоскости, перпендикулярные к направлению ее распространения). В каждом небольшом участке пространства можно говорить о направлении распространения волны, нормальном к волновой поверхности. При этом можно ввести понятие *лучей* — линий, касательная к которым в каждой точке совпадает с направлением распространения волны.

Изучение законов распространения волн в этом случае составляет предмет *геометрической оптики*. Геометрическая оптика рассматривает, следовательно, распространение электромагнитных волн, в частности света, как распространение лучей, совершенно отвлекаясь при этом от их волновой природы. Другими словами, геометрическая оптика соответствует предельному случаю малых длин волн, $\lambda \rightarrow 0$.

Займемся теперь выводом основного уравнения геометрической оптики — уравнения, определяющего направление лучей. Пусть f есть любая величина, описывающая поле волны (любая из компонент $\mathbf{E}$ или $\mathbf{H}$). В плоской монохроматической волне f имеет вид

$$f = ae^{i\,(\mathbf{kr} - \omega t + \alpha)} = a \exp\left[i\left(-k_i x^i + \alpha\right)\right] \qquad (53,1)$$

(мы опускаем знак Re; везде подразумевается вещественная часть).

Напишем выражение для поля в виде

$$f = ae^{i\psi}. \qquad (53,2)$$

В случае, когда волна не плоская, но геометрическая оптика применима, амплитуда a является, вообще говоря, функцией координат и времени, а фаза ψ, называемая также *эйконалом*, не имеет простого вида, как в (53,1). Существенно, однако, что эйконал ψ является большой величиной. Это видно уже из того, что он меняется на 2π на протяжении длины волны, а геометрическая оптика соответствует пределу $\lambda \rightarrow 0$.

В малых участках пространства и интервалах времени эйконал ψ можно разложить в ряд; с точностью до членов первого порядка имеем:

$$\psi = \psi_0 + \mathbf{r}\frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{r}} + t\frac{\partial \psi}{\partial t}$$

(начало координат и начало отсчета времени выбраны в рассматриваемом участке пространства и интервале времени; значения производных берутся в начале координат). Сравнивая это выражение с (53,1), мы можем написать:

$$\mathbf{k} = \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{r}} \equiv \operatorname{grad} \psi, \quad \omega = -\frac{\partial \psi}{\partial t}, \qquad (53,3)$$

в соответствии с тем, что в каждом небольшом участке пространства (и в небольших интервалах времени) волну можно рассматривать как плоскую. В четырехмерном виде соотношения (53,3) напишутся как

$$k_i = -\frac{\partial \psi}{\partial x^i}, \qquad (53,4)$$

где k_i — волновой 4-вектор.

Мы видели в § 48, что компоненты 4-вектора k^i связаны соотношением $k_i k^i = 0$. Подставляя сюда (53,4), находим уравнение

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_i}\frac{\partial \psi}{\partial x^i} = 0. \qquad (53,5)$$

Это уравнение, называемое *уравнением эйконала*, является основным уравнением геометрической оптики.

Уравнение эйконала можно вывести также и непосредственным предельным переходом $\lambda \rightarrow 0$ в волновом уравнении. Поле f удовлетворяет волновому уравнению

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\, \partial x^i} = 0.$$

Подставляя сюда $f = ae^{i\psi}$, находим:

$$\frac{\partial^2 a}{\partial x_i\, \partial x^i}\, e^{i\psi} + 2i\, \frac{\partial a}{\partial x_i}\, \frac{\partial \psi}{\partial x^i}\, e^{i\psi} + if\, \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i\, \partial x^i} - \frac{\partial \psi}{\partial x_i}\, \frac{\partial \psi}{\partial x^i} f = 0. \qquad (53,6)$$

Но эйконал ψ, как было выше указано, есть большая величина; поэтому можно пренебречь здесь тремя первыми членами по сравнению с четвертым, и мы приходим снова к уравнению (53,5).

Укажем еще некоторые соотношения, которые, правда, в применении к распространению света в пустоте приводят лишь к заранее очевидным результатам. Существенно, однако, что в своей общей форме эти выводы применимы и к распространению света в материальных средах.

Из формы уравнения эйконала вытекает замечательная аналогия между геометрической оптикой и механикой материальных частиц. Движение материальной частицы определяется уравнением Гамильтона—Якоби (16,11). Это уравнение, как и уравнение эйконала, является уравнением в частных производных первого порядка и второй степени. Как известно, действие S связано с импульсом $\mathbf{p}$ и функцией Гамильтона $\mathscr{H}$ частицы соотношениями

$$\mathbf{p}=\frac{\partial S}{\partial \mathbf{r}}, \quad \mathscr{H}=-\frac{\partial S}{\partial t}.$$

Сравнивая эти формулы с формулами (53,3), мы видим, что волновой вектор волны играет в геометрической оптике роль импульса частицы в механике, а частота—роль функции Гамильтона, т. е. энергии частицы. Абсолютная величина k волнового вектора связана с частотой посредством формулы $k=\omega/c$. Это соотношение аналогично соотношению $p=\mathscr{E}/c$ между импульсом и энергией частицы с массой, равной нулю, и скоростью, равной скорости света.

Для частиц имеют место уравнения Гамильтона

$$\dot{\mathbf{p}}=-\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial \mathbf{r}}, \quad \mathbf{v}=\dot{\mathbf{r}}=\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial \mathbf{p}}.$$

Ввиду указанной аналогии мы можем непосредственно написать подобные уравнения для лучей

$$\dot{\mathbf{k}}=-\frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{r}}, \qquad \dot{\mathbf{r}}=\frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{k}}. \tag{53,7}$$

В пустоте $\omega=ck$, так что $\dot{\mathbf{k}}=0$, $\mathbf{v}=c\mathbf{n}$ ($\mathbf{n}$—единичный вектор вдоль направления распространения), т. е., как и следовало, в пустоте лучи являются прямыми линиями, вдоль которых свет распространяется со скоростью c.

Аналогия между волновым вектором волны и импульсом частицы в особенности ясно проявляется в следующем обстоятельстве. Рассмотрим волну, представляющую собой наложение монохроматических волн с частотами, лежащими в некотором небольшом интервале, и занимающую некоторую конечную область пространства (так называемый *волновой пакет*). Вычислим 4-импульс поля этой волны, воспользовавшись формулой (32,6) с тензором энергии-импульса (48,15)

(для каждой монохроматической компоненты). Заменяя в этой формуле k^i некоторым его средним значением, получим выражение вида

$$P^i = Ak^i, \qquad (53,8)$$

где коэффициент пропорциональности A между двумя 4-векторами P^i и k^i есть некоторый скаляр. В трехмерном виде это соотношение дает:

$$\mathbf{P} = A\mathbf{k}, \quad \mathscr{E} = A\omega. \qquad (53,9)$$

Таким образом, мы видим, что импульс и энергия волнового пакета преобразуются от одной системы отсчета к другой соответственно как волновой вектор и частота.

Продолжая аналогию, можно установить для геометрической оптики принцип, аналогичный принципу наименьшего действия в механике. Однако его при этом нельзя будет написать в гамильтоновой форме, $\delta \int L\,dt = 0$, так как оказывается невозможным ввести для лучей функцию, аналогичную функции Лагранжа для частиц. Действительно, функция Лагранжа L частицы связана с функцией Гамильтона $\mathscr{H}$ посредством $L = \mathbf{p}\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial \mathbf{p}} - \mathscr{H}$. Заменяя функцию Гамильтона частотой ω, а импульс — волновым вектором $\mathbf{k}$, мы должны были бы написать для функции Лагранжа в оптике $\mathbf{k}\frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{k}} - \omega$. Но это выражение равно нулю, поскольку $\omega = ck$. Невозможность введения функции Лагранжа для лучей видна, впрочем, и непосредственно из указанного выше обстоятельства, что распространение лучей аналогично движению частиц с массой, равной нулю.

Если волна обладает определенной постоянной частотой ω, то зависимость ее поля от времени определяется множителем вида $e^{-i\omega t}$. Поэтому для эйконала такой волны мы можем написать:

$$\psi = -\omega t + \psi_0(x, y, z), \qquad (53,10)$$

где ψ_0 — функция только от координат. Уравнение эйконала (53,5) принимает теперь вид

$$(\operatorname{grad} \psi_0)^2 = \frac{\omega^2}{c^2}. \qquad (53,11)$$

Волновые поверхности являются поверхностями постоянного эйконала, т. е. семейством поверхностей вида $\psi_0(x, y, z) = \text{const}$. Лучи же в каждой точке нормальны к соответствующей волновой поверхности; их направление определяется градиентом $\nabla\psi_0$.

Как известно, в случае, когда энергия постоянна, принцип наименьшего действия для частицы можно написать также и в виде так называемого принципа Мопертюи:

$$\delta S = \delta \int \mathbf{p}\,d\mathbf{l} = 0,$$

где интегрирование производится по траектории частицы между двумя заданными ее положениями. Импульс предполагается при этом выраженным как функция от энергии и дифференциалов координат частицы. Аналогичный принцип для лучей называется *принципом Ферма*. В этом случае мы можем написать по аналогии:

$$\delta\psi = \delta \int \mathbf{k}\, d\mathbf{l} = 0. \qquad (53,12)$$

В пустоте $\mathbf{k} = \frac{\omega}{c}\mathbf{n}$, и мы получаем ($\mathbf{n}d\mathbf{l} = dl$):

$$\delta \int dl = 0, \qquad (53,13)$$

что и соответствует прямолинейному распространению лучей.

§ 54. Интенсивность

Таким образом, в геометрической оптике световую волну можно рассматривать как пучок лучей. Лучи, однако, сами по себе определяют лишь направление распространения света в каждой точке; остается вопрос о распределении интенсивности света в пространстве.

Выделим на какой-либо из волновых поверхностей рассматриваемого пучка бесконечно малый элемент. Из дифференциальной геометрии известно, что всякая поверхность имеет в каждой своей точке два, вообще говоря, различных главных радиуса кривизны. Пусть ac и bd (рис. 7) — элементы главных кругов кривизны, проведенные на данном элементе волновой поверхности. Тогда лучи, проходящие через точки a и c, пересекутся друг с другом в соответствующем центре кривизны O_1, а лучи, проходящие через b и d, пересекутся в другом центре кривизны O_2.

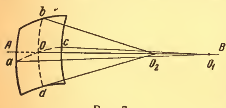


Рис. 7.

При данных углах раствора лучей, исходящих из O_1 и O_2, длины отрезков ac и bd пропорциональны соответствующим радиусам кривизны R_1 и R_2 (т. е. длинам O_1O и O_2O); площадь элемента поверхности пропорциональна произведению длин ac и bd, т. е. пропорциональна R_1R_2. Другими словами, если рассматривать элемент волновой поверхности, ограниченный определенным рядом лучей, то при движении вдоль них площадь этого элемента будет меняться пропорционально R_1R_2.

С другой стороны, интенсивность, т. е. плотность потока энергии, обратно пропорциональна площади поверхности, через которую проходит данное количество световой энергии. Таким образом, мы

приходим к выводу, что интенсивность

$$I = \frac{\text{const}}{R_1 R_2}. \tag{54,1}$$

Эту формулу надо понимать следующим образом. На каждом данном луче (AB на рис. 7) существуют определенные точки O_1 и O_2, являющиеся центрами кривизны всех волновых поверхностей, пересекающих данный луч. Расстояния OO_1 и OO_2 от точки O пересечения волновой поверхности с лучом до точек O_1 и O_2 являются радиусами кривизны R_1 и R_2 волновой поверхности в точке O. Таким образом, формула (54,1) определяет изменение интенсивности света вдоль данного луча в функции от расстояний до определенных точек на этом луче. Подчеркнем, что эта формула непригодна для сравнения интенсивностей в разных точках одной и той же волновой поверхности.

Поскольку интенсивность определяется квадратом модуля поля, то для изменения самого поля вдоль луча мы можем написать:

$$f = \frac{\text{const}}{\sqrt{R_1 R_2}} e^{ikR}, \tag{54,2}$$

где в фазовом множителе e^{ikR} под R может подразумеваться как R_1, так и R_2; величины e^{ikR_1} и e^{ikR_2} отличаются друг от друга только постоянным (для данного луча) множителем, поскольку разность $R_1 - R_2$, расстояние между обоими центрами кривизны, постоянна.

Если оба радиуса кривизны волновой поверхности совпадают, то (54,1) и (54,2) имеют вид:

$$I = \frac{\text{const}}{R^2}, \qquad f = \frac{\text{const}}{R} e^{ikR}. \tag{54,3}$$

Это имеет место, в частности, всегда в тех случаях, когда свет испускается точечным источником (волновые поверхности являются тогда концентрическими сферами, а R — расстоянием до источника света).

Из (54,1) мы видим, что интенсивность обращается в бесконечность в точках $R_1 = 0$, $R_2 = 0$, т. е. в центрах кривизны волновых поверхностей. Применяя это ко всем лучам в пучке, находим, что интенсивность света в данном пучке обращается в бесконечность, вообще говоря, на двух поверхностях — геометрическом месте всех центров кривизны волновой поверхности. Эти поверхности носят название *каустик*. В частном случае пучка лучей со сферическими волновыми поверхностями обе каустики сливаются в одну точку *(фокус)*.

Отметим, что, согласно известным из дифференциальной геометрии свойствам геометрического места центров кривизны семейства поверхностей, лучи касаются каустик.

Надо иметь в виду, что (при выпуклых волновых поверхностях) центры кривизны волновых поверхностей могут оказаться лежащими не на самих лучах, а на их продолжениях за оптическую систему, от которой они исходят. В таких случаях говорят о *мнимых каустиках* (или фокусах). Интенсивность света при этом нигде не обращается в бесконечность.

Что касается обращения интенсивности в бесконечность, то в действительности, разумеется, интенсивность в точках каустики делается большой, но остается конечной (см. задачу к § 59). Формальное обращение в бесконечность означает, что приближение геометрической оптики становится во всяком случае неприменимым вблизи каустик. С этим же обстоятельством связано и то, что изменение фазы вдоль луча может определяться формулой (54,2) только на участках луча, не включающих в себя точек его касания с каустиками. Ниже (в § 59) будет показано, что в действительности при прохождении мимо каустики фаза поля уменьшается на $\pi/2$. Это значит, что если на участке луча до его касания первой каустики поле пропорционально множителю e^{ikx} (x — координата вдоль луча), то после прохождения мимо каустики поле будет пропорционально $e^{i(kx-\pi/2)}$. То же самое произойдет вблизи точки касания второй каустики, и за этой точкой поле будет пропорционально $e^{i(kx-\pi)}$ [1]).

§ 55. Угловой эйконал

Идущий в пустоте луч света, попадая в какое-либо прозрачное материальное тело, имеет по выходе из этого тела направление, вообще говоря, отличное от первоначального. Это изменение направления зависит, конечно, от конкретных свойств тела и от его формы. Оказывается, однако, возможным вывести некоторые общие законы, относящиеся к изменению направления лучей света при прохождении через произвольные материальные тела. При этом предполагается только, что для лучей, распространяющихся внутри рассматриваемого тела, имеет место геометрическая оптика. Такие прозрачные тела, через которые пропускают лучи света, мы будем называть, как это принято, *оптическими системами*.

В силу указанной в § 53 аналогии между распространением лучей и движением частицы, те же общие законы справедливы и для изменения направления движения частиц, двигавшихся сначала прямолинейно в пустоте, затем проходящих через какое-нибудь электромагнитное поле и снова выходящих из этого поля в пустоту. Для

[1]) Хотя формула (54,2) сама по себе не справедлива вблизи каустик, но указанное изменение фазы поля формально соответствует изменению знака (т. е. умножению на $e^{i\pi}$) R_1 или R_2 в этой формуле.

определенности мы будем, однако, ниже говорить о распространении лучей света.

Мы видели, что уравнение эйконала, определяющее распространение лучей, может быть написано (для света с определенной частотой) в виде (53,11). Ниже мы будем для удобства обозначать посредством ψ эйконал ψ_0, деленный на постоянную величину ω/c. Тогда основное уравнение геометрической оптики будет иметь вид

$$(\nabla\psi)^2 = 1. \tag{55,1}$$

Каждое решение этого уравнения описывает собой определенный пучок лучей, причем направление луча, проходящего через данную точку пространства, определяется градиентом ψ в этой точке. Для наших целей, однако, такое описание недостаточно, поскольку мы ищем общие соотношения, определяющие прохождение через оптические системы не какого-либо одного определенного пучка лучей, а соотношения, относящиеся к любым лучам. Поэтому мы должны пользоваться эйконалом, взятым в таком виде, в котором он описывал бы все вообще возможные лучи света, т. е. лучи, проходящие через любую пару точек в пространстве. В обычной своей форме эйконал $\psi(\mathbf{r})$ есть фаза луча из некоторого пучка, проходящего через точку $\mathbf{r}$. Теперь же мы должны ввести эйконал как функцию $\psi(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ координат двух точек ($\mathbf{r}$, $\mathbf{r}'$ — радиус-векторы начальной и конечной точек луча). Через всякую пару точек $\mathbf{r}$, $\mathbf{r}'$ можно провести луч, и $\psi(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ есть разность фаз (или, как говорят, *оптическая длина пути*) этого луча между точками $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}'$. Ниже мы будем везде подразумевать под $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}'$ радиус-векторы точек на луче соответственно до и после его прохождения через оптическую систему.

Если в $\psi(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ один из радиус-векторов, скажем $\mathbf{r}'$, считать заданным, то ψ как функция от $\mathbf{r}$ будет описывать определенный пучок лучей, а именно пучок лучей, проходящих через точку $\mathbf{r}'$. Тогда ψ должно удовлетворять уравнению (55,1), в котором дифференцирование производится по компонентам $\mathbf{r}$. Аналогично, считая $\mathbf{r}$ заданным, находим еще одно уравнение для $\psi(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$, так что

$$(\nabla_{\mathbf{r}}\psi)^2 = 1, \quad (\nabla_{\mathbf{r}'}\psi)^2 = 1. \tag{55,2}$$

Направление луча определяется градиентом его фазы. Поскольку $\psi(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ есть разность фаз в точках $\mathbf{r}'$ и $\mathbf{r}$, то направление луча в точке $\mathbf{r}'$ определяется вектором $\mathbf{n}' = \partial\psi/\partial\mathbf{r}'$, а в точке $\mathbf{r}$ — вектором $\mathbf{n} = -\partial\psi/\partial\mathbf{r}$. Из (55,2) видно, что векторы $\mathbf{n}$ и $\mathbf{n}'$ единичные:

$$\mathbf{n}^2 = \mathbf{n}'^2 = 1. \tag{55,3}$$

Четыре вектора $\mathbf{r}$, $\mathbf{r}'$, $\mathbf{n}$, $\mathbf{n}'$ связаны между собой некоторым соотношением, поскольку два из них ($\mathbf{n}$, $\mathbf{n}'$) являются производными

по двум другим ($\mathbf{r}$, $\mathbf{r}'$) от некоторой функции ψ. Что касается самой функции ψ, то она удовлетворяет дополнительным условиям — уравнениям (55,2).

Для нахождения соотношения между $\mathbf{n}$, $\mathbf{n}'$, $\mathbf{r}$, $\mathbf{r}'$ удобно ввести вместо ψ другую величину, на которую бы не налагалось никаких дополнительных условий (т. е. которая не должна была бы удовлетворять каким-либо дифференциальным уравнениям). Это можно сделать следующим образом. В функции ψ независимыми переменными являются $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}'$, так что для дифференциала $d\psi$ имеем:

$$d\psi = \frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{r}}\,d\mathbf{r} + \frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{r}'}\,d\mathbf{r}' = -\mathbf{n}\,d\mathbf{r} + \mathbf{n}'\,d\mathbf{r}'.$$

Произведем теперь преобразование Лежандра к независимым переменным $\mathbf{n}$ и $\mathbf{n}'$ вместо $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}'$, т. е. напишем:

$$d\psi = -d(\mathbf{nr}) + \mathbf{r}\,d\mathbf{n} + d(\mathbf{n}'\mathbf{r}') - \mathbf{r}'\,d\mathbf{n}',$$

откуда, вводя функцию

$$\chi = \mathbf{n}'\mathbf{r}' - \mathbf{nr} - \psi, \qquad (55,4)$$

имеем:

$$d\chi = -\mathbf{r}\,d\mathbf{n} + \mathbf{r}'\,d\mathbf{n}'. \qquad (55,5)$$

Функцию χ называют *угловым эйконалом*; как видно из (55,5), независимыми переменными в нем являются $\mathbf{n}$ и $\mathbf{n}'$. На χ не налагается уже никаких дополнительных условий. Действительно, уравнения (55,3) представляют собой теперь лишь условия, относящиеся к независимым переменным, показывающие, что из трех компонент n_x, n_y, n_z вектора $\mathbf{n}$ (и аналогично для $\mathbf{n}'$) только две являются независимыми. Мы будем ниже в качестве независимых переменных пользоваться компонентами n_y, n_z, n'_y, n'_z, и тогда

$$n_x = \sqrt{1 - n_y^2 - n_z^2}, \quad n'_x = \sqrt{1 - n_y'^2 - n_z'^2}.$$

Подставляя эти выражения в

$$d\chi = -x\,dn_x - y\,dn_y - z\,dn_z + x'\,dn'_x + y'\,dn'_y + z'\,dn'_z,$$

находим для дифференциала $d\chi$:

$$d\chi = -\left(y - \frac{n_y}{n_x}x\right)dn_y - \left(z - \frac{n_z}{n_x}x\right)dn_z + \\ + \left(y' - \frac{n'_y}{n'_x}x'\right)dn'_y + \left(z' - \frac{n'_z}{n'_x}x'\right)dn'_z.$$

Отсюда находим окончательно следующие уравнения:

$$y-\frac{n_y}{n_x}x=-\frac{\partial\chi}{\partial n_y},\quad z-\frac{n_z}{n_x}x=-\frac{\partial\chi}{\partial n_z},$$
$$y'-\frac{n'_y}{n'_x}x'=\frac{\partial\chi}{\partial n'_y},\quad z'-\frac{n'_z}{n'_x}x'=\frac{\partial\chi}{\partial n'_z}, \qquad (55,6)$$

определяющие искомое общее соотношение между $\mathbf{n}$, $\mathbf{n}'$, $\mathbf{r}$, $\mathbf{r}'$. Функция χ характеризует конкретные свойства тел, через которые проходят лучи (или свойства поля — в случае движения заряженных частиц).

При заданных значениях $\mathbf{n}$, $\mathbf{n}'$ каждая из двух пар уравнений (55,6) изображает собой прямую линию. Эти прямые являются не чем иным, как лучами до и после прохождения через оптическую систему. Таким образом, уравнения (55,6) непосредственно определяют ход лучей по обе стороны оптической системы.

§ 56. Тонкие пучки лучей

При рассмотрении прохождения пучков лучей через оптические системы особый интерес представляют пучки, все лучи которых пересекаются в одной точке (так называемые *гомоцентрические* пучки).

Гомоцентрический пучок лучей после прохождения через оптическую систему, вообще говоря, перестает быть гомоцентрическим, т. е. после прохождения через тела лучи не собираются вновь в какой-нибудь одной точке. Только в особых случаях лучи, исходящие из светящейся точки, после прохождения через оптическую систему вновь пересекаются все в одной точке — изображении светящейся точки[1]).

Можно показать (см. § 57), что единственный случай, когда все гомоцентрические пучки остаются после прохождения через оптическую систему строго гомоцентрическими, есть тождественное отображение, т. е. случай, когда изображение отличается от предмета только его переносом, поворотом или зеркальным отражением как целого.

Таким образом, никакая оптическая система не может дать вполне резкое изображение предмета (обладающего конечными размерами), за исключением только тривиального случая тождественного изображения[2]). Возможно лишь приближенное, не вполне резкое

---

[1]) Точка пересечения может лежать либо на самих лучах, либо на линии их продолжения; в зависимости от этого изображения называются соответственно действительными или мнимыми.

[2]) Такое отображение может быть осуществлено с помощью плоских зеркал.

осуществление не тождественного изображения протяженных предметов.

Наиболее важным случаем приближенного перехода гомоцентрических пучков в гомоцентрические же являются достаточно тонкие пучки (т. е. пучки с малым углом раствора), идущие вблизи определенной (для данной оптической системы) линии. Эта линия называется *оптической осью* системы.

Необходимо при этом отметить, что даже бесконечно узкие пучкн лучей (в трехмерном пространстве) в общем случае не являются гомоцентрическими; мы видели (рис. 7), что и в таком пучке различные лучи пересекаются в различных точках (это явление называется *астигматизмом*). Исключение представляют те точки волновой поверхности, в которых оба ее главных радиуса кривизны равны друг другу, — вблизи такой точки малый участок поверхности можно рассматривать как сферическнй, и соответствующий тонкий пучок лучей является гомоцентрическим.

Будем рассматривать оптическне системы, обладающие аксиальной симметрией[1]). Ось симметрии такой системы является в то же время ее оптической осью. Действительно, волновая поверхность пучка лучей, идущего вдоль этой оси, тоже имеет аксиальную симметрию; поверхностн же вращения имеют в точках своего пересечения с осью снмметрии два равных друг другу радиуса кривизны. Поэтому тонкий пучок, идущий в этом направлении, остается гомоцентрическим.

Для нахождения общих количественных соотношений, определяющих отображения с помощью тонких пучков, проходящих через аксиально-симметрические оптические системы, воспользуемся уравнениями (55,6), определив предварительно вид функции χ в рассматриваемом случае.

Поскольку пучки лучей тонкие и идут вблизи оптической осн, то векторы $\mathbf{n}$ и $\mathbf{n}'$ для каждого пучка направлены почти вдоль этой оси. Если выбрать оптическую ось в качестве оси x, то компоненты n_y, n_z, n'_y, n'_z будут малы по сравнению с единицей. Что касается компонент n_x, n'_x, то $n_x \approx 1$, а n'_x может быть приближенно равным $+1$ или -1. В первом случае лучи продолжают идти почти в прежнем направлении, попадая в пространство по другую сторону оптической системы, которую в этом случае называют *линзой*. Во втором случае лучи изменяют направление на почти противоположное; такая оптическая система называется *зеркалом*.

---

[1]) Можно показать, что задача об отображении с помощью тонких пучков, идущих вблнзи оптической оси в не аксиально-симметрической оптической системе, может быть сведена к отображению аксиально-симметрической системой вместе с последующим поворотом получающегося прн этом изображения как целого относнтельно нзображаемого предмета.

Воспользовавшись малостью n_y, n_z, n'_y, n'_z, разложим угловой эйконал $\chi(n_y, n_z, n'_y, n'_z)$ в ряд и ограничимся первыми членами. В силу аксиальной симметрии всей системы, χ должно быть инвариантно по отношению к поворотам системы координат вокруг оптической оси. Отсюда видно, что членов первого порядка, пропорциональных первым степеням y- и z- компонент векторов $\mathbf{n}$ и $\mathbf{n}'$, в разложении χ не может быть, — эти члены не обладали бы требуемой инвариантностью. Из членов второго порядка требуемым свойством обладают квадраты $\mathbf{n}^2$, $\mathbf{n}'^2$ и скалярное произведение $\mathbf{nn}'$. Таким образом, с точностью до членов второго порядка угловой эйконал для аксиально-симметрической оптической системы имеет вид

$$\chi = \mathrm{const} + \frac{g}{2}(n_y^2 + n_z^2) + f(n_y n'_y + n_z n'_z) + \frac{h}{2}(n'^2_y + n'^2_z), \quad (56,1)$$

где f, g, h — постоянные.

Мы будем рассматривать сейчас для определенности случай линзы, в связи с чем положим $n'_x \approx 1$; для зеркал, как будет ниже указано, все формулы имеют аналогичный вид. Подставляя теперь выражение (56,1) в общие уравнения (55,6), находим:

$$\begin{aligned} n_y(x-g) - fn'_y &= y, \quad fn_y + n'_y(x'+h) = y', \\ n_z(x-g) - fn'_z &= z, \quad fn_z + n'_z(x'+h) = z'. \end{aligned} \quad (56,2)$$

Рассмотрим гомоцентрический пучок, исходящий из точки x, y, z; точка x', y', z' пусть будет той, в которой пересекаются все лучи пучка после прохождения через линзу. Если бы первая и вторая пары уравнений (56,2) были независимы, то эти четыре уравнения при заданных x, y, z, x', y', z' определили бы одну определенную систему значений n_y, n_z, n'_y, n'_z, т. е. всего только один из лучей, выходящих из точки x, y, z, прошел бы через точку x', y', z'. Для того чтобы все лучи, выходящие из x, y, z, прошли через x', y', z', необходимо, следовательно, чтобы уравнения (56,2) не были независимы, т. е. чтобы одна пара этих уравнений была следствием другой. Необходимым для такой зависимости условием является, очевидно, пропорциональность коэффициентов одной пары уравнений коэффициентам другой пары. Таким образом, должно быть

$$\frac{x-g}{f} = -\frac{f}{x'+h} = \frac{y}{y'} = \frac{z}{z'}; \quad (56,3)$$

в частности,

$$(x-g)(x'+h) = -f^2. \quad (56,4)$$

Полученные уравнения определяют искомую зависимость координат точки изображения от координат предмета при отображении с помощью тонких пучков.

Точки $x=g$, $x=-h$ на оптической оси называются *главными фокусами* оптической системы. Рассмотрим пучки лучей, параллельных оптической оси. Точка испускания такого луча находится, очевидно, в бесконечности на оптической оси, т. е. $x=\infty$. Из (56,3) видно, что в этом случае $x'=-h$. Таким образом, параллельный пучок лучей после прохождения через оптическую систему пересекается в главном фокусе. Наоборот, пучок лучей, исходящий из главного фокуса, становится после прохождения через систему параллельным.

В уравнениях (56,3) координаты x и x' отсчитываются от одного и того же начала координат, лежащего на оптической оси. Удобнее, однако, отсчитывать координаты предмета и изображения от разных начал координат, выбрав их соответственно в главных фокусах. В качестве положительного направления отсчета координат выберем направления от соответствующего фокуса в сторону, направленную по ходу луча. Обозначая новые координаты предмета и изображения большими буквами, имеем:

$$X=x-g,\quad X'=x'+h,\quad Y=y,\quad Y'=y',\quad Z=z,\quad Z'=z'.$$

Уравнения отображения (56,3) и (56,4) принимают в новых обозначениях вид

$$XX'=-f^2, \tag{56,5}$$

$$\frac{Y'}{Y}=\frac{Z'}{Z}=\frac{f}{X}=-\frac{X'}{f}. \tag{56,6}$$

Величину f называют *главным фокусным расстоянием* системы.

Отношение Y'/Y называется *боковым увеличением*. Что касается продольного увеличения, то, поскольку координаты не просто пропорциональны друг другу, его следует писать в дифференциальном виде, сравнивая элемент длины предмета (в направлении оси) с элементом длины изображения. Из (56,5) пишем для *продольного увеличения*

$$\left|\frac{dX'}{dX}\right|=\frac{f^2}{X^2}=\left(\frac{Y'}{Y}\right)^2. \tag{56,7}$$

Мы видим отсюда, что даже для бесконечно малых предметов нельзя получить геометрически подобного изображения. Продольное увеличение никогда не равно поперечному (за исключением тривиального случая тождественного отображения).

Пучок, вышедший из точки $X=f$ на оптической оси, пересекается вновь в точке $X'=-f$ на той же оси; эти две точки называются *главными*. Из уравнений (56,2) ($n_yX-fn'_y=Y$, $n_zY-fn'_z=Z$) видно, что в этом случае ($X=f$, $Y=Z=0$) имеют место равенства $n_y=n'_y$, $n_z=n'_z$. Таким образом, всякий луч, выходящий из главной точки, пересекает вновь оптическую ось в другой главной точке в направлении, параллельном первоначальному.

Если координаты предмета и его изображения отсчитывать от главных точек (а не от главных фокусов), то для этих координат ξ и ξ' имеем:

$$\xi' = X' + f, \quad \xi = X - f.$$

Подставляя это в (56,5), легко получаем уравнение отображения в виде

$$\frac{1}{\xi} - \frac{1}{\xi'} = -\frac{1}{f}. \tag{56,8}$$

Можно показать, что у оптических систем с малой толщиной (например, у зеркала, узкой линзы) обе главные точки почти совпадают. В этом случае в особенности удобно уравнение (56,8), так как в нем ξ и ξ' отсчитываются тогда практически от одной и той же точки.

Если фокусное расстояние положительно, то предметы, находящиеся спереди (по ходу луча) от фокуса ($X > 0$), отображаются прямо ($Y'/Y > 0$); такие оптические системы называются *собирательными*. Если же $f < 0$, то при $X > 0$ имеем $Y'/Y < 0$, т. е. предмет отображается обратным образом; такие системы называются *рассеивающими*.

Существует один предельный случай отображения, который не содержится в формулах (56,8), — это случай, когда все три коэффициента f, g, h делаются бесконечными (т. е. оптическая система имеет бесконечное фокусное расстояние и ее главные фокусы находятся в бесконечности). Переходя в уравнении (56,4) к пределу бесконечных f, g, h, находим:

$$x' = \frac{h}{g} x + \frac{f^2 - gh}{g}.$$

Поскольку представляет интерес только тот случай, когда предмет и его изображение находятся на конечных расстояниях от оптической системы, то f, g, h должны стремиться к бесконечности так, чтобы отношения h/g, $(f^2 - gh)/g$ были конечными. Обозначая их соответственно посредством α^2 и β, имеем: $x' = \alpha^2 x + \beta$.

Для двух других координат мы имеем теперь из уравнения (56,7):

$$\frac{y'}{y} = \frac{z'}{z} = \alpha.$$

Наконец, отсчитывая снова координаты x и x' от разных начал координат, соответственно от произвольной точки на отражаемой оси и от изображения этой точки, получаем окончательно уравнения отображения в простом виде

$$X' = \alpha^2 X, \quad Y' = \pm \alpha Y, \quad Z' = \pm \alpha Z. \tag{56,9}$$

Таким образом, продольные и поперечные увеличения постоянны (но не равны друг другу). Рассмотренный случай отображения называется *телескопическим.*

Все выведенные нами для линз формулы (56,5—9) в равной мере применимы и к зеркалам, и даже к оптическим системам без аксиальной симметрии, если только отображение осуществляется тонкими пучками лучей, идущими вблизи оптической оси. При этом всегда отсчет x-координат предмета и изображения должен производиться вдоль оптической оси от соответствующих точек (главных фокусов или главных точек) по направлению распространения луча. Надо иметь в виду при этом, что у оптических систем, не обладающих аксиальной симметрией, направления оптической оси впереди и позади системы не лежат на одной прямой.

Задачи

1. Определить фокусное расстояние для отображения с помощью двух аксиально-симметрических оптических систем с совпадающими оптическими осями.

Решение. Пусть f_1 и f_2—фокусные расстояния обеих систем. Для каждой системы в отдельности имеем:

$$X_1X_1' = -f_1^2, \quad X_2X_2' = -f_2^2.$$

Поскольку изображения, даваемые первой системой, являются предметом для второй, то, обозначая посредством l расстояние между задним главным фокусом первой системы и передним фокусом второй, имеем $X_2 = X_1' - l$; выражая X_2' через X_1, находим:

$$X_2' = \frac{X_1 f_2^2}{f_1^2 + lX_1},$$

или

$$\left(X_1 + \frac{f_1^2}{l}\right)\left(X_2' - \frac{f_2^2}{l}\right) = -\left(\frac{f_1 f_2}{l}\right)^2,$$

откуда видно, что главные фокусы составной системы находятся в точках $X_1 = -f_1^2/l$, $X_2' = f_2^2/l$, а фокусное расстояние равно

$$f = -\frac{f_1 f_2}{l}$$

(для выбора знака в этом выражении надо написать соответствующее уравнение для поперечного увеличения).

В случае, если $l = 0$, фокусное расстояние $f = \infty$, т. е. составная система дает телескопическое отображение. В этом случае имеем $X_2' = X_1 (f_2/f_1)^2$, т. е. параметр α в общей формуле (56,9) равен: $\alpha = f_2/f_1$.

2. Определить фокусное расстояние «магнитной линзы» для заряженных частиц, представляющей собой продольное однородное магнитное поле в участке длины l (рис. 8)[1]).

Решение. При движении в магнитном поле кинетическая энергия частицы сохраняется; поэтому уравнение Гамильтона—Якоби для укороченного действия $S_0(\mathbf{r})$ (полное действие $S=-\mathscr{E}t+S_0$) есть

$$\left(\nabla S_0-\frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2=p^2,$$

где

$$p^2=\frac{\mathscr{E}^2}{c^2}-m^2c^2=\text{const}.$$

Рис. 8.

Воспользовавшись формулой (19,4) для векторного потенциала однородного магнитного поля, выбирая ось x вдоль направления последнего и рассматривая ее как оптическую ось аксиально-симметрической оптической системы, получим уравнение Гамильтона—Якоби в виде:

$$\left(\frac{\partial S_0}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial S_0}{\partial r}\right)^2+\frac{e^2}{4c^2}H^2r^2=p^2, \tag{1}$$

где r — расстояние от оси x, а S_0 — функция от x и r.

Для тонких пучков частиц, распространяющихся вблизи оптической оси, координата r мала, соответственно чему ищем S_0 в виде ряда по степеням r. Первые два члена этого ряда:

$$S_0=px+\frac{1}{2}\sigma(x)r^2, \tag{2}$$

где $\sigma(x)$ удовлетворяет уравнению

$$p\sigma'(x)+\sigma^2+\frac{e^2}{4c^2}H^2=0. \tag{3}$$

В области 1 перед линзой имеем:

$$\sigma^{(1)}=\frac{p}{x-x_1},$$

где $x_1<0$ — постоянная. Это решение соответствует свободному пучку частиц, разлетающихся по прямым лучам из точки $x=x_1$ на оптической оси в области 1. Действительно, свободному движению частицы с импульсом p в направлении от точки $x=x_1$ соответствует действие

$$S_0=p\sqrt{r^2+(x-x_1)^2}\approx p(x-x_1)+\frac{pr^2}{2(x-x_1)}.$$

Аналогично, в области 2 позади линзы пишем:

$$\sigma^{(2)}=\frac{p}{x-x_2},$$

где постоянная x_2 представляет собой координату изображения точки x_1.

В области же 3 внутри линзы решение уравнения (3):

$$\sigma^{(3)}=\frac{eH}{2c}\operatorname{ctg}\left(\frac{eH}{2cp}x+C\right),$$

где C — произвольная постоянная.

[1]) Речь может идти о поле в длинном соленоиде при пренебрежении искажением однородности поля вблизи концов соленоида.

Постоянные C и x_2 (при заданном x_1) определяются условиями непрерывности $\sigma(x)$ при $x=0$ и $x=l$:

$$-\frac{p}{x_1}=\frac{eH}{2c}\operatorname{ctg}C, \qquad \frac{p}{l-x_2}=\frac{eH}{2c}\operatorname{ctg}\left(\frac{eH}{2cp}l+C\right).$$

Исключая из этих равенств постоянную C, получим:

$$(x_1-g)(x_2+h)=-\mathfrak{f}^2,$$

где[1])

$$g=\frac{2cp}{eH}\operatorname{ctg}\frac{eHl}{2cp}, \quad h=g-l, \quad \mathfrak{f}=\frac{2cp}{eH\sin\frac{eHl}{2cp}}.$$

§ 57. Отображение широкими пучками лучей

Рассмотренное в предыдущем параграфе отображение предметов с помощью тонких пучков лучей является приближенным; оно тем точнее (т. е. резче), чем у́же эти пучки. Перейдем теперь к вопросу об отображении предметов пучками лучей произвольной ширины.

В противоположность отображению предметов тонкими пучками, которое можно осуществить с любой оптической системой, обладающей аксиальной симметрией, отображение широкими пучками возможно только с помощью определенным образом построенных оптических систем. Даже с этим ограничением возможно, как уже указывалось в § 56, отображение далеко не всех точек пространства.

Дальнейшие выводы основаны на следующем существенном замечании. Пусть все лучи, выходящие из некоторой точки O и проходящие через оптическую систему, вновь пересекаются в некоторой другой точке O'. Легко видеть, что оптическая длина пути ψ одинакова для всех этих лучей. Действительно, вблизи каждой из точек O, O' волновые поверхности для пересекающихся в них лучей являются сферами с центрами соответственно в O и O' и в пределе, при приближении к O и O', вырождаются в эти точки. Но волновые поверхности являются поверхностями постоянной фазы, и поэтому изменения фазы вдоль разных лучей между точками их пересечения двух определенных волновых поверхностей одинаковы. Из сказанного следует, что одинаковы (для разных лучей) и полные изменения фазы между точками O и O'.

Выясним условия, необходимые для осуществления отображения широкими пучками малого отрезка прямой; изображение представляет собой при этом тоже малый отрезок прямой. Выберем направления этих отрезков за направления осей (назовем их ξ и ξ') с началами O и O' в каких-либо соответствующих друг другу точках предмета и изображения. Пусть ψ есть оптическая длина пути для лучей,

[1]) Значение $\mathfrak{f}$ дано с правильным знаком, определение которого, однако, требует дополнительного исследования.

выходящих из O и приходящих в O'. Для лучей, выходящих из бесконечно близкой к O точки с координатой $d\xi$ и сходящихся в точке изображения с координатой $d\xi'$, оптическая длина пути есть $\psi+d\psi$, где

$$d\psi=\frac{\partial\psi}{\partial\xi}d\xi+\frac{\partial\psi}{\partial\xi'}d\xi'.$$

Введем «увеличение» при отображении

$$\alpha_\xi=\frac{d\xi'}{d\xi}$$

как отношение длины $d\xi'$ элемента изображения к длине отображаемого элемента $d\xi$. В силу малости отображаемого отрезка увеличение α можно считать величиной, постоянной вдоль его длины. Написав так же, как обычно, $\partial\psi/\partial\xi=-n_\xi$, $\partial\psi/\partial\xi'=n'_\xi$ (n_ξ, n'_ξ — косинусы углов между направлениями луча и соответственно осями ξ и ξ'), получим:

$$d\psi=\left(\alpha n'_\xi-n_\xi\right)d\xi.$$

Как и для всякой пары соответствующих друг другу точек предмета и изображения, оптическая длина пути $\psi+d\psi$ должна быть одинаковой для всех лучей, выходящих из точки с координатой $d\xi$ и приходящих в точку $d\xi'$. Отсюда получаем условие:

$$\alpha_\xi n'_\xi-n_\xi=\text{const}. \qquad (57,1)$$

Это и есть искомое условие, которому должен удовлетворять ход лучей в оптической системе при отображении широкими пучками малого отрезка прямой. Соотношение (57,1) должно выполняться для всех лучей, выходящих из точки O.

Применим теперь полученное условие к отображению с помощью аксиально-симметрической оптической системы.

Начнем с отображения отрезка прямой, лежащего на оптической оси системы (ось x); из соображений симметрии очевидно, что изображение будет тоже лежать на оси. Луч, идущий вдоль оптической оси ($n_x=1$), в силу аксиальной симметрии системы не меняет своего направления при прохождении через нее, т. е. $n'_x=1$. Отсюда следует, что const в (57,1) равна в рассматриваемом случае α_x-1, и мы можем переписать (57,1) в виде

$$\frac{1-n_x}{1-n'_x}=\alpha_x.$$

Обозначая посредством θ и θ' углы, образуемые лучами с оптической осью в точках предмета и изображения, имеем:

$$1-n_x=1-\cos\theta=2\sin^2\frac{\theta}{2},\quad 1-n_x=2\sin^2\frac{\theta'}{2}.$$

Таким образом, получим условие отображения в виде

$$\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta'}{2}}=\mathrm{const}=\sqrt{\alpha_x}. \qquad (57,2)$$

Далее, рассмотрим отображение малого участка плоскости, перпендикулярной к оптической оси аксиально-симметрической системы; изображение будет, очевидно, тоже перпендикулярно к этой оси. Применяя (57,1) к любому отрезку, лежащему в отображенной плоскости, получим:

$$\alpha_r \sin\theta' - \sin\theta = \mathrm{const},$$

где θ и θ' — по-прежнему углы между лучом и оптической осью. Для лучей, вышедших из точки пересечения изображаемой плоскости с оптической осью в направлении этой оси ($\theta=0$), должно быть, в силу симметрии, и $\theta'=0$. Поэтому $\mathrm{const}=0$, и мы получаем условие отображения в виде

$$\frac{\sin\theta}{\sin\theta'}=\mathrm{const}=\alpha_r. \qquad (57,3)$$

Что касается отображения широкими пучками трехмерных предметов, то легко видеть, что оно невозможно даже при малом объеме тела, поскольку условия (57,2) и (57,3) несовместимы друг с другом.

§ 58. Пределы геометрической оптики

По определению плоской монохроматической волны ее амплитуда везде и всегда одинакова. Такая волна бесконечна по всем направлениям в пространстве и существует на протяжении всего времени от $-\infty$ до $+\infty$. Всякая же волна с не везде и не всегда постоянной амплитудой может быть лишь более или менее монохроматической. Мы займемся теперь выяснением вопроса о *степени немонохроматичности* волн.

Рассмотрим электромагнитную волну с амплитудой, являющейся в каждой точке пространства функцией времени. Пусть ω_0 есть некоторая средняя частота волны. Тогда поле волны (например, электрическое) в данной точке имеет вид $\mathbf{E}_0(t)e^{i\omega_0 t}$. Это поле, не являющееся, конечно, само монохроматическим, можно, однако, разложить на монохроматические компоненты, т. е. в интеграл Фурье. Амплитуда компоненты этого разложения с частотой ω пропорциональна интегралу

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\mathbf{E}_0(t)\,e^{i(\omega-\omega_0)t}\,dt.$$

Множитель $e^{i(\omega-\omega_0)t}$ является периодической функцией, среднее значение которой равно нулю. Если бы $\mathbf{E}_0$ было вообще постоянным, то интеграл был бы в точности равен нулю при всех $\omega \neq \omega_0$. Если же $\mathbf{E}_0(t)$ переменно, но почти не меняется на протяжении промежутков времени порядка $1/(\omega-\omega_0)$, то интеграл почти равен нулю, тем точнее, чем медленнее меняется $\mathbf{E}_0$. Для того чтобы интеграл был заметно отличен от нуля, необходимо, чтобы $\mathbf{E}_0(t)$ заметно менялось на протяжении промежутка времени порядка $1/(\omega-\omega_0)$.

Обозначим посредством Δt порядок величины промежутка времени, в течение которого амплитуда волны в данной точке пространства заметно меняется. Из приведенных соображений следует теперь, что наиболее отличающиеся от ω_0 частоты, входящие в спектральное разложение этой волны с заметными интенсивностями, определяются из условия $1/(\omega-\omega_0) \sim \Delta t$. Если обозначить посредством $\Delta\omega$ интервал частот (вокруг средней частоты ω_0) в спектральном разложении, то, следовательно, имеет место соотношение

$$\Delta\omega\,\Delta t \sim 1. \tag{58,1}$$

Мы видим, что действительно волна тем более монохроматична (т. е. $\Delta\omega$ тем меньше), чем больше Δt, т. е. чем медленнее меняется в каждой точке пространства ее амплитуда.

Соотношения, аналогичные (58,1), легко вывести и для волнового вектора. Пусть Δx, Δy, Δz — порядки величин расстояний вдоль осей x, y, z, на которых заметно меняется амплитуда волны. В данный момент времени поле волны как функция от координат имеет вид

$$\mathbf{E}_0(\mathbf{r})\, e^{i\mathbf{k}_0\mathbf{r}},$$

где $\mathbf{k}_0$ — некоторое среднее значение волнового вектора. Совершенно аналогично выводу (58,1) можно найти интервал $\Delta\mathbf{k}$ значений, имеющихся в разложении рассматриваемой волны в интеграл Фурье:

$$\Delta k_x\,\Delta x \sim 1,\ \ \Delta k_y\,\Delta y \sim 1,\ \ \Delta k_z\,\Delta z \sim 1. \tag{58,2}$$

Рассмотрим, в частности, волну, излучавшуюся в течение некоторого конечного интервала времени. Обозначим посредством Δt порядок величины этого интервала. Амплитуда в данной точке пространства во всяком случае заметно изменяется за время Δt, в течение которого волна успеет целиком пройти через эту точку. На основании соотношения (58,1) мы можем теперь сказать, что «степень немонохроматичности» такой волны $\Delta\omega$ во всяком случае не может быть меньше, чем $1/\Delta t$ (но может, конечно, быть и больше):

$$\Delta\omega \geqslant \frac{1}{\Delta t}. \tag{58,3}$$

Аналогично, если Δx, Δy, Δz — порядки величины размеров волны в пространстве, то для интервалов значений компонент волнового

вектора, входящих в разложение волны, находим:

$$\Delta k_x \gtrsim \frac{1}{\Delta x}, \quad \Delta k_y \gtrsim \frac{1}{\Delta y}, \quad \Delta k_z \gtrsim \frac{1}{\Delta z}. \tag{58,4}$$

Из этих формул следует, что если мы имеем пучок света конечной ширины, то направление распространения света в таком пучке не может быть строго постоянным. Направляя ось x по направлению (среднему) света в пучке, мы получаем:

$$\theta_y \gtrsim \frac{1}{k\Delta y} \sim \frac{\lambda}{\Delta y}, \tag{58,5}$$

где θ_y — порядок величины отклонения пучка от среднего направления в плоскости xy, а λ — длина волны.

С другой стороны, формула (58,5) дает ответ на вопрос о предельной резкости оптических изображений. Пучок света, все лучи которого согласно геометрической оптике должны были бы пересечься в одной точке, в действительности дает изображение не в виде точки, а в виде некоторого пятна. Для ширины Δ этого пятна имеем согласно (58,5)

$$\Delta \sim \frac{1}{k\theta} \sim \frac{\lambda}{\theta}, \tag{58,6}$$

где θ — угол раствора пучка. Эту формулу можно применить не только к изображению, но и к предмету. Именно, можно утверждать, что при наблюдении исходящего из светящейся точки пучка света эту точку нельзя отличить от тела размера λ/θ. Соответственно этому формула (58,6) определяет предельную *разрешающую силу* микроскопа. Минимальное значение Δ, достигающееся при $\theta \sim 1$, есть λ, в полном согласии с тем, что пределы геометрической оптики определяются длиной волны света.

Задача

Найти порядок величины наименьшей ширины светового пучка, получающегося от параллельного пучка света на расстоянии l от диафрагмы.

Решение. Обозначив размер отверстия диафрагмы через d, имеем из (58,5) для угла отклонения лучей («угла дифракции») значение $\sim \lambda/d$, откуда ширина пучка порядка $d + \frac{\lambda}{d} l$. Наименьшее значение этой величины есть $\sqrt{\lambda l}$.

§ 59. Дифракция

Законы геометрической оптики строго точны лишь в идеальном случае, когда длину волны можно рассматривать как бесконечно малую. Чем хуже выполнено это условие, тем сильнее проявляются отклонения от геометрической оптики. Явления, наблюдающиеся в результате этих отклонений, носят название явлений *дифракции*.

Явления дифракции можно наблюдать, например, если на пути распространения света [1]) находятся препятствия — непрозрачные тела (будем называть их *экранами*) произвольной формы или, например, если свет проходит через отверстия в непрозрачных экранах. Если бы законы геометрической оптики строго выполнялись, то за экранами находились бы области *тени*, резко отграниченные от областей, куда свет попадает. Дифракция же приводит к тому, что вместо резкой границы между светом и тенью получается довольно сложная картина распределения интенсивности света. Эти явления дифракции тем сильнее выражены, чем меньше размеры экранов и отверстий в них или чем больше длина волны.

Задача теории дифракции заключается в том, чтобы при данном расположении и форме тел (и расположении источников света) определить распределение света, т. е. электромагнитное поле во всем пространстве. Точное разрешение этой задачи возможно только путем решения волнового уравнения с соответствующими граничными условиями на поверхности тел, зависящими еще к тому же и от оптических свойств материала. Такое решение обычно представляет большие математические трудности.

Однако во многих случаях оказывается достаточным приближенный метод решения задачи о распределении света вблизи границы между светом и тенью. Этот метод применим в случаях слабого отклонения от геометрической оптики. Тем самым предполагается, во-первых, что все размеры велики по сравнению с длиной волны (это относится как к размерам экранов или отверстий в них, так и к расстояниям от тел до точек испускания и наблюдения света); во-вторых, рассматриваются лишь небольшие отклонения света от направления лучей, определяемых геометрической оптикой.

Рассмотрим какой-нибудь экран с отверстием, через которое проходит свет от данных источников. Рис. 9 изображает этот экран в разрезе (жирная линия); свет идет слева направо. Будем обозначать посредством u любую из компонент поля **E** или **H**. При этом под u мы будем подразумевать поле как функцию только от координат, т. е. без множителя $e^{-i\omega t}$, определяющего зависимость от времени. Нашей задачей является определение интенсивности света, т. е. поля u в любой точке наблюдения P за экраном. При приближенном решении этой задачи в случаях, когда отклонения от геометрической оптики малы, можно считать, что в точках отверстия поле таково, каким оно было бы при отсутствии вообще какого-либо экрана.

Другими словами, значения поля здесь те, которые следуют из геометрической оптики. Во всех же точках, находящихся непо-

---

[1]) Мы будем говорить для определенности о свете; все нижеследующее относится, конечно, к любым электромагнитным волнам.

средственно за экраном, поле можно положить равным нулю. При этом, очевидно, свойства самого экрана (материала, из которого он сделан) вообще не играют роли. Очевидно также, что в рассматриваемых случаях для дифракции существенна только форма края отверстия и не существенна форма непрозрачного экрана.

Проведем какую-нибудь поверхность, закрывающую отверстие в экране и ограниченную его краями (разрез такой поверхности на рис. 9 изображен пунктиром). Эту поверхность разобьем на участки с площадью df, малые по сравнению с размерами отверстия, но большие по сравнению с длиной волны света. Мы можем тогда рассматривать каждый из этих участков, до которых дошла световая волна, так, как будто бы он сам делается источником световой волны, распространяющейся во все стороны от этого участка. Поле в точке P мы будем рассматривать как результат наложения полей, исходящих из всех участков df поверхности, закрывающей отверстие (так называемый *принцип Гюйгенса*).

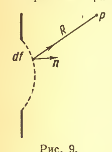


Рис. 9.

Поле, создаваемое участком df в точке P, пропорционально значению u поля в самом участке df (напоминаем, что поле в df мы предполагаем таким, каким оно было бы при отсутствии экрана). Кроме того, оно пропорционально проекции df_n площади df на плоскость, перпендикулярную к направлению $\mathbf{n}$ луча, пришедшего из источника света в df. Это следует из того, что какой бы формой ни обладал участок df, через него будут проходить одинаковые лучи, если только его проекция df_n будет неизменной, а потому и его действие на поле в точке P будет одинаковым.

Таким образом, поле, создаваемое в точке P участком df, пропорционально $u\,df_n$. Далее, надо еще учесть изменение амплитуды и фазы волны при ее распространении от df к точке P. Закон этого изменения определяется формулой (54,3). Поэтому $u\,df_n$ надо умножить еще на $\frac{1}{R}e^{ikR}$ (где R — расстояние от df до P, а k — абсолютная величина волнового вектора света), и мы находим, что искомое поле равно

$$au\frac{e^{ikR}}{R}df_n,$$

где a есть неизвестная пока постоянная. Полное же поле в точке P, являющееся результатом наложения полей, создаваемых всеми df, есть

$$u_P = a\int\frac{ue^{ikR}}{R}df_n, \qquad (59,1)$$

где интеграл распространен по поверхности, ограниченной краем отверстия. Этот интеграл в рассматриваемом приближении не зависит,

конечно, от формы этой поверхности. Формула (59,1) применима, очевидно, и к дифракции не от отверстия на экране, а от экрана, вокруг которого свет может свободно распространяться. В этом случае поверхность интегрирования в (59,1) простирается во все стороны от края экрана.

Для определения постоянной a рассмотрим плоскую волну, распространяющуюся вдоль оси x; волновые поверхности параллельны плоскости yz. Пусть u есть значение поля в плоскости yz. Тогда в точке P, которую мы выберем на оси x, поле равно $u_P = ue^{ikx}$. С другой стороны, поле в точке P можно определить исходя из формулы (59,1), выбрав в качестве поверхности интегрирования, например, плоскость yz. При этом ввиду малости угла дифракции в интеграле существенны только точки плоскости yz, близкие к началу координат, т. е. точки, в которых $y, z \ll x$ (x — координата точки P).

Тогда

$$R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \approx x + \frac{y^2 + z^2}{2x}$$

и (59,1) даст:

$$u_P = au\frac{e^{ikx}}{x} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{ik\frac{y^2}{2x}} dy \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{ik\frac{z^2}{2x}} dz,$$

где u — постоянная (поле в плоскости yz); в множителе $1/R$ можно положить $R \approx x = \text{const}$. Стоящие здесь интегралы подстановкой $y = \xi\sqrt{2x/k}$ приводятся к виду

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi^2} d\xi = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \cos\xi^2 d\xi + i\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \sin\xi^2 d\xi = \sqrt{\frac{\pi}{2}}(1 + i),$$

и мы получаем:

$$u_P = aue^{ikx}\frac{2i\pi}{k}.$$

С другой стороны, $u_P = ue^{ikx}$ и, следовательно,

$$a = \frac{k}{2\pi i}.$$

Подставляя это в (59,1), находим окончательно решение поставленной задачи в виде

$$u_P = \int \frac{ku}{2\pi iR} e^{ikR} df_n. \qquad (59,2)$$

При выводе формулы (59,2) источник света предполагался, по существу, точечным, а самый свет — строго монохроматическим. Случай реального протяженного источника, испускающего немонохроматический свет, не нуждается, однако, в особом исследовании. Вследствие полной независимости (некогерентности) света, испускаемого различными точками источника, и некогерентности различных спектральных компонент испускаемого света суммарный результат дифракции сводится просто к сумме распределений интенсивности, получающихся от дифракции каждой из независимых компонент света.

Применим формулу (59,2) для решения вопроса об изменении фазы при прохождении луча через точку его касания с каустикой (см. конец § 54). Выберем в качестве поверхности интегрирования в (59,2) какую-либо волновую поверхность и будем определять поле u_P в точке P, лежащей на некотором данном луче на расстоянии x от точки его пересечения с выбранной волновой поверхностью (эту точку выберем в качестве начала координат O, а в качестве плоскости yz — плоскость, касательную к волновой поверхности в точке O). При интегрировании в (59,2) существен только небольшой участок волновой поверхности вблизи точки O. Если плоскости xy и xz выбраны совпадающими с главными плоскостями кривизны волновой поверхности в точке O, то вблизи этой точки уравнение поверхности есть

$$X=\frac{y^2}{2R_1}+\frac{z^2}{2R_2},$$

где R_1 и R_2 — радиусы кривизны. Расстояние же R от точки волновой поверхности с координатами X, y, z до точки P с координатами x, 0, 0 есть

$$R=\sqrt{(x-X)^2+y^2+z^2}\approx x+\frac{y^2}{2}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{R_1}\right)+\frac{z^2}{2}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{R_2}\right).$$

Вдоль волновой поверхности поле u можно считать постоянным; то же касается множителя $1/R$. Поскольку мы интересуемся только изменением фазы волны, то коэффициент опускаем и пишем просто

$$u_P\sim\frac{1}{i}\int e^{ikR}\,df_n\approx$$

$$\approx\frac{e^{ikx}}{i}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{ik\frac{y^2}{2}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{R_1}\right)}dy\cdot\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{ik\frac{z^2}{2}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{R_2}\right)}dz. \quad (59,3)$$

Центры кривизны волновой поверхности лежат на рассматриваемом луче в точках $x=R_1$ и $x=R_2$; это и есть точки касания лучом обеих каустик. Пусть $R_2<R_1$. При $x<R_2$ коэффициенты при i в показателях подынтегральных выражений в обоих интегралах положительны, и каждый из этих интегралов содержит

множитель $(1+i)$. Поэтому на участке луча до касания первой каустики имеем $u_P \sim e^{ikx}$. При $R_2 < x < R_1$, т. е. на отрезке луча между двумя точками касания, интеграл по dy содержит множитель $1+i$, а интеграл по dz — множитель $1-i$, так что их произведение вовсе не содержит i. Таким образом имеем здесь $u_P \sim -ie^{ikx} = e^{i(kx-\pi/2)}$, т. е. при прохождении луча вблизи первой каустики фаза дополнительно меняется на $-\pi/2$. Наконец, при $x > R_1$ имеем $u_P \sim -e^{ikx} = e^{i(kx-\pi)}$, т. е. при прохождении вблизи второй каустики фаза еще раз меняется на $-\pi/2$.

Задача

Определить распределение интенсивности света вблизи точки касания луча с каустикой.

Решение. Для решения задачи пользуемся формулой (59,2), производя в ней интегрирование по какой-либо волновой поверхности, достаточно удаленной от рассматриваемой точки касания луча каустикой. На рис. 10 ab есть сечение этой волновой поверхности, а $a'b'$ — сечение каустики; $a'b'$ есть эволюта кривой ab. Мы интересуемся распределением интенсивности вблизи точки O касания луча QO с каустикой; длина D отрезка QO луча предполагается достаточно большой. Посредством x обозначим расстояние от точки O вдоль нормали к каустике, причем будем считать положительными значения x для точек, лежащих на нормали по направлению к центру кривизны.

Рис. 10.

Подынтегральное выражение в (59,2) есть функция от расстояния R от произвольной точки Q' на волновой поверхности до точки P. По известному свойству эволюты сумма длины отрезка $Q'O'$ касательной в точке O, и длины дуги OO' равна длине QO касательной в точке O. Для близких друг к другу точек O и O' имеем $OO' = \theta\rho$ (ρ — радиус кривизны каустики в точке O). Поэтому длина $Q'O' = D - \theta\rho$. Расстояние же $Q'O$ (по прямой) равно приближенно (угол θ предполагается малым):

$$Q'O \approx Q'O' + \rho \sin\theta = D - \theta\rho + \rho\sin\theta \approx D - \frac{\rho\theta^3}{6}.$$

Наконец, расстояние $R = Q'P$ равно $R \approx Q'O - x\sin\theta \approx Q'O - x\theta$, т. е.

$$R \approx D - x\theta - \frac{1}{6}\rho\theta^3.$$

Подставляя это выражение в (59,2), найдем:

$$u_P \sim \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikx\theta - \frac{ik\rho}{6}\theta^3}\, d\theta = 2\int_0^{\infty} \cos\left(kx\theta + \frac{k\rho}{6}\theta^3\right) d\theta$$

(медленно меняющийся множитель $1/D$ в подынтегральном выражении не существен по сравнению с экспоненциальным множителем, и мы считаем

его постоянным). Вводя новую переменную интегрирования $\xi = (k\rho/2)^{1/3}\theta$, получим:

$$u_P \sim \Phi\left(x\sqrt[3]{\frac{2k^2}{\rho}}\right),$$

где $\Phi(t)$ есть так называемая функция Эйри[1]). Для интенсивности $I \sim |u_P|^2$ напишем:

$$I = 2A\left(\frac{2k^2}{\rho}\right)^{1/6}\Phi^2\left(x\sqrt[3]{\frac{2k^2}{\rho}}\right)$$

(о выборе постоянного множителя см. ниже).

При больших положительных значениях x имеем отсюда асимптотическую формулу

$$I \approx \frac{A}{2\sqrt{x}}\exp\left(-\frac{4x^{3/2}}{3}\sqrt{\frac{2k^2}{\rho}}\right),$$

т. е. интенсивность экспоненциально убывает (область «тени»). При больших же по абсолютной величине отрицательных значениях x имеем:

$$I \approx \frac{2A}{\sqrt{-x}}\sin^2\left[\frac{2(-x)^{3/2}}{3}\sqrt{\frac{2k^2}{\rho}} + \frac{\pi}{4}\right],$$

т. е. интенсивность быстро осциллирует; усредненное по этим осцилляциям ее значение равно:

$$\bar{I} = \frac{A}{\sqrt{-x}}.$$

---

[1]) Функция Эйри $\Phi(t)$ определяется формулой

$$\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \cos\left(\frac{\xi^3}{3} + \xi t\right)d\xi \qquad (1)$$

(см. том III, «Квантовая механика», § b). При больших положительных значениях t функция $\Phi(t)$ экспоненциально убывает по асимптотическому закону

$$\Phi(t) \approx \frac{1}{2t^{1/4}}\exp\left(-\frac{2}{3}t^{3/2}\right). \qquad (2)$$

При больших по абсолютной величине отрицательных значениях t функция $\Phi(t)$ осциллирует с убывающей амплитудой по закону

$$\Phi(t) \approx \frac{1}{(-t)^{1/4}}\sin\left[\frac{2}{3}(-t)^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right]. \qquad (3)$$

Функция Эйри связана с функцией Макдональда (модифицированной функцией Ганкеля) порядка 1/3:

$$\Phi(t) = \sqrt{\frac{t}{3\pi}}K_{1/3}\left(\frac{2}{3}t^{3/2}\right). \qquad (4)$$

Формула (2) соответствует асимптотическому выражению функций $K_\nu(t)$:

$$K_\nu(t) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2t}}e^{-t}.$$

Отсюда выясняется смысл постоянной A — она определяет интенсивность вдали от каустики, которая получилась бы из геометрической оптики без учета явлений дифракции.

Наибольшее значение, равное 0,949, функция $\Phi(t)$ имеет при $t=-1{,}02$; соответственно этому наибольшая интенсивность достигается при $x(2k^2/\rho)^{1/3}=-1{,}02$, где

$$I=2{,}03Ak^{1/3}\rho^{-1/6}$$

(в самой же точке касания луч с каустикой, $x=0$, имеем $I=0{,}89Ak^{1/3}\rho^{-1/6}$, так как $\Phi(0)=0{,}629$). Таким образом, вблизи каустики интенсивность пропорциональна $k^{1/3}$, т. е. $\lambda^{-1/3}$ (λ — длина волны). При $\lambda\to 0$ интенсивность, как и следовало (ср. § 54), стремится к бесконечности.

§ 60. Дифракция Френеля

Если источник света и точка P, в которой мы ищем интенсивность света, находятся на конечном расстоянии от экрана, то для определения интенсивности в точке P играет роль лишь небольшой участок волновой поверхности, по которой происходит интегрирование в (59,2), — участок, лежащий вблизи прямой, соединяющей источник с точкой P. Действительно, поскольку отклонения от геометрической оптики слабы, то интенсивность света, приходящего в P из различных точек волновой поверхности, очень быстро падает по мере удаления от указанной прямой. Дифракционные явления, в которых играют роль лишь небольшие участки волновой поверхности, носят название *дифракции Френеля*.

Рассмотрим дифракцию Френеля от какого-нибудь экрана. Благодаря указанному свойству при этом играет роль (при заданной точке P) только небольшой участок края экрана. Но на достаточно малых участках край экрана можно всегда считать прямолинейным. Ниже под краем экрана будет поэтому подразумеваться именно такой небольшой прямолинейный участок.

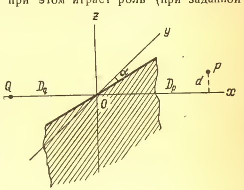


Рис. 11.

Выберем в качестве плоскости xy плоскость, проходящую через источник света Q (рис. 11) и через линию края экрана. Перпендикулярную к ней плоскость xz выбираем так, чтобы она прошла через точку Q и точку наблюдения P, в которой мы ищем значение интенсивности света. Наконец, начало координат O выбираем на линии края экрана, после чего положение всех трех осей вполне определено.

Расстояние от источника света Q до начала координат пусть будет D_q. x-координату точки наблюдения P обозначим как D_p, а ее z-координату, т. е. расстояние до плоскости xy,— как d. Согласно геометрической оптике свет мог бы попасть только в точки, лежащие над плоскостью xy; область же под плоскостью xy есть область, где согласно геометрической оптике была бы тень (область геометрической тени).

Мы определим теперь распределение интенсивности света за экраном вблизи границы геометрической тени, т. е. при малых (по сравнению с D_p и D_q) значениях d. Отрицательное d означает, что точка P находится в области геометрической тени.

В качестве поверхности интегрирования в (59,2) выберем полуплоскость, проходящую через линию края экрана перпендикулярно к плоскости xy. Координаты x и y точек этой поверхности связаны друг с другом соотношением $x = y \operatorname{tg} \alpha$ (α—угол между линией края экрана и осью y), а координата z положительна. Поле волны, исходящей из источника Q, на расстоянии R_q от него пропорционально множителю $\exp(ikR_q)$. Поэтому поле u на поверхности интегрирования пропорционально

$$u \sim \exp\left[ik\sqrt{y^2+z^2+(D_q+y\operatorname{tg}\alpha)^2}\right].$$

В интеграле (59,2) для R надо теперь подставить

$$R=\sqrt{y^2+(z-d)^2+(D_p-y\operatorname{tg}\alpha)^2}.$$

В подынтегральном выражении медленно изменяющиеся множители не существенны по сравнению с экспоненциальным. Поэтому мы можем считать $1/R$ постоянным, а вместо df_n писать $dy\,dz$. Мы находим тогда, что поле в точке P:

$$u_P \sim \int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^{\infty} \exp\left[ik\sqrt{(D_q+y\operatorname{tg}\alpha)^2+y^2+z^2}+\right.$$
$$\left.+\sqrt{(D_p-y\operatorname{tg}\alpha)^2+y^2+(z-d)^2}\right]dy\,dz. \qquad (60,1)$$

Как мы уже говорили, в точку P попадает свет главным образом из точек плоскости интегрирования, близких к O. Поэтому в интеграле (60,1) играют роль малые (по сравнению с D_q и D_p) значения y и z. Мы можем написать:

$$\sqrt{(D_q+y\operatorname{tg}\alpha)^2+y^2+z^2} \approx D_q+\frac{y^2\sec^2\alpha+z^2}{2D_q}+y\operatorname{tg}\alpha,$$
$$\sqrt{(D_p-y\operatorname{tg}\alpha)^2+y^2+(z-d)^2} \approx D_p+\frac{y^2\sec^2\alpha+(z-d)^2}{2D_p}-y\operatorname{tg}\alpha.$$

Подставим это в (60,1). Поскольку нас интересует поле только как функция от расстояния d, то постоянный множитель $\exp[ik(D_p+D_q)]$

опускаем; интеграл по dy тоже дает выражение, не содержащее d, которое мы также опустим. Мы находим тогда:

$$u_P \sim \int_0^\infty \exp\left[ik\left(\frac{1}{2D_q}z^2 + \frac{1}{2D_p}(z-d)^2\right)\right]dz.$$

Это выражение можно написать и в таком виде:

$$u_P \sim \exp\left[ik\frac{d^2}{2(D_p+D_q)}\right]\int_0^\infty \exp\left[ik\frac{\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{D_p}+\frac{1}{D_q}\right)z-\frac{d}{D_p}\right]^2}{\frac{1}{D_p}+\frac{1}{D_q}}\right]dz. \quad (60,2)$$

Интенсивность света определяется квадратом поля, т. е. квадратом модуля $|u_P|^2$. Поэтому для нахождения интенсивности стоящий перед интегралом множитель не существен, так как при умножении на сопряженное выражение он дает единицу. Очевидной подстановкой интеграл приводится к виду

$$u_P \sim \int_{-w}^{\infty} e^{i\eta^2}\,d\eta, \quad (60,3)$$

где

$$w = d\sqrt{\frac{kD_q}{2D_p(D_q+D_p)}}\,. \quad (60,4)$$

Таким образом, интенсивность I в точке P равна:

$$I = \frac{I_0}{2}\left|\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{-w}^{\infty} e^{i\eta^2}\,d\eta\right|^2 = \frac{I_0}{2}\left[\left(C(w^2)+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(S(w^2)+\frac{1}{2}\right)^2\right], \quad (60,5)$$

где

$$C(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\sqrt{z}} \cos\eta^2\,d\eta, \quad S(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\sqrt{z}} \cos\eta^2\,d\eta$$

— так называемые интегралы Френеля. Формула (60,5) решает поставленную задачу, определяя интенсивность света как функцию от d; I_0 есть интенсивность в освещенной области в точках, достаточно удаленных от края тени, т. е. при $w \gg 1$ [в пределе $w \to \infty$ имеем $C(\infty) = S(\infty) = 1/2$].

Области геометрической тени соответствуют отрицательные w. Легко выяснить асимптотический вид функции $I(w)$ при больших по абсолютной величине отрицательных значениях w. Для этого поступим следующим образом. Интегрируя по частям, имеем:

$$\int_{|w|}^{\infty} e^{i\eta^2}\,d\eta = -\frac{1}{2i|w|}e^{iw^2} + \frac{1}{2i}\int_{|w|}^{\infty} e^{i\eta^2}\frac{d\eta}{\eta^2}\,.$$

Интегрируя в правой части равенства еще раз по частям и продолжая этот процесс, получим ряд по степеням $1/|w|$:

$$\int_{|w|}^{\infty} e^{i\eta^2}\,d\eta = e^{iw^2}\left(-\frac{1}{2i|w|}+\frac{1}{4|w|^3}-\ldots\right). \qquad (60,6)$$

Хотя бесконечный ряд такого вида и не является сходящимся, но ввиду того, что при больших $|w|$ величина его последовательных членов быстро падает, уже первый его член дает хорошее представление стоящей слева функции при достаточно больших $|w|$ (ряды такого рода называются асимптотическими). Таким образом, для интенсивности $I(w)$ (60,5) получим следующую асимптотическую формулу, пригодную для больших отрицательных значений w:

$$I=\frac{I_0}{4\pi w^2}. \qquad (60,7)$$

Мы видим, что в области геометрической тени, вдали от ее края интенсивность стремится к нулю обратно пропорционально квадрату расстояния от края тени.

Рассмотрим теперь положительные значения w, т. е. область выше плоскости xy. Пишем:

$$\int_{-w}^{\infty} e^{i\eta^2}\,d\eta=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\eta^2}\,d\eta-\int_{-\infty}^{-w} e^{i\eta^2}\,d\eta=(1+i)\sqrt{\frac{\pi}{2}}-\int_{w}^{\infty} e^{i\eta^2}\,d\eta.$$

При достаточно больших w можно воспользоваться асимптотическим представлением стоящего в правой части равенства интеграла, и мы будем иметь:

$$\int_{-w}^{\infty} e^{i\eta^2}\,d\eta \approx (1+i)\sqrt{\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{2iw}e^{iw^2}. \qquad (60,8)$$

Подставляя это выражение в (60,5), получим:

$$I=I_0\left[1+\sqrt{\frac{1}{\pi}}\,\frac{\sin\left(w^2-\frac{\pi}{4}\right)}{w}\right]. \qquad (60,9)$$

Таким образом, в освещенной области, вдали от края тени, интенсивность имеет неограниченный ряд максимумов и минимумов, так что отношение I/I_0 колеблется в обе стороны от единицы. Размах

этих колебаний уменьшается с ростом w обратно пропорционально расстоянию от края геометрической тени, а места максимумов и минимумов постепенно сближаются друг с другом.

При небольших w функция $I(w)$ имеет качественно тот же характер (рис. 12). В области геометрической тени интенсивность спадает монотонно при удалении от границы тени (на самой этой границе

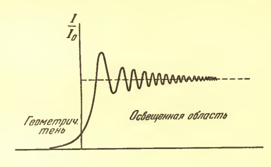


Рис. 12.

$I/I_0 = 1/4$). При положительных w интенсивность имеет чередующиеся максимумы и минимумы. В первом, наибольшем из максимумов, $I/I_0 = 1{,}37$.

§ 61. Дифракция Фраунгофера

Особый интерес для физических применений имеют дифракционные явления, возникающие при падении на экраны плоскопараллельного пучка лучей. В результате дифракции пучок теряет параллельность и появляется свет, распространяющийся в направлениях, отличных от первоначального. Поставим задачу об определении распределения по направлениям интенсивности дифрагированного света на больших расстояниях позади экрана (такая постановка вопроса отвечает так называемой *дифракции Фраунгофера*). При этом мы снова ограничиваемся случаем малых отклонений от геометрической оптики, т. е. предполагаем малыми углы отклонения от первоначального направления лучей (углы дифракции).

Поставленную задачу можно было бы решить, исходя из общей формулы (59,2), переходя в ней к пределу бесконечно удаленных от экрана источника света и точки наблюдения. Характерной особенностью рассматриваемого случая является при этом то обстоятельство, что в интеграле, определяющем интенсивность дифрагированного света, существенна вся волновая поверхность, по которой производится интегрирование (в противоположность случаю

дифракции Френеля, в котором играли роль лишь участки волновой поверхности вблизи края экранов)[1]).

Проще, однако, рассмотреть поставленный вопрос заново, не прибегая к помощи общей формулы (59,2).

Обозначим посредством u_0 то поле позади экранов, которое имелось бы при строгом соблюдении геометрической оптики. Оно представляет собой плоскую волну, в поперечном сечении которой, однако, имеются участки (отвечающие «тени» непрозрачных экранов) с равным нулю полем. Обозначим посредством S ту часть плоскости поперечного сечения, на которой поле u_0 отлично от нуля; поскольку каждая такая плоскость является волновой поверхностью плоской волны, то $u_0 = \mathrm{const}$ вдоль всей площади S.

В действительности, однако, волна с ограниченной площадью поперечного сечения не может быть строго плоской (см. § 58). В ее пространственное разложение Фурье входят компоненты с волновыми векторами различных направлений, что и является источником дифракции.

Разложим поле u_0 в двухмерный интеграл Фурье по координатам y, z в плоскости поперечного сечения волны. Для компонент Фурье имеем:

$$u_{\mathbf{q}} = \iint\limits_S u_0 e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}}\, dy\, dz, \tag{61,1}$$

где $\mathbf{q}$ — постоянные векторы в плоскости yz; интегрирование производится фактически лишь по той части S плоскости yz, на которой u_0 отлично от нуля. Если $\mathbf{k}$ есть волновой вектор падающей волны, то компоненте поля $u_{\mathbf{q}} e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}}$ отвечает волновой вектор $\mathbf{k}' = \mathbf{k} + \mathbf{q}$. Таким образом, вектор $\mathbf{q} = \mathbf{k}' - \mathbf{k}$ определяет изменение волнового вектора света при дифракции. Поскольку абсолютные значения $k = k' = \omega/c$, то малые углы дифракции θ_y, θ_z в плоскостях xy и xz, связаны с составляющими вектора $\mathbf{q}$ соотношениями

$$q_y = \frac{\omega}{c}\theta_y, \qquad q_z = \frac{\omega}{c}\theta_z. \tag{61,2}$$

[1]) Критерии дифракции Френеля и Фраунгофера легко получить, вернувшись к формуле (60,2) и применив ее, например, к щели ширины a (вместо края изолированного экрана). Интегрирование по dz в (60,2) должно производиться при этом в пределах от 0 до a. Дифракции Френеля соответствует ситуация, когда в экспоненте подынтегрального выражения существен член с z^2 и верхний предел интеграла может быть заменен на ∞. Для этого должно быть

$$ka^2\left(\frac{1}{D_p} + \frac{1}{D_q}\right) \gg 1.$$

Напротив, если в этом неравенстве стоит обратный знак, член с z^2 может быть опущен; этому соответствует случай дифракции Фраунгофера.

При малом отклонении от геометрической оптики компоненты разложения поля u_0 можно считать совпадающими с компонентами истинного поля дифрагированного света, так что формула (61,1) решает поставленную задачу.

Распределение интенсивности дифрагированного света определяется квадратом $|u_{\mathbf{q}}|^2$ как функцией вектора $\mathbf{q}$. Количественная связь с интенсивностью падающего света устанавливается формулой

$$\iint u_0^2\, dy\, dz = \iint |u_{\mathbf{q}}|^2 \frac{dq_y dq_z}{(2\pi)^2} \tag{61,3}$$

[ср. (49,8)]. Отсюда видно, что относительная интенсивность дифракции в элемент телесного угла $do = d\theta_y\, d\theta_z$ дается величиной

$$\frac{|u_{\mathbf{q}}|^2}{u_0^2} \frac{dq_y dq_z}{(2\pi)^2} = \left(\frac{\omega}{2\pi c}\right)^2 \left|\frac{u_{\mathbf{q}}}{u_0}\right|^2 do. \tag{61,4}$$

Рассмотрим дифракцию Фраунгофера от двух экранов, являющихся «дополнительными» по отношению друг к другу: первый экран имеет отверстия там, где второй непрозрачен, и наоборот. Обозначим посредством $u^{(1)}$ и $u^{(2)}$ поле света, дифрагировавшего на этих экранах (при одинаковом в обоих случаях падающем свете). Поскольку $u_{\mathbf{q}}^{(1)}$ и $u_{\mathbf{q}}^{(2)}$ выражаются интегралами (61,1), взятыми по площадям отверстий в экранах, а отверстия в обоих экранах дополняют друг друга до целой плоскости, то сумма $u_{\mathbf{q}}^{(1)} + u_{\mathbf{q}}^{(2)}$ есть компонента Фурье поля, получающегося при отсутствии экранов, т. е. просто падающего света. Но падающий свет представляет собой строго плоскую волну с определенным направлением распространения, поэтому $u_{\mathbf{q}}^{(1)} + u_{\mathbf{q}}^{(2)} = 0$ при всяком отличном от нуля $\mathbf{q}$. Таким образом, имеем $u_{\mathbf{q}}^{(1)} = -u_{\mathbf{q}}^{(2)}$ или, для соответствующих интенсивностей,

$$|u_{\mathbf{q}}^{(1)}|^2 = |u_{\mathbf{q}}^{(2)}|^2 \quad \text{при} \quad \mathbf{q} \neq 0. \tag{61,5}$$

Это значит, что дополнительные экраны дают одинаковые распределения интенсивности дифрагированного света (так называемый *принцип Бабине*).

Упомянем здесь об одном интересном следствии принципа Бабине. Рассмотрим какое-нибудь черное тело, т. е. тело, полностью поглощающее весь падающий на него свет. Согласно геометрической оптике при освещении такого тела за ним образовалась бы область геометрической тени, площадь сечения которой была бы равна площади сечения тела в направлении, перпендикулярном к направлению падения света. Наличие дифракции приведет, однако, к частичному отклонению света от первоначального направления. В результате на большом расстоянии позади тела тени не будет, а наряду со

светом, распространяющимся в первоначальном направлении, будет также и некоторое количество света, распространяющегося под небольшими углами к своему первоначальному направлению. Легко определить интенсивность этого, как говорят, рассеянного света. Для этого замечаем, что согласно принципу Бабине количество света, отклонившегося вследствие дифракции на рассматриваемом теле, равно количеству света, отклоняющегося при дифракции от прорезанного в непрозрачном экране отверстия, форма и площадь которого совпадают с формой и площадью поперечного сечения тела. Но при дифракции Фраунгофера от отверстия происходит отклонение всего проходящего через отверстие света. Отсюда следует, что полное количество света, рассеянного на черном теле, равно количеству света, падающего на его поверхность и поглощаемого им.

Задачи

1. Определить дифракцию Фраунгофера при нормальном падении плоской волны на бесконечную щель (ширины $2a$) с параллельными краями, прорезанную в непрозрачном экране.

Решение. Выберем плоскость щели в качестве плоскости yz с осью z вдоль длины щели (рис. 13 представляет разрез экрана). При нормальном падении света плоскость щели является одной из волновых поверхностей, которую мы возьмем в качестве поверхности интегрирования в (61,1). Ввиду бесконечности длины щели свет отклоняется только в плоскости xy [интеграл (61,1) обращается в нуль при $q_z \neq 0$]. Поэтому разложение поля u_0 должно производиться лишь по координате y:

$$u_q = u_0 \int_{-a}^{a} e^{-iqy}\,dy = \frac{2u_0}{q}\sin qa.$$

Рис. 13.

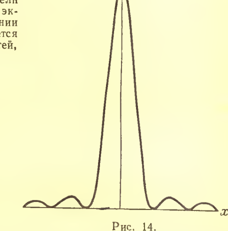


Рис. 14.

Интенсивность дифрагированного света в интервале углов $d\theta$ есть

$$dI = \frac{I_0}{2a}\left|\frac{u_q}{u_0}\right|^2 \frac{dq}{2\pi} = \frac{I_0}{\pi a k}\frac{\sin^2 ka\theta}{\theta^2}\,d\theta,$$

где $k=\omega/c$, а I_0 — полная интенсивность света, падающего на щель.

$dI/d\theta$ как функция угла дифракции имеет вид, изображенный на рис. 14. При увеличении θ в ту или другую сторону от $\theta=0$ интенсивность пробегает ряд максимумов с быстро убывающей высотой. Максимумы разделены в точках $\theta=n\pi/ka$ (n — целые числа) минимумами, в которых интенсивность обращается в нуль.

2. То же при дифракции от решетки — плоского экрана с прорезанным в нем рядом одинаковых параллельных щелей (ширина щели $2a$, ширина непрозрачного экрана между соседними щелями $2b$, число щелей N).

Решение. Выберем плоскость решетки в качестве плоскости yz с осью z, параллельной щелям. Дифракция снова происходит лишь в плоскости xy, и интегрирование в (61,1) дает:

$$u_q = u_q' \sum_{n=0}^{N-1} e^{-2inqd} = u_q' \frac{1-e^{-2iNqd}}{1-e^{-2iqd}},$$

где $d=a+b$, а u_q' есть результат интегрирования по одной щели. Воспользовавшись результатами задачи 1, получим

$$dI = \frac{I_0 a}{N\pi}\left(\frac{\sin Nqd}{\sin qd}\right)^2\left(\frac{\sin qa}{qa}\right)^2 dq = \frac{I_0}{N\pi ak}\left(\frac{\sin Nk\theta d}{\sin k\theta d}\right)^2\frac{\sin^2 ka\theta}{\theta^2}\,d\theta$$

(I_0 — полная интенсивность света, проходящего через все щели).

При большом числе щелей ($N\to\infty$) эту формулу можно написать в ином виде. При значениях $q=\pi n/d$ (n — целое число) dI/dq имеет максимумы; вблизи такого максимума (т. е. при $qd=n\pi+\varepsilon$, ε мало)

$$dI = I_0 a\left(\frac{\sin qa}{qa}\right)^2 \frac{\sin^2 N\varepsilon}{\pi N\varepsilon^2}\,dq.$$

Но при $N\to\infty$ имеет место формула [1])

$$\lim_{N\to\infty}\frac{\sin^2 Nx}{\pi N x^2} = \delta(x).$$

Поэтому вблизи каждого максимума имеем:

$$dI = I_0\frac{a}{d}\left(\frac{\sin qa}{qa}\right)^2 \delta(\varepsilon)\,d\varepsilon,$$

---

[1]) При $x=0$ функция в левой стороне равенства равна нулю, а согласно формулам, известным из теории рядов Фурье,

$$\lim_{N\to\infty}\left(\frac{1}{\pi}\int_{-a}^{a} f(x)\,\frac{\sin^2 Nx}{Nx^2}\,dx\right) = f(0).$$

Отсюда видно, что свойства этой функции действительно совпадают со свойствами δ-функции (см. примечание на стр. 98).

т. е. максимумы обладают, в пределе, бесконечно малой шириной, а полная интенсивность света в n-м максимуме есть

$$I^{(n)} = I_0 \frac{d}{\pi^2 a} \frac{\sin^2(n\pi a/d)}{n^2}.$$

3. Определить распределение интенсивности по направлениям при дифракции света, падающего в нормальном направлении на круглое отверстие радиуса a.

Решение. Введем цилиндрические координаты z, r, φ с осью z, проходящей через центр отверстия перпендикулярно к его плоскости. Очевидно, что дифракция симметрична относительно оси z, так что вектор $\mathbf{q}$ имеет лишь радиальную компоненту $q_r = q = k\theta$. Отсчитывая угол φ от направления $\mathbf{q}$ и интегрируя в (61,1) по плоскости отверстия, находим:

$$u_q = u_0 \int_0^a \int_0^{2\pi} e^{-iqr\cos\varphi}\, r\, d\varphi\, dr = 2\pi u_0 \int_0^a J_0(qr)\, r\, dr,$$

где J_0 — функция Бесселя нулевого ранга. С помощью известной формулы

$$\int_0^a J_0(qr)\, r\, dr = \frac{a}{q} J_1(aq)$$

имеем отсюда:

$$u_q = \frac{2\pi u_0 a}{q} J_1(aq),$$

и согласно (61,4) находим окончательно интенсивность света, дифрагировавшего в элемент телесного угла do:

$$dI = I_0 \frac{J_1^2(ak\theta)}{\pi\theta^2}\, do,$$

где I_0 — полная интенсивность света, падающего на отверстие.

ГЛАВА VIII

ПОЛЕ ДВИЖУЩИХСЯ ЗАРЯДОВ

§ 62. Запаздывающие потенциалы

В гл. V мы изучали постоянное поле, создаваемое покоящимися зарядами, а в гл. VI — переменное поле, но в отсутствие зарядов. Теперь мы займемся изучением переменных полей при наличии произвольно движущихся зарядов.

Выведем уравнения, определяющие потенциалы поля, создаваемого движущимися зарядами. Это удобно сделать в четырехмерном виде, повторив произведенный в конце § 46 вывод с той лишь разницей, что надо использовать уравнения Максвелла (30,2)

$$\frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k} = -\frac{4\pi}{c} j^i$$

с отличной от нуля правой частью. Такая же правая часть появится и в уравнении (46,8), и после наложения на потенциалы условия Лоренца

$$\frac{\partial A^i}{\partial x^i} = 0, \text{ т. е. } \frac{1}{c}\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{A} = 0, \tag{62,1}$$

получим

$$\frac{\partial^2 A^i}{\partial x_k \, \partial x^k} = \frac{4\pi}{c} j^i. \tag{62,2}$$

Это и есть уравнение, определяющее потенциалы произвольного электромагнитного поля. В трехмерном виде оно записывается в виде двух уравнений — для $\mathbf{A}$ и для φ:

$$\Delta \mathbf{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c}\mathbf{j}, \tag{62,3}$$

$$\Delta \varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -4\pi\rho. \tag{62,4}$$

Для постоянного поля они сводятся к уже известным нам уравнениям (36,4) и (43,4), а для переменного поля без зарядов — к однородным волновым уравнениям.

Решение неоднородных линейных уравнений (62,3—4) может быть представлено, как известно, в виде суммы решения этих же уравнений без правой части и частного интеграла уравнений с правой частью. Для нахождения этого частного интеграла разделим все пространство на бесконечно малые участки и определим поле, создаваемое зарядом, находящимся в одном из таких элементов объема. Вследствие линейности уравнений истинное поле будет равно сумме полей, создаваемых всеми такими элементами.

Заряд de в заданном элементе объема является, вообще говоря, функцией от времени. Если выбрать начало координат в рассматриваемом элементе объема, то плотность заряда $\rho = de(t)\,\delta(\mathbf{R})$, где $\mathbf{R}$ — расстояние от начала координат. Таким образом, нам надо решить уравнение

$$\Delta\varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -4\pi\, de(t)\,\delta(\mathbf{R}). \tag{62,5}$$

Везде, кроме начала координат, $\delta(\mathbf{R}) = 0$, и мы имеем уравнение

$$\Delta\varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = 0. \tag{62,6}$$

Очевидно, что в рассматриваемом случае φ обладает центральной симметрией, т. е. есть функция только от R. Поэтому, если написать оператор Лапласа в сферических координатах, то (62,6) приобретет вид:

$$\frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2\frac{\partial\varphi}{\partial R}\right) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = 0.$$

Для решения этого уравнения сделаем подстановку $\varphi = \chi(R, t)/R$. Тогда для χ мы получим:

$$\frac{\partial^2\chi}{\partial R^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\chi}{\partial t^2} = 0.$$

Но это есть уравнение плоских волн, решение которого имеет вид (см. § 47):

$$\chi = f_1\left(t - \frac{R}{c}\right) + f_2\left(t + \frac{R}{c}\right).$$

Поскольку мы ищем только частный интеграл уравнения, то достаточно взять только одну из функций f_1 и f_2. Обычно бывает удобным выбирать $f_2 = 0$ (см. об этом ниже). Тогда потенциал φ везде, кроме начала координат, имеет вид

$$\varphi = \frac{\chi\left(t - \frac{R}{c}\right)}{R}. \tag{62,7}$$

Функция χ в этом равенстве пока произвольна; выберем ее теперь так, чтобы получить верное значение для потенциала также и в на-

чале координат. Иначе говоря, мы должны подобрать χ так, чтобы в начале координат удовлетворялось уравнение (62,5). Это легко сделать, заметив, что при $R \to 0$ сам потенциал стремится к бесконечности, а потому его производные по координатам растут быстрее, чем производные по времени. Следовательно, при $R \to 0$ в уравнении (62,5) можно пренебречь членом $\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}$ по сравнению с $\Delta\varphi$. Тогда оно переходит в известное уже нам уравнение (36,9), приводящее к закону Кулона. Таким образом, вблизи начала координат формула (62,7) должна переходить в закон Кулона, откуда следует, что $\chi(t) = de(t)$, т. е.

$$\varphi = \frac{de\left(t - \frac{R}{c}\right)}{R}.$$

Отсюда легко перейти к решению уравнения (62,4) для произвольного распределения зарядов $\rho(x, y, z, t)$. Для этого достаточно написать $de = \rho\, dV$ (dV — элемент объема) и проинтегрировать по всему пространству. К полученному таким образом решению неоднородного уравнения (62,4) можно прибавить еще решение φ_0 этого же уравнения без правой части. Таким образом, общее решение имеет вид:

$$\begin{gathered}\varphi(\mathbf{r}, t) = \int \frac{1}{R}\rho\left(\mathbf{r}', t - \frac{R}{c}\right) dV' + \varphi_0,\\ \mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}', \qquad dV' = dx'\,dy'\,dz',\end{gathered} \tag{62,8}$$

где $\mathbf{r} = (x, y, z)$, $\mathbf{r}' = (x', y', z')$; R есть расстояние от элемента объема dV до «точки наблюдения», в которой мы ищем значение потенциала. Мы будем писать это выражение коротко в виде:

$$\varphi = \int \frac{\rho_{t-R/c}}{R} dV + \varphi_0, \tag{62,9}$$

где индекс показывает, что значение ρ надо брать в момент времени $t - R/c$, а штрих у dV опущен.

Аналогичным образом имеем для векторного потенциала:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{c}\int \frac{\mathbf{j}_{t-R/c}}{R} dV + \mathbf{A}_0, \tag{62,10}$$

где $\mathbf{A}_0$ — решение уравнения (62,3) без правой части.

Выражения (62,9—10) (без φ_0 и $\mathbf{A}_0$) называются *запаздывающими потенциалами*.

В случае неподвижных зарядов (т. е. не зависящей от времени плотности ρ) формула (62,9) переходит в известную уже нам формулу (36,8) для потенциала электростатического поля; формула же (62,10) в случае стационарного движения зарядов переходит (после

усреднения) в формулу (43,5) для векторного потенциала постоянного магнитного поля.

Величины φ_0 и $\mathbf{A}_0$ в (62,9—10) определяются так, чтобы удовлетворить условиям задачи. Для этого, очевидно, было бы достаточно задать начальные условия, т. е. поле в начальный момент времени. Однако с такими начальными условиями обычно не приходится иметь дела. Вместо этого задаются условия на больших расстояниях от системы зарядов в течение всего времени. Именно, задается падающее на систему внешнее излучение. Соответственно этому поле, возникающее в результате взаимодействия этого излучения с системой, может отличаться от внешнего поля только излучением, исходящим от системы. Такое исходящее от системы излучение на больших расстояниях должно иметь вид волны, распространяющейся по направлению от системы, т. е. в направлении возрастающих R. Но этому условию удовлетворяют именно запаздывающие потенциалы. Таким образом, последние изображают собой поле, исходящее от системы, а φ_0 и $\mathbf{A}_0$ надо отождествить с внешним полем, действующим на систему.

§ 63. Потенциалы Лиенара — Вихерта

Определим потенциалы поля, создаваемого одним точечным зарядом, совершающим заданное движение по траектории $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0(t)$.

Согласно формулам запаздывающих потенциалов поле в точке наблюдения $P(x, y, z)$ в момент времени t определяется состоянием движения заряда в предшествующий момент времени t', для которого время распространения светового сигнала из точки нахождения заряда $\mathbf{r}_0(t')$ в точку наблюдения P как раз совпадает с разностью $t - t'$. Пусть $\mathbf{R}(t) = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t)$ — радиус-вектор от заряда e в точку P; вместе с $\mathbf{r}_0(t)$ он является заданной функцией времени. Тогда момент t' определяется уравнением

$$t' + \frac{R(t')}{c} = t. \tag{63,1}$$

Для каждого значения t это уравнение имеет всего один корень t' [1]).

[1]) Это обстоятельство довольно очевидно само по себе, но в его справедливости можно убедиться и непосредственно. Для этого выберем точку наблюдения P и момент наблюдения t в качестве начала O четырехмерной системы координат и построим световой конус (§ 2) с вершиной в O. Нижняя полость этого конуса, охватывающая область абсолютно прошедшего (по отношению к событию O), представляет собой геометрическое место мировых точек, таких, что посланный из них сигнал достигнет точки O. Точки же, в которых эта гиперповерхность пересекается мировой линией движения заряда, как раз и соответствуют корням уравнения (63,1). Но поскольку скорость частицы всегда меньше скорости света, то ее мировая линия имеет везде меньший наклон к оси времени, чем наклон светового конуса. Отсюда и следует, что мировая линия частицы может пересечь нижнюю полость светового конуса только в одной точке.

В системе отсчета, в которой в момент времени t' частица покоится, поле в точке наблюдения в момент t дается просто кулоновским потенциалом, т. е.

$$\varphi = \frac{e}{R(t')}, \qquad \mathbf{A} = 0. \tag{63,2}$$

Выражения для потенциалов в произвольной системе отсчета мы получим теперь, написав такой 4-вектор, который бы при скорости $\mathbf{v} = 0$ давал для φ и $\mathbf{A}$ значения (63,2). Замечая, что согласно (63,1) φ из (63,2) можно написать также и в виде

$$\varphi = \frac{e}{c(t-t')},$$

находим, что искомый 4-вектор есть

$$A^i = e\frac{u^i}{R_k u^k}, \tag{63,3}$$

где u^k — 4-скорость заряда, а 4-вектор $R^k = [c(t-t'),\ \mathbf{r}-\mathbf{r}']$, причем x', y', z', t' связаны друг с другом соотношением (63,1); последнее может быть записано в инвариантном виде как

$$R_k R^k = 0. \tag{63,4}$$

Переходя теперь снова к трехмерным обозначениям, получим для потенциалов поля, создаваемого произвольно движущимся точечным зарядом, следующие выражения:

$$\varphi = \frac{e}{\left(R - \frac{\mathbf{vR}}{c}\right)}, \qquad \mathbf{A} = \frac{e\mathbf{v}}{c\left(R - \frac{\mathbf{vR}}{c}\right)}, \tag{63,5}$$

где $\mathbf{R}$ — радиус-вектор, проведенный из точки нахождения заряда в точку наблюдения P, и все величины в правых частях равенств должны быть взяты в момент времени t', определяющийся из (63,1). Потенциалы поля в виде (63,5) называются *потенциалами Лиенара — Вихерта*.

Для вычисления напряженностей электрического и магнитного полей по формулам

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \operatorname{grad}\varphi, \qquad \mathbf{H} = \operatorname{rot}\mathbf{A}$$

надо дифференцировать φ и $\mathbf{A}$ по координатам x, y, z точки и моменту t наблюдения. Между тем формулы (63,5) выражают потенциалы как функции от t' и лишь через соотношение (63,1) — как неявные функции от x, y, z, t. Поэтому для вычисления искомых производных надо предварительно вычислить производные от t'.

Дифференцируя соотношение $R(t')=c(t-t')$ по t, имеем:

$$\frac{\partial R}{\partial t}=\frac{\partial R}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial t}=-\frac{\mathbf{Rv}}{R}\frac{\partial t'}{\partial t}=c\left(1-\frac{\partial t'}{\partial t}\right)$$

(значение $\partial R/\partial t'$ получается дифференцированием тождества $R^2=\mathbf{R}^2$ и подстановкой $\partial\mathbf{R}(t')/\partial t=-\mathbf{v}(t')$; знак минус здесь связан с тем, что $\mathbf{R}$ есть радиус-вектор от заряда e в точку P, а не наоборот). Отсюда

$$\frac{\partial t'}{\partial t}=\frac{1}{1-\frac{\mathbf{vR}}{Rc}}. \tag{63,6}$$

Аналогично, дифференцируя то же соотношение по координатам, найдем:

$$\operatorname{grad} t'=-\frac{1}{c}\operatorname{grad} R(t')=-\frac{1}{c}\left(\frac{\partial R}{\partial t'}\operatorname{grad} t'+\frac{\mathbf{R}}{R}\right),$$

откуда

$$\operatorname{grad} t'=-\frac{\mathbf{R}}{c\left(R-\frac{\mathbf{Rv}}{c}\right)}. \tag{63,7}$$

С помощью этих формул не представляет труда вычислить поля $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$. Опуская промежуточные вычисления, приведем получающийся результат:

$$\mathbf{E}=e\frac{1-\frac{v^2}{c^2}}{\left(R-\frac{\mathbf{Rv}}{c}\right)^3}\left(\mathbf{R}-\frac{\mathbf{v}}{c}R\right)+\frac{e}{c^2\left(R-\frac{\mathbf{Rv}}{c}\right)^3}\left[\mathbf{R}\left[\left(\mathbf{R}-\frac{\mathbf{v}}{c}R\right)\dot{\mathbf{v}}\right]\right], \tag{63,8}$$

$$\mathbf{H}=\frac{1}{R}[\mathbf{RE}]. \tag{63,9}$$

Здесь $\dot{\mathbf{v}}=\partial\mathbf{v}/\partial t'$; все величины в правых сторонах равенств берутся в момент t'. Интересно отметить, что магнитное поле оказывается везде перпендикулярным к электрическому.

Электрическое поле (63,8) состоит из двух частей различного характера. Первый член зависит только от скорости частицы (но не от ее ускорения) и на больших расстояниях меняется как $1/R^2$. Второй член зависит от ускорения, а при больших R меняется как $1/R$. Мы увидим ниже (§ 66), что этот последний член связан с излучаемыми частицей электромагнитными волнами.

Что касается первого члена, то, будучи независимым от ускорения, он должен соответствовать полю, создаваемому равномерно движущимся зарядом. Действительно, при постоянной скорости разность

$$\mathbf{R}_{t'}-\frac{\mathbf{v}}{c}R_{t'}=\mathbf{R}_{t'}-\mathbf{v}(t-t')$$

есть расстояние $\mathbf{R}_t$ от заряда до точки наблюдения в самый момент наблюдения. Легко также убедиться непосредственной проверкой в том, что

$$R_{t'}-\frac{1}{c}\mathbf{R}_{t'}\mathbf{v}=\sqrt{R_t^2-\frac{1}{c^2}[\mathbf{v}\mathbf{R}_t]^2}=R_t\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}\sin^2\theta_t},$$

где θ_t — угол между $\mathbf{R}_t$ и $\mathbf{v}$. В результате первый член в (63,8) оказывается совпадающим с выражением (38,8).

Задача

Вывести потенциалы Лиенара—Вихерта путем интегрирования в формулах (62,9—10).

Решение. Напишем формулу (62,8) в виде:

$$\varphi(\mathbf{r},t)=\iint\frac{\rho(\mathbf{r}',\tau)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\delta\left(\tau-t+\frac{1}{c}|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|\right)d\tau\,dV'$$

[и аналогично для $\mathbf{A}(\mathbf{r},t)$], введя в нее лишнюю δ-функцию и тем самым избавившись от неявных аргументов в функции ρ. Для точечного заряда, движущегося по заданной траектории $\mathbf{r}=\mathbf{r}_0(t)$, имеем:

$$\rho(\mathbf{r}',\tau)=e\delta[\mathbf{r}'-\mathbf{r}_0(\tau)].$$

Подставив это выражение и произведя интегрирование по dV', получим:

$$\varphi(\mathbf{r},t)=e\int\frac{d\tau}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0(\tau)|}\,\delta\left[\tau-t+\frac{1}{c}|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0(\tau)|\right].$$

Интегрирование по $d\tau$ производится с помощью формулы

$$\delta[F(\tau)]=\frac{\delta(\tau-t')}{F'(t')}$$

[где t' — корень уравнения $F(t')=0$] и приводит к формуле (63,5).

§ 64. Спектральное разложение запаздывающих потенциалов

Поле, создаваемое движущимися зарядами, можно разложить на монохроматические волны. Потенциалы отдельной монохроматической компоненты поля имеют вид $\varphi_\omega e^{-i\omega t}$, $\mathbf{A}_\omega e^{-i\omega t}$. Плотности заряда и тока создающей поле системы тоже можно подвергнуть спектральному разложению. Ясно, что за создание определенной монохроматической компоненты поля ответственны соответствующие компоненты от ρ и $\mathbf{j}$.

Для того чтобы выразить спектральные компоненты поля через компоненты плотностей заряда и тока, подставляем в (62,9) вместо φ и ρ соответственно $\varphi_\omega e^{-i\omega t}$ и $\rho_\omega e^{-i\omega t}$. Мы находим тогда

$$\varphi_\omega e^{-i\omega t}=\int\rho_\omega\frac{e^{-i\omega(t-R/c)}}{R}\,dV.$$

Сокращая на $e^{-i\omega t}$ и вводя абсолютную величину волнового вектора $k=\omega/c$, имеем:

$$\varphi_\omega = \int \rho_\omega \frac{e^{ikR}}{R} dV. \tag{64,1}$$

Аналогично, для $\mathbf{A}_\omega$ получим:

$$\mathbf{A}_\omega = \int \mathbf{j}_\omega \frac{e^{ikR}}{cR} dV. \tag{64,2}$$

Заметим, что формула (64,1) представляет собой обобщение решения уравнения Пуассона на более общее уравнение вида

$$\Delta\varphi_\omega + k^2\varphi_\omega = -4\pi\rho_\omega \tag{64,3}$$

(получающееся из уравнения (62,4) при ρ, φ, зависящих от времени посредством множителя $e^{-i\omega t}$).

При разложении в интеграл Фурье компонента Фурье плотности заряда есть

$$\rho_\omega = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \rho e^{i\omega t} dt.$$

Подставляя это выражение в (64,1), получим:

$$\varphi_\omega = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int \frac{\rho}{R} e^{i(\omega t + kR)} dV dt. \tag{64,4}$$

Здесь надо еще перейти от непрерывного распределения плотности зарядов к точечным зарядам, о движении которых фактически идет речь. Так, если имеется всего один точечный заряд, то полагаем:

$$\rho = e\delta[\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t)],$$

где $\mathbf{r}_0(t)$ — радиус-вектор заряда, являющийся заданной функцией времени. Подставляя это выражение в (64,4) и производя интегрирование по dV [сводящееся к замене $\mathbf{r}$ на $\mathbf{r}_0(t)$], получим:

$$\varphi_\omega = e \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{R(t)} e^{i\omega[t + R(t)/c]} dt, \tag{64,5}$$

где теперь $R(t)$ — расстояние от движущейся частицы до точки наблюдения. Аналогичным образом, для векторного потенциала получим:

$$\mathbf{A}_\omega = \frac{e}{c} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathbf{v}(t)}{R(t)} e^{i\omega[t + R(t)/c]} dt, \tag{64,6}$$

где $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}_0(t)$ — скорость частицы.

Формулы, аналогичные (64,5—6), могут быть написаны и в случае, когда спектральное разложение плотностей заряда и тока содержит дискретный ряд частот. Так, при периодическом (с периодом $T = 2\pi/\omega_0$) движении точечного заряда спектральное разложение поля содержит лишь частоты вида $n\omega_0$ и соответствующие компоненты векторного потенциала

$$\mathbf{A}_n = \frac{e}{cT}\int\limits_0^T \frac{\mathbf{v}(t)}{R(t)}\, e^{in\omega_0 [t+R(t)/c]}\, dt \qquad (64{,}7)$$

(и аналогично для φ_n). В обоих случаях (64,6—7) компоненты Фурье определены в соответствии с § 49.

Задача

Разложить поле равномерно и прямолинейно движущегося заряда на плоские волны.

Решение. Поступаем аналогично тому, как делалось в § 51. Плотность заряда пишем в виде $\rho = e\delta(\mathbf{r}-\mathbf{v}t)$, где $\mathbf{v}$ — скорость частицы. Взяв компоненту Фурье от уравнения $\square\varphi = -4\pi e\delta(\mathbf{r}-\mathbf{v}t)$, находим:

$$(\square\varphi)_{\mathbf{k}} = -4\pi e \cdot e^{-i(\mathbf{vk})t}.$$

С другой стороны, из

$$\varphi = \int e^{i\mathbf{kr}}\varphi_{\mathbf{k}} \frac{d^3k}{(2\pi)^3}$$

имеем:

$$(\square\varphi)_{\mathbf{k}} = -k^2\varphi_{\mathbf{k}} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi_{\mathbf{k}}}{\partial t^2}.$$

Таким образом,

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi_{\mathbf{k}}}{\partial t^2} + k^2\varphi_{\mathbf{k}} = 4\pi e \cdot e^{-i(\mathbf{kv})t},$$

откуда окончательно

$$\varphi_{\mathbf{k}} = 4\pi e \frac{e^{-i(\mathbf{kv})t}}{k^2 - \left(\frac{\mathbf{kv}}{c}\right)^2}.$$

Отсюда видно, что волна с волновым вектором $\mathbf{k}$ обладает частотой $\omega = \mathbf{kv}$.

Аналогично находим для векторного потенциала:

$$\mathbf{A}_{\mathbf{k}} = \frac{4\pi e}{c}\frac{\mathbf{v}e^{-i(\mathbf{kv})t}}{k^2 - \left(\frac{\mathbf{kv}}{c}\right)^2}.$$

Наконец, для поля имеем:

$$\mathbf{E}_{\mathbf{k}} = -i\mathbf{k}\varphi_{\mathbf{k}} + \frac{i(\mathbf{kv})}{c}\mathbf{A}_{\mathbf{k}} = i\,4\pi e\frac{-\mathbf{k}+\frac{(\mathbf{kv})\mathbf{v}}{c^2}}{k^2-\left(\frac{\mathbf{kv}}{c}\right)^2}e^{-i(\mathbf{kv})t},$$

$$\mathbf{H}_{\mathbf{k}} = i[\mathbf{kA}_{\mathbf{k}}] = i\frac{4\pi e}{c}\frac{[\mathbf{kv}]}{k^2-\left(\frac{\mathbf{kv}}{c}\right)^2}e^{-i(\mathbf{kv})t}.$$

§ 65. Функция Лагранжа с точностью до членов второго порядка

В обычной классической механике систему взаимодействующих друг с другом частиц можно описывать с помощью функции Лагранжа, зависящей только от координат и скоростей этих частиц (в один и тот же момент времени). Возможность этого в конечном итоге обусловлена тем, что в механике скорость распространения взаимодействий предполагается бесконечной.

Мы уже знаем, что благодаря конечной скорости распространения взаимодействий поле надо рассматривать как самостоятельную систему с собственными «степенями свободы». Поэтому если мы имеем систему взаимодействующих частиц (зарядов), то для ее описания мы должны рассматривать систему, состоящую из этих частиц и поля. В связи с этим при учете конечной скорости распространения взаимодействий невозможно строгое описание системы взаимодействующих частиц с помощью функции Лагранжа, зависящей только от координат и скоростей частиц и не содержащей никаких величин, связанных с собственными «степенями свободы» поля.

Однако если скорости v всех частиц малы по сравнению со скоростью света, то систему зарядов можно описывать некоторой приближенной функцией Лагранжа. При этом оказывается возможным ввести функцию Лагранжа, описывающую систему не только при пренебрежении всеми степенями v/c (классическая функция Лагранжа), но и с точностью до величин порядка v^2/c^2. Последнее обстоятельство связано с тем, что излучение электромагнитных волн движущимися зарядами (и, тем самым, возникновение «самостоятельного» поля) появляется лишь в третьем приближении по v/c (см. ниже, § 67)[1].

Предварительно заметим, что в нулевом приближении, т. е. при полном пренебрежении запаздыванием потенциалов, функция

---

[1]) В особых случаях появление излучения может отодвигаться до пятого приближения по v/c; в таком случае существует функция Лагранжа и с точностью до членов порядка $(v/c)^4$ (см. задачу 2 к § 75).

Лагранжа для системы зарядов имеет вид

$$L^{(0)}=\sum_a \frac{m_a v_a^2}{2}-\sum_{a>b}\frac{e_a e_b}{R_{ab}} \tag{65,1}$$

(суммирование производится по зарядам, входящим в состав системы). Второй член есть потенциальная энергия взаимодействия, какой она была бы для неподвижных зарядов.

Для получения следующего приближения поступим следующим образом. Функция Лагранжа для заряда e_a, находящегося во внешнем поле, есть

$$L_a=-mc^2\sqrt{1-\frac{v_a^2}{c^2}}-e_a\varphi+\frac{e_a}{c}\mathbf{A}\mathbf{v}_a. \tag{65,2}$$

Выбрав какой-либо один из зарядов системы, мы определим потенциалы поля, создаваемого всеми остальными зарядами в точке, где находится первый, и выразим их через координаты и скорости зарядов, создающих это поле (как раз это можно сделать только приближенно: φ — с точностью до членов порядка v^2/c^2, а $\mathbf{A}$ — до членов порядка v/c). Подставляя полученные таким образом выражения для потенциалов в (65,2), мы получим функцию Лагранжа для одного из зарядов системы (при данном движении остальных). Отсюда уже без труда можно найти L для всей системы.

Будем исходить из выражений для запаздывающих потенциалов:

$$\varphi=\int\frac{\rho_{t-R/c}}{R}\,dV,\qquad \mathbf{A}=\frac{1}{c}\int\frac{\mathbf{j}_{t-R/c}}{R}\,dV.$$

Если скорости всех зарядов малы по сравнению со скоростью света, то распределение зарядов не успевает сильно измениться за время R/c. Поэтому мы можем разложить $\rho_{t-R/c}$ и $\mathbf{j}_{t-R/c}$ в ряд по степеням R/c. Для скалярного потенциала находим, таким образом, с точностью до членов второго порядка:

$$\varphi=\int\frac{\rho\,dV}{R}-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int\rho\,dV+\frac{1}{2c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int R\rho\,dV$$

(ρ без индексов есть ρ в момент времени t; знаки дифференцирования по времени могут, очевидно, быть вынесены из-под знака интеграла). Но $\int\rho\,dV$ есть постоянный полный заряд системы. Поэтому второй член в полученном выражении равен нулю, так что

$$\varphi=\int\frac{\rho\,dV}{R}+\frac{1}{2c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int R\rho\,dV. \tag{65,3}$$

Аналогично можно поступить с $\mathbf{A}$. Но выражение для векторного потенциала через плотность тока содержит уже само по себе $1/c$, а

при подстановке в функцию Лагранжа умножается еще раз на $1/c$. Поскольку мы ищем функцию Лагранжа только с точностью до членов второго порядка, то в разложении **A** достаточно ограничиться только первым членом, т. е.

$$\mathbf{A}=\frac{1}{c}\int\frac{\rho\mathbf{v}}{R}\,dV \tag{65,4}$$

(мы подставили $\mathbf{j}=\rho\mathbf{v}$).

Предположим сначала, что поле создается всего одним точечным зарядом e. Тогда имеем из (65,3) и (65,4):

$$\varphi=\frac{e}{R}+\frac{e}{2c^2}\frac{\partial^2R}{\partial t^2},\qquad \mathbf{A}=\frac{e\mathbf{v}}{cR}, \tag{65,5}$$

где R — расстояние от заряда.

Выберем вместо φ и **A** другие потенциалы φ' и $\mathbf{A}'$, т. е. произведем калибровочное преобразование (см. § 18):

$$\varphi'=\varphi-\frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t},\qquad \mathbf{A}'=\mathbf{A}+\operatorname{grad}f,$$

причем в качестве f выберем функцию

$$f=\frac{e}{2c}\frac{\partial R}{\partial t}.$$

Тогда мы получим[1]):

$$\varphi'=\frac{e}{R},\qquad \mathbf{A}'=\frac{e\mathbf{v}}{cR}+\frac{e}{2c}\nabla\frac{\partial R}{\partial t}.$$

Для вычисления $\mathbf{A}'$ заметим, что $\nabla\frac{\partial R}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}\nabla R$. Операция ∇ означает здесь дифференцирование по координатам точки наблюдения, в которой ищется значение $\mathbf{A}'$. Поэтому градиент ∇R равен единичному вектору **n**, направленному от заряда e к точке наблюдения, так что

$$\mathbf{A}'=\frac{e\mathbf{v}}{cR}+\frac{e}{2c}\dot{\mathbf{n}}.$$

Далее пишем:

$$\dot{\mathbf{n}}=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\mathbf{R}}{R}\right)=\frac{\dot{\mathbf{R}}}{R}-\frac{\mathbf{R}\dot{R}}{R^2}.$$

Но производная $-\dot{\mathbf{R}}$ при заданной точке наблюдения есть скорость **v** заряда, а производную $\dot{R}$ легко определить, дифференцируя тождество $R^2=\mathbf{R}^2$, т. е. написав

$$R\dot{R}=\mathbf{R}\dot{\mathbf{R}}=-\mathbf{R}\mathbf{v}.$$

[1]) Эти потенциалы уже не удовлетворяют условию Лоренца (62,1), а потому и уравнениям (62,3—4).

Таким образом,

$$\dot{\mathbf{n}} = \frac{-\mathbf{v} + \mathbf{n}(\mathbf{n}\mathbf{v})}{R}.$$

Подставляя это в выражение для $\mathbf{A}'$, находим окончательно:

$$\varphi' = \frac{e}{R}, \qquad \mathbf{A}' = \frac{e[\mathbf{v} + (\mathbf{v}\mathbf{n})\mathbf{n}]}{2cR}. \tag{65,6}$$

Если поле создается не одним, а несколькими зарядами, то надо, очевидно, просуммировать эти выражения по всем зарядам.

Подставляя их затем в (65,2), найдем функцию Лагранжа L_a заряда e_a (при заданном движении всех остальных зарядов). При этом нужно первый член в (65,2) тоже разложить по степеням v_a/c, оставляя члены до второго порядка. Таким образом, мы находим:

$$L_a = \frac{m_a v_a^2}{2} + \frac{1}{8}\frac{m_a v_a^4}{c^2} - e_a \sum_b{}' \frac{e_b}{R_{ab}} + \frac{e_a}{2c^2}\sum_b{}' \frac{e_b}{R_{ab}}[\mathbf{v}_a\mathbf{v}_b + (\mathbf{v}_a\mathbf{n}_{ab})(\mathbf{v}_b\mathbf{n}_{ab})]$$

(суммирование производится по всем зарядам, за исключением e_a; $\mathbf{n}_{ab}$ — единичный вектор в направлении между e_b и e_a).

Отсюда уже не представляет труда найти функцию Лагранжа для всей системы. Легко сообразить, что эта функция равна не сумме L_a для всех зарядов, а имеет вид

$$L = \sum_a \frac{m_a v_a^2}{2} + \sum_a \frac{m_a v_a^4}{8c^2} - \sum_{a>b} \frac{e_a e_b}{R_{ab}} + \sum_{a>b} \frac{e_a e_b}{2c^2 R_{ab}}[\mathbf{v}_a\mathbf{v}_b + (\mathbf{v}_a\mathbf{n}_{ab})(\mathbf{v}_b\mathbf{n}_{ab})]. \tag{65,7}$$

Действительно, для каждого из зарядов при заданном движении всех остальных эта функция L переходит в приведенную выше L_a. Выражение (65,7) есть искомая функция Лагранжа системы зарядов с точностью до членов второго порядка (впервые полученная *Дарвиным*, 1922).

Наконец, определим еще функцию Гамильтона системы зарядов в том же приближении. Это можно было бы сделать по общим правилам нахождения $\mathcal{H}$ по L; однако проще поступить следующим образом. Второй и четвертый члены в (65,7) представляют собой малую поправку к $L^{(0)}$ (65,1). С другой стороны, из механики известно, что при небольшом изменении L и $\mathcal{H}$ малые добавки к ним равны по величине и противоположны по знаку (причем изменение L рассматривается при заданных координатах и скоростях, а изменение $\mathcal{H}$ — при заданных координатах и импульсах; см. I § 40).

Поэтому мы можем сразу написать $\mathscr{H}$, вычтя из

$$\mathscr{H}^{(0)}=\sum_a \frac{p_a^2}{2m_a}+\sum_{a>b}\frac{e_a e_b}{R_{ab}}$$

те же второй и четвертый члены из (65,7), предварительно заменив в них скорости на импульсы с помощью соотношений первого приближения $\mathbf{v}_a=\mathbf{p}_a/m_a$. Таким образом,

$$\mathscr{H}=\sum_a \frac{p_a^2}{2m_a}+\sum_{a>b}\frac{e_a e_b}{R_{ab}}-\sum_a \frac{p_a^4}{8c^2m_a^3}-\\ -\sum_{a>b}\frac{e_a e_b}{2c^2 m_a m_b R_{ab}}\left[\mathbf{p}_a\mathbf{p}_b+(\mathbf{p}_a\mathbf{n}_{ab})(\mathbf{p}_b\mathbf{n}_{ab})\right]. \quad (65,8)$$

Задачи

1. Определить (с точностью до членов второго порядка) центр инерции системы взаимодействующих частиц.

Решение. Наиболее просто задача решается с помощью формулы

$$\mathbf{R}=\frac{\sum\limits_a \mathscr{E}_a\mathbf{r}_a+\int W\mathbf{r}\,dV}{\sum\limits_a \mathscr{E}_a+\int W\,dV}$$

[ср. (14,6)], где $\mathscr{E}_a$ — кинетическая энергия частицы (включая ее энергию покоя), а W — плотность энергии создаваемого частицами поля. Поскольку $\mathscr{E}_a$ содержат большие величины m_ac^2, то для получения следующего приближения достаточно учесть в $\mathscr{E}_a$ и W лишь члены, не содержащие c, т. е. нерелятивистскую кинетическую энергию частиц и энергию электростатического поля. Имеем:

$$\int W\mathbf{r}\,dV=\frac{1}{8\pi}\int E^2\mathbf{r}\,dV=\frac{1}{8\pi}\int(\nabla\varphi)^2\mathbf{r}\,dV=\\ =\frac{1}{8\pi}\int\left(d\mathbf{f}\,\nabla\frac{\varphi^2}{2}\right)\mathbf{r}-\frac{1}{8\pi}\int\nabla\frac{\varphi^2}{2}\,dV-\frac{1}{8\pi}\int\varphi\Delta\varphi\cdot\mathbf{r}\,dV;$$

интеграл по бесконечно удаленной поверхности исчезает; второй интеграл также преобразуется в поверхностный и тоже исчезает, а в третьем подставляем $\Delta\varphi=-4\pi\rho$ и получаем:

$$\int W\mathbf{r}\,dV=\frac{1}{2}\int\rho\varphi\mathbf{r}\,dV=\frac{1}{2}\sum_a e_a\varphi_a\mathbf{r}_a,$$

где φ_a — потенциал, создаваемый в точке $\mathbf{r}_a$ всеми зарядами, за исключением e_a [1]).

[1]) Исключение собственного поля частиц соответствует упомянутой в примечании на стр. 123 «перенормировке» масс.

Окончательно находим:

$$\mathbf{R}=\frac{1}{\mathscr{E}}\sum_a \mathbf{r}_a\left(m_ac^2+\frac{p_a^2}{2m_a}+\frac{e_a}{2}\sum_b{}'\frac{e_b}{R_{ab}}\right)$$

(суммирование по всем b, кроме $b=a$), где

$$\mathscr{E}=\sum_a\left(m_ac^2+\frac{p_a^2}{2m_a}+\sum_{a>b}\frac{e_ae_b}{R_{ab}}\right)$$

— полная энергия системы. Таким образом, в рассматриваемом приближении координаты центра инерции действительно могут быть выражены через величины, относящиеся только к самим частицам.

2. Написать функцию Гамильтона во втором приближении для системы из двух частиц, исключив из нее движение системы как целого.

Решение. Выбираем систему отсчета, в которой сумма импульсов обеих частиц равна нулю. Написав импульсы как производные от действия, имеем:

$$\mathbf{p}_1+\mathbf{p}_2=\frac{\partial S}{\partial \mathbf{r}_1}+\frac{\partial S}{\partial \mathbf{r}_2}=0.$$

Отсюда видно, что в рассматриваемой системе отсчета действие является функцией разности $\mathbf{r}=\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1$ радиус-векторов обеих частиц. Поэтому имеем $\mathbf{p}_2=-\mathbf{p}_1=\mathbf{p}$, где $\mathbf{p}=\partial S/\partial\mathbf{r}$ есть импульс относительного движения частиц.

Функция Гамильтона равна

$$\mathscr{H}=\frac{p^2}{2}\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right)+\frac{e_1e_2}{r}-\frac{p^4}{8c^2}\left(\frac{1}{m_1^3}+\frac{1}{m_2^3}\right)+\frac{e_1e_2}{2m_1m_2c^2r}\left[p^2+(\mathbf{p}\mathbf{n})^2\right].$$

ГЛАВА IX

ИЗЛУЧЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН

§ 66. Поле системы зарядов на далеких расстояниях

Рассмотрим поле, создаваемое системой движущихся зарядов на расстояниях, больших по сравнению с ее собственными размерами.

Выберем начало координат O где-либо внутри системы зарядов. Радиус-вектор из O в точку наблюдения поля P обозначим посредством $\mathbf{R}_0$, а единичный вектор в этом направлении — через $\mathbf{n}$. Радиус-вектор элемента заряда $de = \rho\, dV$ пусть будет $\mathbf{r}$, а радиус-вектор от de в точку P обозначим как $\mathbf{R}$; очевидно, что $\mathbf{R} = \mathbf{R}_0 - \mathbf{r}$.

На больших расстояниях от системы $R_0 \gg r$ и приближенно имеем:

$$R = |\mathbf{R}_0 - \mathbf{r}| = R_0 - \mathbf{nr}.$$

Подставим это в формулы (66,9—10) для запаздывающих потенциалов. В знаменателе подынтегральных выражений можно пренебречь $\mathbf{rn}$ по сравнению с R_0. В аргументе же $t - R/c$ этого пренебрежения, вообще говоря, сделать нельзя; возможность такого пренебрежения определяется здесь не относительной величиной R_0/c и $\mathbf{rn}/c$, а тем, насколько меняются сами ρ и $\mathbf{j}$ за время $\mathbf{rn}/c$. Учитывая, что при интегрировании R_0 является постоянной и потому может быть вынесено за знак интеграла, находим для потенциалов поля на большом расстоянии от системы зарядов следующие выражения:

$$\varphi = \frac{1}{R_0} \int \rho_{t - \frac{R_0}{c} + \frac{\mathbf{rn}}{c}}\, dV, \qquad (66,1)$$

$$\mathbf{A} = \frac{1}{cR_0} \int \mathbf{j}_{t - \frac{R_0}{c} + \frac{\mathbf{rn}}{c}}\, dV. \qquad (66,2)$$

На достаточно больших расстояниях от системы поле в малых участках пространства можно рассматривать как плоскую волну. Для этого надо, чтобы расстояния были велики не только по сравнению с размерами системы, но и по сравнению с длиной излучаемых си-

стемой электромагнитных волн. Об этой области поля говорят как о *волновой зоне* излучения.

В плоской волне поля **E** и **H** связаны друг с другом соотношением (47,4) $\mathbf{E} = [\mathbf{H}\mathbf{n}]$. Поскольку $\mathbf{H} = \operatorname{rot} \mathbf{A}$, то для полного определения поля в волновой зоне достаточно вычислить только векторный потенциал. В плоской волне имеем $\mathbf{H} = [\dot{\mathbf{A}}\mathbf{n}]/c$ [ср. (47,3)], где точка над буквой означает дифференцирование по времени[1]). Таким образом, зная **A**, найдем **H** и **E** по формулам[2]):

$$\mathbf{H} = \frac{1}{c} [\dot{\mathbf{A}}\mathbf{n}], \quad \mathbf{E} = \frac{1}{c} [[\dot{\mathbf{A}}\mathbf{n}]\, \mathbf{n}]. \qquad (66,3)$$

Отметим, что поле на далеких расстояниях оказывается обратно пропорциональным первой степени расстояния R_0 от излучающей системы. Следует также заметить, что время t входит в выражения (66,1—3) везде в комбинации $t - R_0/c$ с расстоянием R_0.

Для излучения, создаваемого одним произвольно движущимся точечным зарядом, бывает удобно пользоваться потенциалами Лиенара — Вихерта. На далеких расстояниях можно заменить в формуле (63,5) переменный радиус-вектор **R** постоянной величиной $\mathbf{R}_0$, а в условии (63,1), определяющем t', надо положить $R = R_0 - \mathbf{r}_0\mathbf{n}$ [$\mathbf{r}_0(t)$ — радиус-вектор заряда]. Таким образом[3]),

$$\mathbf{A} = \frac{e\mathbf{v}(t')}{cR_0\left(1 - \frac{\mathbf{n}\mathbf{v}(t')}{c}\right)}, \qquad (66,4)$$

где t' определяется из равенства

$$t' - \frac{1}{c}\mathbf{r}_0(t')\,\mathbf{n} = t - \frac{R_0}{c}. \qquad (66,5)$$

Излучаемые системой электромагнитные волны уносят с собой определенную энергию. Поток энергии дается вектором Пойнтинга, равным в плоской волне

$$\mathbf{S} = c\frac{H^2}{4\pi}\mathbf{n}.$$

Интенсивность dI излучения в элементе телесного угла do определяют как количество энергии, протекающей в единицу времени через элемент $df = R_0^2 do$ шаровой поверхности с центром в начале

[1]) Эту формулу легко проверить в данном случае также и непосредственным вычислением ротора выражения (66,2), причем члены с $1/R_0^2$ должны быть отброшены по сравнению с членом $\sim 1/R_0$.

[2]) Формула $\mathbf{E} = -\dot{\mathbf{A}}/c$ [см. (47,3)] здесь неприменима, так как потенциалы φ, **A** не удовлетворяют тем дополнительным условиям, которые были наложены на них в § 47.

[3]) В формуле (63,8) для электрического поля рассматриваемому приближению соответствует пренебрежение первым членом по сравнению со вторым.

координат и с радиусом R_0. Это количество равно, очевидно, плотности потока энергии S, помноженной на df, т. е.

$$dI = c\frac{H^2}{4\pi}R_0^2 do. \qquad (66,6)$$

Поскольку поле H обратно пропорционально R_0, то мы видим, что количество энергии, излучаемой системой в единицу времени в элемент телесного угла do, одинаково для всех расстояний (при одинаковых для них значениях разности $t - R_0/c$). Так, разумеется, и должно быть, поскольку излучаемая системой энергия распространяется в окружающем пространстве со скоростью c, нигде не накопляясь и не исчезая.

Выведем формулы для спектрального разложения поля излучаемых системой волн. Они могут быть получены непосредственно из формул § 64. Подставляя в (64,2) $R = R_0 - \mathbf{rn}$ (причем в знаменателе подынтегрального выражения можно ограничиться подстановкой $R = R_0$), получим для компоненты Фурье векторного потенциала:

$$\mathbf{A}_\omega = \frac{e^{ikR_0}}{cR_0}\int \mathbf{j}_\omega e^{-i\mathbf{kr}}\, dV \qquad (66,7)$$

(где $\mathbf{k} = k\mathbf{n}$). Компоненты $\mathbf{H}_\omega$ и $\mathbf{E}_\omega$ определяются по формулам (66,3). Подставляя в них вместо $\mathbf{H}$, $\mathbf{E}$, $\mathbf{A}$ соответственно $\mathbf{H}_\omega e^{-i\omega t}$, $\mathbf{E}_\omega e^{-i\omega t}$, $\mathbf{A}_\omega e^{-i\omega t}$ и сокращая затем на $e^{-i\omega t}$, получим:

$$\mathbf{H}_\omega = i[\mathbf{kA}_\omega], \qquad \mathbf{E}_\omega = \frac{ic}{\omega}[\mathbf{k}[\mathbf{A}_\omega\mathbf{k}]]. \qquad (66,8)$$

Говоря о спектральном распределении интенсивности излучения, необходимо различать разложения в интеграл и ряд Фурье. С разложением в интеграл Фурье приходится иметь дело для излучения, сопровождающего столкновения заряженных частиц. При этом представляет интерес полное количество энергии, излученной за время столкновения (и соответственно потерянной сталкивающимися частицами). Пусть $d\mathscr{E}_{\mathbf{n}\omega}$ есть энергия, излученная в элемент телесного угла do в виде волн с частотами в интервале $d\omega$. Согласно общей формуле (49,8) доля полного излучения, приходящаяся на интервал частот $d\omega/2\pi$, получается из обычного выражения для интенсивности заменой квадрата поля на квадрат модуля его компоненты Фурье и одновременным умножением на 2. Поэтому имеем вместо (66,6).

$$d\mathscr{E}_{\mathbf{n}\omega} = \frac{c}{2\pi}|\mathbf{H}_\omega|^2 R_0^2 do\frac{d\omega}{2\pi}. \qquad (66,9)$$

Если заряды совершают периодическое движение, то поле излучения должно быть разложено в ряд Фурье. Согласно общей формуле (49,4) интенсивность отдельной компоненты разложения в ряд Фурье получается из обычного выражения для интенсивности заменой поля на его компоненту Фурье и одновременным умножением на 2.

Таким образом, интенсивность излучения в элемент телесного угла do с частотой $\omega = n\omega_0$ равна

$$dI_n = \frac{c}{2\pi} |\mathbf{H}_n|^2 R_0^2 do. \qquad (66,10)$$

Наконец, выпишем формулы, определяющие компоненты Фурье поля излучения непосредственно по заданному движению излучающих зарядов. При разложении в интеграл Фурье имеем:

$$\mathbf{j}_\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{j} e^{i\omega t} dt.$$

Подставляя это в (66,7) и переходя затем от непрерывного распределения токов к точечному заряду, движущемуся по траектории $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_0(t)$ (ср. § 64), получим:

$$\mathbf{A}_\omega = \frac{e^{ikR_0}}{cR_0} \int_{-\infty}^{\infty} e\mathbf{v}(t) e^{i[\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r}_0(t)]} dt. \qquad (66,11)$$

Поскольку $\mathbf{v} = d\mathbf{r}_0/dt$, то $\mathbf{v}\,dt = d\mathbf{r}_0$, и эту формулу можно написать также и в виде контурного интеграла, взятого вдоль траектории заряда:

$$\mathbf{A}_\omega = e\frac{e^{ikR_0}}{cR_0} \int e^{i(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r}_0)} d\mathbf{r}_0. \qquad (66,12)$$

Компонента Фурье магнитного поля согласно (66,8) имеет вид:

$$\mathbf{H}_\omega = e\frac{i\omega e^{ikR_0}}{c^2R_0} \int e^{i(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r}_0)} [\mathbf{n}\, d\mathbf{r}_0]. \qquad (66,13)$$

Если заряд совершает периодическое движение по замкнутой траектории, то поле разлагается в ряд Фурье. Компоненты разложения получаются заменой в формулах (66,11—13) интегрирования по всему времени усреднением по периоду T движения (см. определения в § 49). Так, для компоненты Фурье магнитного поля с частотой $\omega = n\omega_0 = 2\pi n/T$ имеем:

$$\mathbf{H}_n = e\frac{2\pi i n e^{ikR_0}}{c^2T^2R_0} \int_0^T e^{i(n\omega_0 t - \mathbf{k}\mathbf{r}_0(t))} [\mathbf{n}\mathbf{v}(t)]\, dt =$$

$$= e\frac{2\pi i n e^{ikR_0}}{c^2T^2R_0} \oint e^{i(n\omega_0 t - \mathbf{k}\mathbf{r}_0)} [\mathbf{n}\, d\mathbf{r}_0]. \qquad (66,14)$$

Во втором интеграле интегрирование производится по замкнутой орбите частицы.

Задача

Получить четырехмерное выражение для спектрального разложения излучаемого 4-импульса при движении заряда по заданной траектории.

Решение. Подставив (66,8) в (66,9) и учитывая, что в силу условия Лоренца (62,1) $k\varphi_\omega = \mathbf{k}\mathbf{A}_\omega$, находим:

$$d\mathscr{E}_{\mathbf{n}\omega} = \frac{c}{2\pi}(k^2|\mathbf{A}_\omega|^2 - |\mathbf{k}\mathbf{A}_\omega|^2) R_0^2 do \frac{d\omega}{2\pi} = \frac{c}{2\pi} k^2 (|\mathbf{A}_\omega|^2 - |\varphi_\omega|^2) R_0^2 do \frac{d\omega}{2\pi} =$$
$$= -\frac{c}{2\pi} k^2 A_{i\omega} A_\omega^{i*} R_0^2 do \frac{d\omega}{2\pi}.$$

Представив 4-потенциал $A_{i\omega}$ в виде, аналогичном (66,12), получим:

$$d\mathscr{E}_{\mathbf{n}\omega} = -\frac{k^2e^2}{4\pi^2}\chi_i\chi^{i*} do\, dk,$$

где χ^i обозначает 4-вектор

$$\chi^i = \int \exp(-ik_lx^l)\, dx^i,$$

в котором интегрирование производится вдоль мировой линии частицы. Наконец, переходя к четырехмерным обозначениям [в том числе к элементу 4-объема в k-пространстве, ср. (10,1а)], получим для излучаемого 4-импульса следующее выражение:

$$dP^i = -\frac{e^2k^i}{2\pi^2c}\chi_i\chi^i\delta(k_mk^m)\, d^4k.$$

§ 67. Дипольное излучение

Временем $\mathbf{rn}/c$ в подынтегральных выражениях запаздывающих потенциалов (66,1—2) можно пренебречь, если за это время распределение зарядов мало меняется. Легко найти условия осуществления этого требования. Пусть T означает порядок величины времени, в течение которого распределение зарядов в системе меняется заметным образом. Излучение этой системы будет, очевидно, обладать периодом порядка T (т. е. частотой порядка $1/T$). Обозначим далее посредством a порядок величины размеров системы. Тогда время $\mathbf{rn}/c \sim a/c$. Для того чтобы за это время распределение зарядов в системе не успело значительно измениться, необходимо, чтобы $a/c \ll T$. Но cT есть не что иное, как длина волны λ излучения. Таким образом, условие $a \ll cT$ можно написать в виде

$$a \ll \lambda, \tag{67,1}$$

т. е. размеры системы должны быть малы по сравнению с длиной излучаемой волны.

Заметим, что условие (67,1) можно получить и из (66,7). В подынтегральном выражении $\mathbf{r}$ пробегает значения в интервале порядка размеров системы, так как вне системы $\mathbf{j}$ равно нулю. Поэтому показатель $i\mathbf{kr}$ мал, и им можно пренебречь для тех волн, у которых $ka \ll 1$, что эквивалентно (67,1).

Это условие можно написать еще и в другом виде, заметив, что $T \sim a/v$, так что $\lambda \sim ca/v$, если v есть порядок величины скорости зарядов. Из $a \ll \lambda$ находим тогда:

$$v \ll c, \tag{67,2}$$

т. е. скорости зарядов должны быть малы по сравнению со скоростью света.

Будем предполагать, что это условие выполнено, и займемся изучением излучения на расстояниях от излучающей системы, больших по сравнению с длиной волны (а следовательно, во всяком случае больших по сравнению с размерами системы). Как было указано в § 66, на таких расстояниях поле можно рассматривать как плоскую волну, и потому для определения поля достаточно вычислить только векторный потенциал.

Векторный потенциал (66,2) имеет теперь вид

$$\mathbf{A} = \frac{1}{cR_0}\int \mathbf{j}_{t'}\, dV, \tag{67,3}$$

где время $t' = t - R_0/c$ и уже не зависит от переменных интегрирования. Подставляя $\mathbf{j} = \rho\mathbf{v}$, переписываем (67,3) в виде

$$\mathbf{A} = \frac{1}{cR_0}\left(\sum e\mathbf{v}\right),$$

где суммирование производится по всем зарядам системы; для краткости мы будем опускать индекс t' — все величины в правых сторонах равенств берутся в момент времени t'. Но

$$\sum e\mathbf{v} = \frac{d}{dt}\sum e\mathbf{r} = \dot{\mathbf{d}},$$

где $\mathbf{d}$ — дипольный момент системы. Таким образом,

$$\mathbf{A} = \frac{1}{cR_0}\dot{\mathbf{d}}. \tag{67,4}$$

С помощью формул (66,3) находим, что магнитное поле равно

$$\mathbf{H} = \frac{1}{c^2R_0}[\ddot{\mathbf{d}}\mathbf{n}], \tag{67,5}$$

а электрическое поле

$$\mathbf{E} = \frac{1}{c^2R_0}\left[[\ddot{\mathbf{d}}\mathbf{n}]\,\mathbf{n}\right] \tag{67,6}$$

Отметим, что в рассматриваемом приближении излучение определяется второй производной от дипольного момента системы. Такое излучение называется *дипольным*.

Поскольку $\mathbf{d} = \sum e\mathbf{r}$, то $\ddot{\mathbf{d}} = \sum e\dot{\mathbf{v}}$. Таким образом, заряды могут излучать только, если они движутся с ускорением. Равномерно

движущиеся заряды не излучают. Это следует, впрочем, и непосредственно из принципа относительности, так как равномерно движущийся заряд можно рассматривать в такой инерциальной системе, где он покоится, а покоящиеся заряды не излучают.

Подставляя (67,5) в (66,6), получим интенсивность дипольного излучения:

$$dI = \frac{1}{4\pi c^3}\left[\ddot{\mathbf{d}}\mathbf{n}\right]^2 do = \frac{\ddot{\mathbf{d}}^2}{4\pi c^3}\sin^2\theta\, do, \tag{67,7}$$

где θ — угол между векторами $\ddot{\mathbf{d}}$ и $\mathbf{n}$. Это есть количество энергии, излучаемой системой в единицу времени в элемент телесного угла do; отметим, что угловое распределение излучения дается множителем $\sin^2\theta$.

Подставив $do = 2\pi\sin\theta\, d\theta$ и интегрируя по $d\theta$ от 0 до π, получим полное излучение

$$I = \frac{2}{3c^3}\ddot{\mathbf{d}}^2 \tag{67,8}$$

Если имеется всего один движущийся во внешнем поле заряд, то $\mathbf{d} = e\mathbf{r}$ и $\ddot{\mathbf{d}} = e\mathbf{w}$, где $\mathbf{w}$ — ускорение заряда. Таким образом, полное излучение движущегося заряда

$$I = \frac{2e^2w^2}{3c^3}. \tag{67,9}$$

Отметим, что замкнутая система, состоящая из частиц, у которых отношение зарядов к массе одинаково, не может излучать (дипольно). Действительно, для такой системы дипольный момент

$$\mathbf{d} = \sum e\mathbf{r} = \sum \frac{e}{m} m\mathbf{r} = \text{const} \sum m\mathbf{r},$$

где const есть одинаковое для всех частиц отношение заряда к массе. Но $\sum m\mathbf{r} = \mathbf{R}\sum m$, где $\mathbf{R}$ — радиус-вектор центра инерции системы (напоминаем, что все скорости $v \ll c$, так что применима нерелятивистская механика). Поэтому $\ddot{\mathbf{d}}$ пропорционально ускорению центра инерции, т. е. равно нулю, так как центр инерции движется равномерно.

Наконец, выпишем формулы для спектрального разложения интенсивности дипольного излучения. Для излучения, сопровождающего столкновение, вводим количество $d\mathscr{E}_\omega$ энергии, излученной за все время столкновения в виде волн с частотами в интервале $d\omega/2\pi$ (ср. § 66). Оно получится заменой в (67,8) вектора $\ddot{\mathbf{d}}$ его компонентой Фурье $\ddot{\mathbf{d}}_\omega$ и одновременным умножением на 2:

$$d\mathscr{E}_\omega = \frac{4}{3c^3}(\ddot{\mathbf{d}}_\omega)^2\frac{d\omega}{2\pi}.$$

По определению компоненты Фурье, имеем:

$$\ddot{\mathbf{d}}_\omega e^{-i\omega t} = \frac{d^2}{dt^2}(\mathbf{d}_\omega e^{-i\omega t}) = -\omega^2 \mathbf{d}_\omega e^{-i\omega t},$$

откуда $\ddot{\mathbf{d}}_\omega = -\omega^2 \mathbf{d}_\omega$. Таким образом, получаем:

$$d\mathscr{E}_\omega = \frac{4\omega^4}{3c^3} |\mathbf{d}_\omega|^2 \frac{d\omega}{2\pi}. \qquad (67,10)$$

При периодическом движении частиц аналогичным образом найдем интенсивность излучения с частотой $\omega = n\omega_0$ в виде

$$I_n = \frac{4\omega_0^4 n^4}{3c^3} |\mathbf{d}_n|^2. \qquad (67,11)$$

Задачи

1. Определить излучение диполя $\mathbf{d}$, вращающегося в одной плоскости с постоянной угловой скоростью Ω [1]).

Решение. Выбирая плоскость вращения в качестве плоскости xy, имеем:

$$d_x = d_0 \cos \Omega t, \quad d_y = d_0 \sin \Omega t.$$

Ввиду монохроматичности этих функций излучение тоже монохроматично с частотой $\omega = \Omega$. По формуле (67,7) найдем для углового распределения среднего (по периоду вращения) излучения:

$$\overline{dI} = \frac{d_0^2 \Omega^4}{8\pi c^3} (1 + \cos^2 \vartheta)\, do,$$

где ϑ — угол между направлением $\mathbf{n}$ излучения и осью z. Полное излучение

$$\overline{I} = \frac{2d_0^2 \Omega^4}{3c^3}.$$

Поляризация излучения определяется направлением вектора $[\ddot{\mathbf{d}}\mathbf{n}] = \omega^2 [\mathbf{n}\mathbf{d}]$. Проецируя его на направления в плоскости $\mathbf{n}z$ и перпендикулярно к ней, найдем, что излучение поляризовано по эллипсу с отношением длин полуосей, равным $n_z = \cos \vartheta$, в частности, излучение в направлении оси z поляризовано по кругу.

2. Определить угловое распределение излучения движущейся как целое (со скоростью $\mathbf{v}$) системой зарядов, если известно распределение в системе отсчета, в которой система как целое покоится.

Решение. Пусть

$$dI' = f(\cos \theta', \varphi')\, do', \qquad do' = d(\cos \theta')\, d\varphi'$$

есть интенсивность излучения в системе отсчета K', связанной с движущейся системой зарядов (θ', φ' — углы сферических координат с полярной осью

[1]) Сюда относится излучение обладающих дипольным моментом ротатора и симметрического волчка. В первом случае роль $\mathbf{d}$ играет полный дипольный момент ротатора, а во втором случае — проекция дипольного момента волчка на плоскость, перпендикулярную к оси его прецессии (т. е. направлению полного момента вращения).

вдоль направления движения системы). Излучаемая в течение времени dt в неподвижной (лабораторной) системе отсчета K энергия $d\mathscr{E}$ связана с излучением энергии $d\mathscr{E}'$ в системе K' формулой преобразования

$$d\mathscr{E}' = \frac{d\mathscr{E} - \mathbf{V}\,d\mathbf{P}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} = d\mathscr{E}\,\frac{1-\frac{V}{c}\cos\theta}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}$$

(импульс излучения, распространяющегося в заданном направлении, связан с его энергией соотношением $|d\mathbf{P}| = d\mathscr{E}/c$). Полярные углы θ, θ' направления излучения в системах K и K' связаны формулами (5,6) (азимуты $\varphi = \varphi'$). Наконец, времени dt' в системе K' соответствует время $dt = dt'/\sqrt{1-V^2/c^2}$ в системе K. В результате для интенсивности $dI = d\mathscr{E}/dt$ в системе K найдем:

$$dI = \frac{\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)^2}{\left(1-\frac{V}{c}\cos\theta\right)^3} f\left(\frac{\cos\theta - \frac{V}{c}}{1-\frac{V}{c}\cos\theta},\ \varphi\right) do.$$

Так, для диполя, движущегося в направлении своей оси, $f = \text{const}\cdot\sin^2\theta'$, и с помощью полученной формулы находим:

$$dI = \text{const}\,\frac{\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)^2 \sin^2\theta}{\left(1-\frac{V}{c}\cos\theta\right)^5}\,do.$$

§ 68. Дипольное излучение при столкновениях

В задачах об излучении при столкновениях (его называют *тормозным излучением*) редко представляет интерес излучение, сопровождающее столкновение двух частиц, движущихся по определенным траекториям. Обычно приходится рассматривать рассеяние целого пучка параллельно движущихся частиц, и задача состоит в определении полного излучения, отнесенного к единице плотности потока частиц.

Если плотность потока частиц в пучке равна единице (т. е. в единицу времени через единицу площади сечения пучка проходит одна частица), то число частиц в пучке, имеющих «прицельное расстояние» между ρ и $\rho + d\rho$, равно $2\pi\rho\,d\rho$ (площадь кольца, ограниченного окружностями радиусов ρ и $\rho + d\rho$). Поэтому искомое полное излучение получится умножением полного излучения $\Delta\mathscr{E}$ одной частицы (с заданным значением прицельного расстояния) на $2\pi\rho\,d\rho$ и интегрированием по $d\rho$ от 0 до ∞. Определенная таким образом величина имеет размерность произведения энергии на площадь. Мы будем называть ее *эффективным излучением* (по

аналогии с эффективным сечением рассеяния) и будем обозначать посредством $\varkappa$:

$$\varkappa = \int_0^\infty \Delta\mathscr{E} \cdot 2\pi\rho \, d\rho. \tag{68,1}$$

Аналогичным образом можно определить эффективное излучение в определенный элемент do телесного угла, в определенном интервале $d\omega$ частот и т. п. [1]).

Выведем общую формулу, определяющую угловое распределение излучения при рассеянии пучка частиц в центрально-симметрическом поле, предполагая излучение дипольным.

Интенсивность излучения (в каждый момент времени) отдельной частицей определяется формулой (67,7), в которой $\mathbf{d}$ есть дипольный момент частицы относительно рассеивающего центра [2]). Прежде всего усредняем это выражение по всем направлениям вектора $\ddot{\mathbf{d}}$ в плоскости поперечного сечения пучка. Поскольку $[\ddot{\mathbf{d}}\mathbf{n}]^2 = \ddot{\mathbf{d}}^2 - (\mathbf{n}\ddot{\mathbf{d}})^2$, то усреднению подлежит лишь величина $(\mathbf{n}\ddot{\mathbf{d}})^2$. В силу центральной симметрии рассеивающего поля и параллельности падающего пучка частиц рассеяние (а вместе с ним и излучение) обладает аксиальной симметрией относительно оси, проходящей через центр. Выберем эту ось в качестве оси x. Из соображений симметрии очевидно, что первые степени $\ddot{d}_y$, $\ddot{d}_z$ при усреднении дают нуль, а поскольку $\ddot{d}_x$ усреднением не затрагивается, то

$$\overline{\ddot{d}_x \ddot{d}_y} = \overline{\ddot{d}_x \ddot{d}_z} = 0.$$

Средние же значения от $\ddot{d}_y^2$ и $\ddot{d}_z^2$ равны друг другу, так что

$$\overline{\ddot{d}_y^2} = \overline{\ddot{d}_z^2} = \frac{1}{2}\left(\ddot{\mathbf{d}}^2 - \ddot{d}_x^2\right).$$

Имея все это в виду, без труда найдем:

$$\overline{[\ddot{\mathbf{d}}\mathbf{n}]^2} = \frac{1}{2}\left(\ddot{\mathbf{d}}^2 + \ddot{d}_x^2\right) + \frac{1}{2}\left(\ddot{\mathbf{d}}^2 - 3\ddot{d}_x^2\right)\cos^2\theta,$$

где θ — угол между направлением $\mathbf{n}$ излучения и осью x.

---

[1]) Если интегрируемое выражение зависит от угла, под которым расположена проекция дипольного момента частицы в плоскости поперечного сечения потока, то оно должно быть предварительно усреднено по всем направлениям в этой плоскости и лишь затем умножено на $2\pi\rho \, d\rho$ и проинтегрировано.

[2]) Фактически обычно речь идет о дипольном моменте двух частиц — рассеиваемой и рассеивающей — относительно их общего центра инерции.

Интегрируя интенсивность по времени и по всем прицельным расстояниям, получим следующее окончательное выражение, определяющее эффективное излучение в зависимости от направления:

$$d\varkappa_{\mathbf{n}} = \frac{do}{4\pi c^3}\left(A + B\frac{3\cos^2\theta - 1}{2}\right), \qquad (68,2)$$

где

$$A = \frac{2}{3}\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \ddot{\mathbf{d}}^2\, dt\, 2\pi\rho\, d\rho, \quad B = \frac{1}{3}\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \left(\ddot{\mathbf{d}}^2 - 3\ddot{d}_x^2\right) dt\, 2\pi\rho\, d\rho. \qquad (68,3)$$

Второй член в (68,2) написан в таком виде, чтобы давать нуль при усреднении по всем направлениям, так что полное эффективное излучение $\varkappa = A/c^3$. Обратим внимание на то, что угловое распределение излучения симметрично относительно плоскости, проходящей через рассеивающий центр перпендикулярно к пучку — выражение (68,2) не меняется при замене θ на $\pi - \theta$. Это свойство специфично для дипольного излучения и теряется при переходе к более высоким приближениям по v/c.

Интенсивность тормозного излучения можно разделить на две части: интенсивность излучения, поляризованного в плоскости испускания, проходящей через ось x и направление $\mathbf{n}$ (назовем ее плоскостью xy), и интенсивность излучения, поляризованного в перпендикулярной плоскости xz.

Вектор электрического поля имеет направление вектора

$$[\mathbf{n}\,[\mathbf{n}\ddot{\mathbf{d}}]] = \mathbf{n}\,(\mathbf{n}\ddot{\mathbf{d}}) - \ddot{\mathbf{d}}$$

[см. (67,6)]. Компонента этого вектора в направлении, перпендикулярном к плоскости xy, есть $-\ddot{d}_z$, а проекция на плоскость xy равна $|\sin\theta\cdot\ddot{d}_x - \cos\theta\cdot\ddot{d}_y|$ (последнюю удобнее определить по равной ей z-компоненте магнитного поля, имеющего направление $[\ddot{\mathbf{d}}\mathbf{n}]$).

Возводя $\mathbf{E}$ в квадрат и усредняя по всем направлениям вектора $\ddot{\mathbf{d}}$ в плоскости yz, мы прежде всего видим, что произведение проекций поля на плоскость xy и перпендикулярно к ней обращается в нуль. Это значит, что интенсивность действительно может быть представлена в виде суммы двух независимых частей: интенсивностей излучения, поляризованного в двух взаимно перпендикулярных плоскостях.

Интенсивность излучения с электрическим вектором, перпендикулярным к плоскости xy определяется средним квадратом от $\ddot{d}_z^2 = \frac{1}{2}\left(\ddot{\mathbf{d}}^2 - \ddot{d}_x^2\right)$. Для соответствующей части эффективного

излучения получим выражение

$$d\varkappa_{\mathbf{n}}^{\perp}=\frac{do}{4\pi c^3}\frac{1}{2}\int\limits_0^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}(\ddot{\mathbf{d}}^2-\ddot{d}_x^2)\,dt\,2\pi\rho\,d\rho. \qquad (68,4)$$

Отметим, что эта часть излучения оказывается изотропной по направлениям. Выписывать выражение для эффективного излучения с направлением электрического поля в плоскости xy нет необходимости, так как очевидно, что

$$d\varkappa_{\mathbf{n}}^{\perp}+d\varkappa_{\mathbf{n}}^{\parallel}=d\varkappa_{\mathbf{n}}.$$

Аналогичным образом можно получить выражение для углового распределения эффективного излучения в определенном интервале частот:

$$d\varkappa_{\mathbf{n}\omega}=\frac{do}{2\pi c^3}\left[A(\omega)+B(\omega)\frac{3\cos^2\theta-1}{2}\right]\frac{d\omega}{2\pi}, \qquad (68,5)$$

где

$$A(\omega)=\frac{2\omega^4}{3}\int\limits_0^{\infty}\mathbf{d}_\omega^2\,2\pi\rho\,d\rho,\quad B(\omega)=\frac{\omega^4}{3}\int\limits_0^{\infty}(\mathbf{d}_\omega^2-3d_{x\omega}^2)\,2\pi\rho\,d\rho. \qquad (68,6)$$

§ 69. Тормозное излучение малых частот

В спектральном распределении тормозного излучения основная доля интенсивности приходится на частоты $\omega\sim 1/\tau$, где τ — порядок величины продолжительности столкновения. Мы, однако, рассмотрим здесь не эту область спектра (для которой нельзя получить никаких общих формул), а «хвост» распределения при малых частотах, удовлетворяющих условию

$$\omega\tau\ll 1. \qquad (69,1)$$

При этом мы не будем предполагать скорости сталкивающихся частиц малыми по сравнению со скоростью света, как это делалось в предыдущем параграфе; следующие ниже формулы справедливы при произвольных скоростях.

В интеграле

$$\mathbf{H}_\omega=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\mathbf{H}\,e^{i\omega t}\,dt$$

поле излучения $\mathbf{H}$ заметно отлично от нуля только в течение промежутка времени порядка τ. Поэтому при соблюдении условия (69,1) мы можем считать, что под интегралом $\omega t\ll 1$, так что

можно заменить $e^{i\omega t}$ единицей; тогда

$$\mathbf{H}_\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{H}\, dt.$$

Подставляя сюда $\mathbf{H} = [\dot{\mathbf{A}}\mathbf{n}]/c$ и производя интегрирование по времени, получим:

$$\mathbf{H}_\omega = \frac{1}{c}\, [(\mathbf{A}_2 - \mathbf{A}_1)\, \mathbf{n}], \tag{69,2}$$

где $\mathbf{A}_2 - \mathbf{A}_1$ — изменение векторного потенциала поля, создаваемого сталкивающимися частицами, за время столкновения.

Полное излучение (с частотой ω) за время столкновения получится подстановкой (69,2) в (66,9):

$$d\mathscr{E}_{\mathbf{n}\omega} = \frac{R_0^2}{4c\pi^3}\, [(\mathbf{A}_2 - \mathbf{A}_1)\, \mathbf{n}]^2\, do\, d\omega. \tag{69,3}$$

Для векторного потенциала можно воспользоваться его выражением в форме Лиенара — Вихерта (66,4), и мы получим:

$$d\mathscr{E}_{\mathbf{n}\omega} = \frac{1}{4\pi^2 c^3} \left\{ \sum e \left(\frac{[\mathbf{v}_2\mathbf{n}]}{1 - \frac{1}{c}\,\mathbf{n}\mathbf{v}_2} - \frac{[\mathbf{v}_1\mathbf{n}]}{1 - \frac{1}{c}\,\mathbf{n}\mathbf{v}_1} \right) \right\}^2 do\, d\omega, \tag{69,4}$$

где $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$ — скорости частицы до и после рассеяния, а сумма берется по обеим сталкивающимся частицам. Обратим внимание на то, что коэффициент при $d\omega$ оказывается не зависящим от частоты. Другими словами, при малых частотах [условие (69,1)] спектральное распределение излучения не зависит от частоты, т. е. $d\mathscr{E}_{\mathbf{n}\omega}/d\omega$ стремится к постоянному пределу при $\omega \to 0$ [1]).

Если скорости сталкивающихся частиц малы по сравнению со скоростью света, то (69,4) переходит в

$$d\mathscr{E}_{\mathbf{n}\omega} = \frac{1}{4\pi^2 c^3} \left(\sum e\, [\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1,\ \mathbf{n}] \right)^2 do\, d\omega. \tag{69,5}$$

Это выражение соответствует дипольному излучению, векторный потенциал которого дается формулой (67,4).

---

[1]) Интегрируя по прицельным расстояниям, можно получить аналогичный результат для эффективного излучения при рассеянии пучка частиц. Надо, однако, иметь в виду, что этот результат несправедлив для эффективного излучения при кулоновом взаимодействии сталкивающихся частиц в связи с тем, что интеграл по $d\rho$ оказывается расходящимся (логарифмически) при больших ρ. Мы увидим в следующем параграфе, что в этом случае эффективное излучение при малых частотах зависит логарифмически от частоты, а не остается постоянным.

Интересный случай применения полученных формул представляет излучение, возникающее при испускании новой заряженной частицы (например, при вылете β-частицы из ядра). При этом процесс надо рассматривать как мгновенное изменение скорости частицы — от нуля до ее заданного значения [ввиду симметрии формулы (69,5) по отношению к перестановке $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$ возникающее в этом процессе излучение совпадает с излучением, которое сопровождало бы обратный процесс — мгновенную остановку частицы]. Существенно, что поскольку «время» данного процесса $\tau \to 0$, то условию (69,1) фактически удовлетворяют все вообще частоты [1]).

Задача

Определить спектральное распределение полного излучения, возникающего при испускании заряженной частицы, движущейся со скоростью v.

Решение. Согласно формуле (69,4) (в которой полагаем $\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}$, $\mathbf{v}_1 = 0$), имеем:

$$d\mathscr{E}_\omega = d\omega \frac{e^2 v^2}{4\pi^2 c^3} \int_0^\pi \frac{\sin^2\theta}{\left(1 - \frac{v}{c}\cos\theta\right)^2} 2\pi \sin\theta \, d\theta.$$

Вычисление интеграла приводит к результату [2]):

$$d\mathscr{E}_\omega = \frac{e^2}{\pi c}\left(\frac{c}{v}\ln\frac{c+v}{c-v} - 2\right) d\omega. \tag{1}$$

При $v \ll c$ эта формула переходит в

$$d\mathscr{E}_\omega = \frac{2e^2 v^2}{3\pi c^3}\, d\omega,$$

что можно получить и непосредственно из (69,5).

§ 70. Излучение при кулоновом взаимодействии

В этом параграфе мы выведем для справочных целей ряд формул, относящихся к дипольному излучению системы из двух заряженных частиц; предполагается, что скорости частиц малы по сравнению со скоростью света.

Равномерное движение системы как целого (т. е. движение ее центра инерции) не представляет интереса, так как не приводит к

---

[1]) Применимость формул, однако, ограничена квантовым условием малости $\hbar\omega$ по сравнению с полной кинетической энергией частицы.

[2]) Хотя условие (69,1) ввиду «мгновенности» процесса выполняется, как уже было указано, для всех частот, но получить полное излучение энергии путем интегрирования выражения (1) по $d\omega$ нельзя, — интеграл расходится при больших частотах. Помимо нарушения условия классичности при больших частотах, в данном случае причина расходимости лежит и в некорректности самой постановки классической задачи, в которой частица имеет в начальный момент бесконечное ускорение.

излучению; поэтому мы должны рассматривать только относительное движение частиц. Выберем начало координат в центре инерции. Тогда дипольный момент системы $\mathbf{d}=e_1\mathbf{r}_1+e_2\mathbf{r}_2$ напишется в виде

$$\mathbf{d}=\frac{e_1m_2-e_2m_1}{m_1+m_2}\mathbf{r}=\mu\left(\frac{e_1}{m_1}-\frac{e_2}{m_2}\right)\mathbf{r}, \qquad (70,1)$$

где индексы 1 и 2 относятся к обеим частицам, $\mathbf{r}=\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2$ есть радиус-вектор между ними, а $\mu=\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}$ — приведенная масса.

Начнем с излучения, сопровождающего эллиптическое движение двух притягивающихся по закону Кулона частиц. Как известно из механики (см. I § 15), это движение может быть описано как движение частицы с массой μ по эллипсу, уравнение которого в полярных координатах имеет вид

$$1+\varepsilon\cos\varphi=\frac{a(1-\varepsilon^2)}{r}, \qquad (70,2)$$

где большая полуось a и эксцентриситет ε равны

$$a=\frac{\alpha}{2|\mathscr{E}|}, \qquad \varepsilon=\sqrt{1-\frac{2|\mathscr{E}|M^2}{\mu\alpha^2}}. \qquad (70,3)$$

Здесь $\mathscr{E}$ есть полная энергия частиц (без энергии покоя!), отрицательная при финитном движении; $M=\mu r^2\dot{\varphi}$ — момент количества движения; α — постоянная закона Кулона:

$$\alpha=|e_1e_2|.$$

Зависимость координат от времени может быть записана в виде параметрических уравнений

$$r=a(1-\varepsilon\cos\xi), \quad t=\sqrt{\frac{\mu a^3}{\alpha}}(\xi-\varepsilon\sin\xi). \qquad (70,4)$$

Одному полному обороту по эллипсу соответствует изменение параметра ξ от нуля до 2π; период движения равен

$$T=2\pi\sqrt{\frac{\mu a^3}{\alpha}}.$$

Определим компоненты Фурье дипольного момента. Ввиду периодичности движения речь идет о разложении в ряд Фурье. Поскольку дипольный момент пропорционален радиус-вектору $\mathbf{r}$, то задача сводится к вычислению компонент Фурье от координат $x=r\cos\varphi$ и $y=r\sin\varphi$. Зависимость x и y от времени определяется параметрическими уравнениями:

$$x=a(\cos\xi-\varepsilon), \quad y=a\sqrt{1-\varepsilon^2}\sin\xi, \quad \omega_0t=\xi-\varepsilon\sin\xi. \qquad (70,5)$$

Здесь введена частота

$$\omega_0=\frac{2\pi}{T}=\sqrt{\frac{\alpha}{\mu a^3}}=\frac{(2|\mathscr{E}|)^{3/2}}{\alpha\mu^{1/2}}.$$

Вместо компонент Фурье от координат удобнее вычислять компоненты Фурье от скоростей, воспользовавшись тем, что $\dot{x}_n = -i\omega_0 n x_n$, $\dot{y}_n = -i\omega_0 n y_n$. Имеем:

$$x_n = \frac{\dot{x}_n}{-i\omega_0 n} = \frac{i}{\omega_0 n T}\int_0^T e^{i\omega_0 n t}\dot{x}\,dt.$$

Но $\dot{x}\,dt = dx = -a\sin\xi\,d\xi$; переходя от интегрирования по dt к интегрированию по $d\xi$, имеем, таким образом:

$$x_n = -\frac{ia}{2\pi n}\int_0^{2\pi} e^{in(\xi-\varepsilon\sin\xi)}\sin\xi\,d\xi.$$

Аналогичным образом находим:

$$y_n = \frac{ia\sqrt{1-\varepsilon^2}}{2\pi n}\int_0^{2\pi} e^{in(\xi-\varepsilon\sin\xi)}\cos\xi\,d\xi = \frac{ia\sqrt{1-\varepsilon^2}}{2\pi n\varepsilon}\int_0^{2\pi} e^{in(\xi-\varepsilon\sin\xi)}\,d\xi$$

(при переходе от первого интеграла ко второму в подынтегральном выражении пишем $\cos\xi \equiv \left(\cos\xi - \frac{1}{\varepsilon}\right) + \frac{1}{\varepsilon}$; тогда интеграл от первого члена берется и притом тождественно обращается в нуль). Наконец, воспользуемся известной формулой теории функций Бесселя

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(n\xi - x\sin\xi)}\,d\xi = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(n\xi - x\sin\xi)\,d\xi = J_n(x), \qquad (70{,}6)$$

где $J_n(x)$ — функция Бесселя целочисленного порядка n. В результате окончательно получаем следующие выражения для искомых компонент Фурье:

$$x_n = \frac{a}{n}J'_n(n\varepsilon),\; y_n = \frac{ia\sqrt{1-\varepsilon^2}}{n\varepsilon}J_n(n\varepsilon) \qquad (70{,}7)$$

(штрих у функции Бесселя обозначает дифференцирование по ее аргументу).

Выражение для интенсивности монохроматических компонент излучения получается подстановкой x_ω и y_ω в формулу

$$I_n = \frac{4\omega_0^4 n^4}{3c^3}\mu^2\left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2}\right)^2 (|x_\omega|^2 + |y_\omega|^2)$$

[см. (67,11)]. Выразив при этом a и ω_0 через характеристики частиц, получим окончательно:

$$I_n = \frac{64 n^2 \mathscr{E}^4}{3c^3\alpha^2}\left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2}\right)^2\left[J'^2_n(n\varepsilon) + \frac{1-\varepsilon^2}{\varepsilon^2}J^2_n(n\varepsilon)\right]. \qquad (70{,}8)$$

Выпишем, в частности, асимптотическую формулу для интенсивности очень высоких гармоник (большие n) при движении по близкой к параболе орбите (ε близко к 1). Для этого используем асимптотическую формулу

$$J_n(n\varepsilon) \approx \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{2}{n}\right)^{1/3} \Phi\left[\left(\frac{n}{2}\right)^{2/3}(1-\varepsilon^2)\right], \qquad (70,9)$$

$$n \gg 1, \quad 1-\varepsilon \ll 1$$

где Φ — функция Эйри (определенная в примечании на стр. 198)[1]). Подстановка в (70,8) дает:

$$I_n = \frac{64 \cdot 2^{2/3}}{3\pi} \frac{n^{4/3}\mathscr{E}^4}{c^3\alpha^2}\left(\frac{e_1}{m_1}-\frac{e_2}{m_2}\right)^2 \left\{(1-\varepsilon^2)\Phi^2\left[\left(\frac{n}{2}\right)^{2/3}(1-\varepsilon^2)\right] + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{2}{n}\right)^{2/3} \Phi'^2\left[\left(\frac{n}{2}\right)^{2/3}(1-\varepsilon^2)\right]\right\}. \qquad (70,10)$$

Этот результат может быть выражен также и через функции Макдональда K_ν:

$$I_n = \frac{64}{9\pi^2}\frac{n^2\mathscr{E}^4}{c^3\alpha^2}\left(\frac{e_1}{m_1}-\frac{e_2}{m_2}\right)^2\left\{K^2_{1/3}\left[\frac{n}{3}(1-\varepsilon^2)^{3/2}\right] + K^2_{2/3}\left[\frac{n}{3}(1-\varepsilon^2)^{3/2}\right]\right\}$$

(нужные для этого формулы приведены в примечании на стр. 261).

Рассмотрим далее столкновение двух притягивающихся заряженных частиц. Их относительное движение описывается как движение частицы с массой μ по гиперболе

$$1 + \varepsilon\cos\varphi = \frac{a(\varepsilon^2-1)}{r}, \qquad (70,11)$$

где

$$a = \frac{\alpha}{2\mathscr{E}}, \qquad \varepsilon = \sqrt{1+\frac{2\mathscr{E}M^2}{\mu\alpha^2}} \qquad (70,12)$$

---

[1]) При $n \gg 1$ в интеграле

$$J_n(n\varepsilon) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos[n(\xi - \varepsilon\sin\xi)]\,d\xi$$

основную роль играют малые ξ (при не малых ξ подынтегральное выражение быстро осциллирует). Соответственно этому разлагаем аргумент косинуса по степеням ξ:

$$J_n(n\varepsilon) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \cos\left[n\left(\frac{1-\varepsilon^2}{2}\xi + \frac{\xi^3}{6}\right)\right]d\xi;$$

учитывая быструю сходимость интеграла, верхний предел заменен на ∞; член с ξ^3 должен быть сохранен ввиду наличия в члене первого порядка малого коэффициента $1-\varepsilon \approx (1-\varepsilon^2)/2$. Полученный интеграл очевидной подстановкой приводится к виду (70,9).

(теперь $\mathscr{E} > 0$). Зависимость r от времени определяется параметрическими уравнениями

$$r = a(\varepsilon \operatorname{ch}\xi - 1), \qquad t = \sqrt{\frac{\mu a^3}{\alpha}}(\varepsilon \operatorname{sh}\xi - \xi), \tag{70,13}$$

где параметр ξ пробегает значения от $-\infty$ до $+\infty$. Для координат x, y имеем:

$$x = a(\varepsilon - \operatorname{ch}\xi), \qquad y = a\sqrt{\varepsilon^2 - 1}\operatorname{sh}\xi. \tag{70,14}$$

Вычисление компонент Фурье (речь идет теперь о разложении в интеграл Фурье) производится в точности аналогично предыдущему случаю. В результате получаем:

$$x_\omega = \frac{\pi a}{\omega} H_{i\nu}^{(1)\prime}(i\nu\varepsilon), \qquad y_\omega = -\frac{\pi a\sqrt{\varepsilon^2-1}}{\omega\varepsilon} H_{i\nu}^{(1)}(i\nu\varepsilon), \tag{70,15}$$

где $H_{i\nu}^{(1)}$ — функция Ганкеля 1-го рода ранга $i\nu$ и введено обозначение

$$\nu = \frac{\omega}{\sqrt{\alpha/\mu a^3}} = \frac{\omega}{\mu v_0^3} \tag{70,16}$$

(v_0 — относительная скорость частиц на бесконечности; энергия $\mathscr{E} = \mu v_0^2/2$)[1]). При вычислении использована известная формула

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{p\xi - ix\operatorname{sh}\xi} d\xi = i\pi H_p^{(1)}(ix). \tag{70,17}$$

Подставляя (70,15) в формулу

$$d\mathscr{E}_\omega = \frac{4\omega^4\mu^2}{3c^3}\left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2}\right)^2 (|x_\omega|^2 + |y_\omega|^2)\frac{d\omega}{2\pi}$$

[см. (67,10)], получим:

$$d\mathscr{E}_\omega = \frac{\pi\mu^2\alpha^2\omega^2}{6c^3\mathscr{E}^2}\left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2}\right)^2 \left\{\left[H_{i\nu}^{(1)\prime}(i\nu\varepsilon)\right]^2 - \frac{\varepsilon^2-1}{\varepsilon^2}\left[H_{i\nu}^{(1)}(i\nu\varepsilon)\right]^2\right\} d\omega. \tag{70,18}$$

Больший интерес представляет «эффективное излучение» при рассеянии пучка параллельно движущихся частиц (см. § 68). Для его вычисления умножаем $d\mathscr{E}_\omega$ на $2\pi\rho d\rho$ и интегрируем по всем ρ от нуля до бесконечности. Интегрирование по $d\rho$ заменяем интегрированием по $d\varepsilon$ (в пределах от 1 до ∞), воспользовавшись тем, что $2\pi\rho\, d\rho = 2\pi a^2 \varepsilon\, d\varepsilon$; это соотношение получается из определений (70,12), в которых момент M и энергия $\mathscr{E}$ связаны с прицельным

[1]) Напомним, что функция $H_{i\nu}^{(1)}(i\nu\varepsilon)$ чисто мнима, а ее производная $H_{i\nu}^{(1)\prime}(i\nu\varepsilon)$ вещественна.

расстоянием ρ и скоростью v_0 посредством

$$M=\mu\rho v_0, \qquad \mathscr{E}=\frac{\mu v_0^2}{2}.$$

Получающийся интеграл берется с помощью формулы

$$z\left[Z_p'^2+\left(\frac{p^2}{z^2}-1\right)Z_p^2\right]=\frac{d}{dz}(zZ_pZ_p'),$$

где $Z_p(z)$ — любое решение уравнения Бесселя порядка p [1]). Имея в виду, что при $\varepsilon\to\infty$ функция Ганкеля $H_{i\nu}^{(1)}(i\nu\varepsilon)$ обращается в нуль, получим в результате следующую формулу:

$$d\varkappa_\omega=\frac{4\pi^2\alpha^3\omega}{3c^3\mu v_0^5}\left(\frac{e_1}{m_1}-\frac{e_2}{m_2}\right)^2\left|H_{i\nu}^{(1)}(i\nu)\right|H_{i\nu}^{(1)'}(i\nu)\,d\omega. \qquad (70,19)$$

Рассмотрим особо предельные случаи малых и больших частот. В интеграле

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\nu(\xi-\operatorname{sh}\xi)}\,d\xi=i\pi H_{i\nu}(i\nu), \qquad (70,20)$$

определяющем функцию Ганкеля, существенна только та область значений переменной интегрирования ξ, в которой экспонента имеет порядок величины единицы. При малых частотах ($\nu\ll 1$) существенна поэтому область больших ξ. Но при больших ξ имеем $\operatorname{sh}\xi\gg\xi$. Таким образом, приближенно

$$H_{i\nu}^{(1)}(i\nu)\approx-\frac{i}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\nu\operatorname{sh}\xi}d\xi=H_0^{(1)}(i\nu).$$

Аналогичным образом найдем, что

$$H_{i\nu}^{(1)'}(i\nu)\approx H_0^{(1)'}(i\nu).$$

Воспользовавшись, наконец, известным из теории функций Бесселя приближенным выражением (при малых x)

$$iH_0^{(1)}(ix)\approx\frac{2}{\pi}\ln\frac{2}{\gamma x}$$

($\gamma=e^C$, где C — постоянная Эйлера; $\gamma=1{,}781\ldots$), получим следующее выражение для эффективного излучения при малых частотах:

$$d\varkappa_\omega=\frac{16\alpha^2}{3v_0^2c^3}\left(\frac{e_1}{m_1}-\frac{e_2}{m_2}\right)^2\ln\left(\frac{2\mu v_0^3}{\gamma\omega\alpha}\right)d\omega \quad \text{при } \omega\ll\frac{\mu v_0^3}{\alpha}. \qquad (70,21)$$

Оно зависит от частоты логарифмически.

[1]) Эта формула является непосредственным следствием уравнения Бесселя

$$Z''+\frac{1}{z}Z'+\left(1-\frac{p^2}{z^2}\right)Z=0.$$

При больших частотах ($\nu \gg 1$) в интеграле (70,20) существенны, напротив, малые ξ. Соответственно этому разлагаем экспоненту подынтегрального выражения по степеням ξ и имеем приближенно:

$$H^{(1)}_{i\nu}(i\nu) \approx -\frac{i}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{i\nu}{6}\xi^3\right) d\xi = -\frac{2i}{\pi}\,\mathrm{Re}\left\{\int\limits_{0}^{\infty} \exp\left(-\frac{i\nu}{6}\xi^3\right) d\xi\right\}.$$

Этот интеграл подстановкой $i\nu\xi^3/6 = \eta$ приводится к Γ-функции, и в результате получается

$$H^{(1)}_{i\nu}(i\nu) \approx -\frac{i}{\pi\sqrt{3}}\left(\frac{6}{\nu}\right)^{1/3}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right).$$

Аналогичным образом найдем:

$$H^{(1)\prime}_{i\nu}(i\nu) \approx \frac{1}{\pi\sqrt{3}}\left(\frac{6}{\nu}\right)^{2/3}\Gamma\left(\frac{2}{3}\right).$$

Наконец, воспользовавшись известной формулой теории Γ-функций

$$\Gamma(x)\,\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x},$$

получим для эффективного излучения при больших частотах:

$$d\varkappa_\omega = \frac{16\pi\alpha^2}{3^{3/2} v_0^2 c^3}\left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2}\right)^2 d\omega \text{ при } \omega \gg \frac{\mu v_0^3}{\alpha}, \qquad (70,22)$$

т. е. выражение, не зависящее от частоты.

Перейдем теперь к тормозному излучению при столкновении двух отталкивающихся по закону $U = \alpha/r$ ($\alpha > 0$) частиц. Движение происходит по гиперболе

$$-1 + \varepsilon\cos\varphi = \frac{a(\varepsilon^2 - 1)}{r}; \qquad (70,23)$$

$$x = a(\varepsilon + \operatorname{ch}\xi),\quad y = a\sqrt{\varepsilon^2 - 1}\operatorname{sh}\xi,\quad t = \sqrt{\frac{\mu a^3}{\alpha}}(\varepsilon \operatorname{sh}\xi + \xi) \qquad (70,24)$$

[a и ε — из (70,12)]. Все вычисления для этого случая непосредственно приводятся к произведенным выше, так что нет необходимости производить их заново. Действительно, интеграл

$$x_\omega = \frac{ia}{\omega}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\nu(\varepsilon\operatorname{sh}\xi + \xi)}\operatorname{sh}\xi\, d\xi$$

для компоненты Фурье координаты x подстановкой $\xi \to i\pi - \xi$ приводится к такому же интегралу для случая притяжения, умноженному на $e^{-\pi\nu}$; то же самое имеет место для y_ω.

Таким образом, выражения для компонент Фурье x_ω, y_ω в случае отталкивания отличаются от соответствующих выражений для случая притяжения множителями $e^{-\pi\nu}$. В формулах же для излучения появятся, следовательно, лишние множители $e^{-2\pi\nu}$. В частности, для малых частот получается прежняя формула (70,21) (так как при $\nu \ll 1: e^{-2\pi\nu} \approx 1$). Для больших частот эффективное излучение имеет вид

$$d\varkappa_\omega = \frac{16\pi\alpha^2}{3^{3/2}v_0^2c^3}\left(\frac{e_1}{m_1}-\frac{e_2}{m_2}\right)^2 \exp\left(-\frac{2\pi\omega\alpha}{\mu v_0^3}\right) \text{ при } \omega \gg \frac{\mu v_0^3}{\alpha}. \quad (70,25)$$

Оно убывает экспоненциально с увеличением частоты.

Задачи

1. Определить полную среднюю интенсивность излучения при эллиптическом движении двух притягивающихся зарядов.

Решение. С выражением (70,1) для дипольного момента имеем для полной интенсивности излучения:

$$I = \frac{2\mu^2}{3c^3}\left(\frac{e_1}{m_1}-\frac{e_2}{m_2}\right)^2 \ddot{\mathbf{r}}^2 = \frac{2\alpha^2}{3c^3}\left(\frac{e_1}{m_1}-\frac{e_2}{m_2}\right)^2 \frac{1}{r^4},$$

причем мы воспользовались уравнением движения $\mu\ddot{\mathbf{r}} = -\alpha\mathbf{r}/r^3$. Координату r выражаем через φ согласно уравнению орбиты (70,2), а интегрирование по времени с помощью равенства $dt = \mu r^2 d\varphi/M$ заменяем интегрированием по углу φ (от 0 до 2π). В результате находим для средней интенсивности:

$$\overline{I} = \frac{1}{T}\int_0^T I\,dt = \frac{2^{3/2}}{3c^3}\left(\frac{e_1}{m_1}-\frac{e_2}{m_2}\right)^2 \frac{\mu^{5/2}\alpha^3|\mathscr{E}|^{3/2}}{M^5}\left(3-\frac{2|\mathscr{E}|M^2}{\mu\alpha^2}\right).$$

2. Определить полное излучение $\Delta\mathscr{E}$ при столкновении двух заряженных частиц.

Решение. В случае притяжения траекторией является гипербола (70,11), а в случае отталкивания — (70,23). Асимптоты гиперболы образуют с ее осью угол φ_0, определяемый из $\pm\cos\varphi_0 = 1/\varepsilon$, а угол отклонения частиц (в системе координат, в которой центр инерции покоится) есть $\chi = |\pi - 2\varphi_0|$. Вычисление производится так же, как в задаче 1 (интеграл по $d\varphi$ берется в пределах между $-\varphi_0$ и φ_0). В результате находим в случае притяжения:

$$\Delta\mathscr{E} = \frac{\mu^3v_0^5}{3c^3\alpha}\operatorname{tg}^3\frac{\chi}{2}\left[(\pi+\chi)\left(1+3\operatorname{tg}^2\frac{\chi}{2}\right)+6\operatorname{tg}\frac{\chi}{2}\right]\left(\frac{e_1}{m_1}-\frac{e_2}{m_2}\right)^2,$$

в случае отталкивания:

$$\Delta\mathscr{E} = \frac{\mu^3v_0^5}{3c^3\alpha}\operatorname{tg}^3\frac{\chi}{2}\left[(\pi-\chi)\left(1+3\operatorname{tg}^2\frac{\chi}{2}\right)-6\operatorname{tg}\frac{\chi}{2}\right]\left(\frac{e_1}{m_1}-\frac{e_2}{m_2}\right)^2.$$

В обоих случаях под χ понимается положительный угол, определяемый из соотношения

$$\operatorname{ctg}\frac{\chi}{2} = \frac{\mu v_0^2\rho}{\alpha}.$$

При лобовом столкновении отталкивающихся зарядов переход к пределу $\rho\to 0$, $\chi\to\pi$ дает:

$$\Delta\mathscr{E}=\frac{8\mu^3 v_0^5}{45c^3\alpha}\left(\frac{e_1}{m_1}-\frac{e_2}{m_2}\right)^2.$$

3. Определить полное эффективное излучение при рассеянии потока частиц в кулоновом поле отталкивания.

Решение. Искомая величина есть

$$\varkappa=\int_0^\infty\int_{-\infty}^\infty I\,dt\cdot 2\pi\rho\,d\rho=\frac{2\alpha^2}{3c^3}\left(\frac{e_1}{m_1}-\frac{e_2}{m_2}\right)^2 2\pi\int_0^\infty\int_{-\infty}^\infty\frac{1}{r^4}dt\cdot\rho\,d\rho.$$

Интегрирование по времени заменяем интегрированием по dr вдоль траектории заряда, написав $dt=dr/v_r$, где радиальная скорость $v_r=\dot r$ выражается через r по формуле

$$v_r=\sqrt{\frac{2}{\mu}\left[\mathscr{E}-\frac{M^2}{2\mu r^2}-U(r)\right]}=\sqrt{v_0^2-\frac{\rho^2 v_0^2}{r^2}-\frac{2\alpha}{\mu r}}.$$

Интегрирование по dr производится в пределах от бесконечности до ближайшего к центру расстояния $r_0=r_0(\rho)$ (точка, в которой $v_r=0$), и затем от r_0 снова к бесконечности; это сводится к удвоенному интегралу от r_0 до ∞. Вычисление двойного интеграла удобно производить, переменив порядок интегрирования — сначала по $d\rho$, а затем по dr. В результате получим:

$$\varkappa=\frac{8\pi}{9}\frac{\alpha\mu v_0}{c^3}\left(\frac{e_1}{m_1}-\frac{e_2}{m_2}\right)^2.$$

4. Определить угловое распределение полного излучения при пролетании одного заряда мимо другого, если скорость настолько велика (хотя и мала по сравнению со скоростью света), что отклонение от прямолинейности движения можно считать малым.

Решение. Угол отклонения мал, если кинетическая энергия $\mu v^2/2$ велика по сравнению с потенциальной энергией, порядок величины которой есть α/ρ ($\mu v^2\gg\alpha/\rho$). Выберем плоскость движения в качестве плоскости xy с началом координат в центре инерции и с осью x вдоль направления скорости. В первом приближении траектория есть прямая $x=vt$, $y=\rho$. В следующем приближении уравнения движения дают:

$$\mu\ddot x=\frac{\alpha}{r^2}\frac{x}{r}\approx\frac{\alpha vt}{r^3},\qquad \mu\ddot y=\frac{\alpha}{r^2}\frac{y}{r}\approx\frac{\alpha\rho}{r^3},$$

причем

$$r=\sqrt{x^2+y^2}\approx\sqrt{\rho^2+v^2t^2}.$$

С помощью формулы (67,7) имеем:

$$d\mathscr{E}_{\mathbf n}=do\,\frac{\mu^2}{4\pi c^3}\left(\frac{e_1}{m_1}-\frac{e_2}{m_2}\right)^2\int_{-\infty}^\infty\left[\ddot x^2+\ddot y^2-(\ddot x n_x+\ddot y n_y)^2\right]dt,$$

где $\mathbf n$ — единичный вектор в направлении do. Выражая подынтегральное выражение через t и производя интегрирование, получим:

$$d\mathscr{E}_{\mathbf n}=\frac{\alpha^2}{32vc^3\rho^3}\left(\frac{e_1}{m_1}-\frac{e_2}{m_2}\right)^2\left(4-n_x^2-3n_y^2\right)do.$$

§ 71. Квадрупольное и магнитно-дипольное излучения

Рассмотрим теперь излучение, обусловленное следующими членами разложения векторного потенциала по степеням отношения a/λ размеров системы к длине волны, по-прежнему предполагающегося малым. Хотя эти члены, вообще говоря, малы по сравнению с первым (дипольным), они существенны в тех случаях, когда дипольный момент системы равен нулю, так что дипольное излучение вообще отсутствует.

Разлагая в (66,2)

$$\mathbf{A}=\frac{1}{cR_0}\int \mathbf{j}_{t'+\mathbf{rn}/c}dV$$

подынтегральное выражение по степеням $\mathbf{rn}/c$ и сохраняя теперь два первых члена, находим:

$$\mathbf{A}=\frac{1}{cR_0}\int \mathbf{j}_{t'}dV+\frac{1}{c^2R_0}\frac{\partial}{\partial t'}\int (\mathbf{rn})\,\mathbf{j}_{t'}\,dV.$$

Подставляя сюда $\mathbf{j}=\rho\mathbf{v}$ и переходя к точечным зарядам, получим:

$$\mathbf{A}=\frac{1}{cR_0}\sum e\mathbf{v}+\frac{1}{c^2R_0}\frac{\partial}{\partial t}\sum e\mathbf{v}\,(\mathbf{rn}). \qquad (71,1)$$

Здесь и ниже (как и в § 67) мы для краткости опускаем индекс t' у всех величин в правой стороне равенства.

Во втором слагаемом пишем:

$$\mathbf{v}\,(\mathbf{rn})=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\,\mathbf{r}\,(\mathbf{nr})+\frac{1}{2}\,\mathbf{v}(\mathbf{nr})-\frac{1}{2}\,\mathbf{r}(\mathbf{nv})=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\,\mathbf{r}\,(\mathbf{nr})+\frac{1}{2}\,[[\mathbf{rv}]\,\mathbf{n}].$$

Мы находим тогда для $\mathbf{A}$ выражение

$$\mathbf{A}=\frac{\dot{\mathbf{d}}}{cR_0}+\frac{1}{2c^2R_0}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\sum e\mathbf{r}\,(\mathbf{nr})+\frac{1}{cR_0}\,[\dot{\mathfrak{m}}\mathbf{n}], \qquad (71,2)$$

где $\mathbf{d}$ — дипольный момент системы, а $\mathfrak{m}=\frac{1}{2c}\sum e\,[\mathbf{rv}]$ — ее магнитный момент. Для дальнейшего преобразования заметим, что к $\mathbf{A}$ можно прибавить, не изменяя поля, любой вектор, пропорциональный $\mathbf{n}$, — в силу формул (66,3) $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ при этом не изменятся. Поэтому вместо (71,2) с тем же правом можно написать:

$$\mathbf{A}=\frac{\dot{\mathbf{d}}}{cR_0}+\frac{1}{6c^2R_0}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\sum e\,[3\mathbf{r}\,(\mathbf{nr})-\mathbf{n}r^2]+\frac{1}{cR_0}\,[\dot{\mathfrak{m}}\mathbf{n}].$$

Но стоящее под знаком $\partial^2/\partial t^2$ выражение есть произведение, $n_\beta D_{\alpha\beta}$, вектора $\mathbf{n}$ на тензор квадрупольного момента $D_{\alpha\beta}=\sum e\,(3x_\alpha x_\beta-\delta_{\alpha\beta}r^2)$ (см. § 41). Вводя вектор $\mathbf{D}$ с компонентами $D_\alpha=D_{\alpha\beta}n_\beta$, находим

окончательное выражение для векторного потенциала:

$$\mathbf{A}=\frac{\dot{\mathbf{d}}}{cR_0}+\frac{1}{6c^2R_0}\ddot{\mathbf{D}}+\frac{1}{cR_0}[\dot{\mathfrak{m}}\mathbf{n}]. \tag{71,3}$$

Зная **A**, мы можем теперь определить поля **H** и **E** с помощью общих формул (66,3):

$$\begin{gathered}\mathbf{H}=\frac{1}{c^2R_0}\left\{[\ddot{\mathbf{d}}\mathbf{n}]+\frac{1}{6c}[\dddot{\mathbf{D}}\mathbf{n}]+[[\ddot{\mathfrak{m}}\mathbf{n}]\mathbf{n}]\right\},\\ \mathbf{E}=\frac{1}{c^2R_0}\left\{[[\ddot{\mathbf{d}}\mathbf{n}]\mathbf{n}]+\frac{1}{6c}[[\dddot{\mathbf{D}}\mathbf{n}]\mathbf{n}]+[\mathbf{n}\ddot{\mathfrak{m}}]\right\}.\end{gathered} \tag{71,4}$$

Интенсивность dI излучения в телесный угол do определяется согласно (66,6). Мы определим здесь полное излучение, т. е. энергию, излучаемую системой в единицу времени по всем направлениям. Для этого усредним dI по всем направлениям **n**; полное излучение равно этому среднему, умноженному на 4π. При усреднении квадрата магнитного поля все взаимные произведения первого, второго и третьего членов в **H** исчезают, так что остаются только средние квадраты каждого из них. Несложные вычисления[1]) дают в результате

$$I=\frac{2}{3c^3}\ddot{\mathbf{d}}^2+\frac{1}{180c^5}\dddot{D}_{\alpha\beta}^2+\frac{2}{3c^3}\ddot{\mathfrak{m}}^2. \tag{71,5}$$

Таким образом, полное излучение состоит из трех независимых частей; они называются соответственно дипольным, *квадрупольным и магнитно-дипольным* излучениями.

Отметим, что магнитно-дипольное излучение фактическн во многих случаях отсутствует. Так, оно отсутствует у системы, в которой отношение заряда к массе у всех движущихся частиц одинаково (в этом случае отсутствует и дипольное излучение, как уже было отмечено в § 67). Действительно, у такой системы магнитный момент пропорционален механическому моменту импульса (см. § 44), и потому, в силу закона сохранения последнего, $\dot{\mathfrak{m}}=0$. По той же

[1]) Укажем удобный способ усреднения произведений компонент единичного вектора. Тензор $\overline{n_\alpha n_\beta}$, будучи симметричным, может выражаться только через единичный тензор $\delta_{\alpha\beta}$. Учитывая также, что его след равен 1, имеем:

$$\overline{n_\alpha n_\beta}=\frac{1}{3}\delta_{\alpha\beta}.$$

Среднее же значение произведения четырех компонент равно:

$$\overline{n_\alpha n_\beta n_\gamma n_\delta}=\frac{1}{15}(\delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\delta}+\delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\delta}+\delta_{\alpha\delta}\delta_{\beta\gamma}).$$

Правая сторона составляется из единичных тензоров как тензор четвертого ранга, симметричный по всем индексам; общий коэффициент определяется затем путем свертывания по двум парам индексов, которое должно дать в результате 1.

причине (см. задачу к § 44) магнитно-дипольное излучение отсутствует у всякой системы, состоящей всего из двух частиц (чего, однако, нельзя сказать о дипольном излучении).

Задача

Вычислить полное эффективное излучение при рассеянии потока заряженных частиц одинаковыми с ними частицами.

Решение. Дипольное (а так же магнитно-дипольное) излучение при столкновении одинаковых частиц отсутствует, так что надо вычислить квадрупольное излучение. Тензор квадрупольного момента системы из двух одинаковых частиц (относительно их общего центра инерции) равен

$$D_{\alpha\beta}=\frac{e}{2}\left(3x_\alpha x_\beta-r^2\delta_{\alpha\beta}\right),$$

где x_α — компоненты радиус-вектора $\mathbf{r}$ между частицами. После трехкратного дифференцирования $D_{\alpha\beta}$ выражаем первую, вторую и третью производные по времени от координат x_α через относительную скорость частиц v_α согласно:

$$\dot{x}_\alpha=v_\alpha,\qquad \mu\ddot{x}_\alpha=\frac{m}{2}\ddot{x}_\alpha=\frac{e^2x_\alpha}{r^3},\qquad \frac{m}{2}\dddot{x}_\alpha=e^2\frac{v_\alpha r-3x_\alpha v_r}{r^4},$$

где $v_r=\mathbf{vr}/r$ — радиальная компонента скорости (второе равенство есть уравнение движения заряда, а третье получается дифференцированием второго). Вычисление приводит к следующему выражению для интенсивности:

$$I=\frac{1}{180c^5}\dddot{D}^2_{\alpha\beta}=\frac{2e^6}{15m^2c^5}\frac{1}{r^4}\left(v^2+11v_\varphi^2\right)$$

($v^2=v_r^2+v_\varphi^2$); v и v_φ выражаем через r с помощью равенств

$$v^2=v_0^2-\frac{4e^2}{mr},\qquad v_\varphi=\frac{\rho v_0}{r}.$$

Интегрирование по времени заменяем интегрированием по dr подобно тому, как это было сделано в задаче 3 к § 70, т. е. написав

$$dt=\frac{dr}{v_r}=\frac{dr}{\sqrt{v_0^2-\frac{\rho^2v_0^2}{r^2}-\frac{4e^2}{mr}}}.$$

В двойном интеграле (по dr и $d\rho$) производим сначала интегрирование по $d\rho$, а затем по dr. В результате вычислений получается следующий результат:

$$\varkappa=\frac{4\pi}{9}\frac{e^4v_0^3}{mc^5}.$$

§ 72. Поле излучения на близких расстояниях

Формулы дипольного излучения были выведены нами для поля на расстояниях, больших по сравнению с длиной волны (и тем более по сравнению с размерами излучающей системы). В этом параграфе мы будем по-прежнему считать, что длина волны велика по сравнению

с размерами системы, но будем рассматривать поле на расстояниях, хотя и больших по сравнению с последними, но сравнимыми с длиной волны.

Формула (67,4) для векторного потенциала

$$\mathbf{A} = \frac{1}{cR_0}\dot{\mathbf{d}} \tag{72,1}$$

по-прежнему остается в силе, так как для ее вывода было использовано лишь, что R_0 велико по сравнению с размерами системы. Однако поле нельзя рассматривать теперь, даже в небольших участках, как плоскую волну. Поэтому формулы (67,5) и (67,6) для электрического и магнитного полей уже неприменимы, и для их вычисления надо определить предварительно как **A**, так и φ.

Формулу для скалярного потенциала можно получить из выражения для **A** непосредственно с помощью общего условия (62,1)

$$\operatorname{div}\mathbf{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0,$$

наложенного на потенциалы. Подставляя в него (72,1) и интегрируя по времени, найдем:

$$\varphi = -\operatorname{div}\frac{\mathbf{d}}{R_0}. \tag{72,2}$$

Постоянную интегрирования (произвольную функцию координат) мы не пишем, так как нас интересует только переменная часть потенциала. Напомним, что в формуле (72,2), как и в (72,1), значение **d** должно браться в момент времени $t' = t - R_0/c$ [1]).

Теперь уже не представляет труда вычислить электрическое и магнитное поле. По обычным формулам, связывающим **E** и **H** с потенциалами, находим:

$$\mathbf{H} = \frac{1}{c}\operatorname{rot}\frac{\dot{\mathbf{d}}}{R_0}, \tag{72,3}$$

$$\mathbf{E} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\frac{\mathbf{d}}{R_0} - \frac{1}{c^2}\frac{\ddot{\mathbf{d}}}{R_0}. \tag{72,4}$$

Выражение для **E** можно переписать в другом виде, заметив, что $\mathbf{d}_{t'}/R_0$ [как и всякая функция координат и времени вида

---

[1]) Иногда вводят так называемый вектор Герца, определяемый как

$$\mathbf{Z} = -\frac{1}{R_0}\mathbf{d}\left(t - \frac{R_0}{c}\right).$$

Тогда

$$\mathbf{A} = -\frac{1}{c}\dot{\mathbf{Z}}, \qquad \varphi = \operatorname{div}\mathbf{Z}.$$

$\frac{1}{R_0} f\left(t-\frac{R_0}{c}\right)\Big]$ удовлетворяет волновому уравнению

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{\mathbf{d}}{R_0}=\Delta\,\frac{\mathbf{d}}{R_0}.$$

Воспользовавшись также известной формулой

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{a}=\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{a}-\Delta\mathbf{a},$$

найдем, что

$$\mathbf{E}=\operatorname{rot}\operatorname{rot}\frac{\mathbf{d}}{R_0}. \qquad (72,5)$$

Полученные формулы определяют поле на расстояниях, сравнимых с длиной волны. Во всех этих формулах нельзя, разумеется, выносить $1/R_0$ из-под знака дифференцирования по координатам, так как отношение членов, содержащих $1/R_0^2$, к членам с $1/R_0$ как раз порядка величины λ/R_0.

Наконец, напишем формулы для фурье-компонент поля. Для определения $\mathbf{H}_\omega$ подставляем в формулу (72,3) вместо $\mathbf{H}$ и $\mathbf{d}$ их монохроматические составляющие, т. е. соответственно $\mathbf{H}_\omega e^{-i\omega t}$ и $\mathbf{d}_\omega e^{-i\omega t}$. Надо, однако, помнить, что величины в правой стороне равенств (72,1—5) берутся в момент времени $t'=t-R_0/c$. Поэтому мы должны подставить для $\mathbf{d}$ выражение

$$\mathbf{d}_\omega e^{-i\omega(t-R_0/c)}=\mathbf{d}_\omega e^{-i\omega t+ikR_0}.$$

Производя подстановку и сокращая на $e^{-i\omega t}$, найдем:

$$\mathbf{H}_\omega=-ik\operatorname{rot}\left(\mathbf{d}_\omega\frac{e^{ikR_0}}{R_0}\right)=ik\left[\mathbf{d}_\omega\nabla\frac{e^{ikR_0}}{R_0}\right],$$

или, произведя дифференцирование,

$$\mathbf{H}_\omega=ik\,[\mathbf{d}_\omega\mathbf{n}]\left(\frac{ik}{R_0}-\frac{1}{R_0^2}\right)e^{ikR_0}, \qquad (72,6)$$

где $\mathbf{n}$ — единичный вектор в направлении $\mathbf{R}_0$.

Аналогичным образом из (72,4) найдем:

$$\mathbf{E}_\omega=k^2\mathbf{d}_\omega\frac{e^{ikR_0}}{R_0}+(\mathbf{d}_\omega\nabla)\,\nabla\frac{e^{ikR_0}}{R_0},$$

или, произведя дифференцирование,

$$\mathbf{E}_\omega=\mathbf{d}_\omega\left(\frac{k^2}{R_0}+\frac{ik}{R_0^2}-\frac{1}{R_0^3}\right)e^{ikR_0}+\mathbf{n}\,(\mathbf{n}\mathbf{d}_\omega)\left(-\frac{k^2}{R_0}-\frac{3ik}{R_0^2}+\frac{3}{R_0^3}\right)e^{ikR_0}. \qquad (72,7)$$

На расстояниях, больших по сравнению с длиной волны ($kR_0\gg 1$), в формулах (72,5—6) можно пренебречь членами с $1/R_0^2$ и $1/R_0^3$,

и мы возвращаемся к полю «волновой зоны»

$$\mathbf{E}_\omega = \frac{k^2}{R_0}\left[\mathbf{n}\,[\mathbf{d}_\omega \mathbf{n}]\right] e^{ikR_0}, \quad \mathbf{H}_\omega = -\frac{k^2}{R_0}[\mathbf{d}_\omega \mathbf{n}]\, e^{ikR_0}.$$

На расстояниях же, малых по сравнению с длиной волны ($kR_0 \ll 1$), пренебрегаем членами с $1/R_0$ и $1/R_0^2$ и полагаем $e^{ikR_0} \approx 1$; тогда

$$\mathbf{E}_\omega = \frac{1}{R_0^3}\{3\mathbf{n}\,(\mathbf{d}_\omega \mathbf{n}) - \mathbf{d}_\omega\},$$

что соответствует статическому дипольному электрическому полю (§ 40); магнитное поле в этом приближении, естественно, отсутствует.

Задача

Определить потенциалы поля квадрупольного и магнитно-дипольного излучений на близких расстояниях.

Решение. Предполагая, для краткости, что дипольное излучение вообще отсутствует, имеем (ср. вычисления, произведенные в § 71):

$$\mathbf{A} = \frac{1}{c}\int \mathbf{j}_{t-R/c}\frac{dV}{R} \approx -\frac{1}{c}\int (\mathbf{r}\nabla)\,\frac{\mathbf{j}_{t-R_0/c}}{R_0}\,dV,$$

где разложение подынтегрального выражения производится по степеням $\mathbf{r} = \mathbf{R}_0 - \mathbf{R}$. В противоположность тому, что мы делали в § 71, множитель $1/R_0$ нельзя выносить теперь из-под знака дифференцирования. Выносим последний из-под знака интеграла и переписываем формулу в тензорных обозначениях:

$$A_\alpha = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial X_\beta}\int \frac{x_\beta j_\alpha}{R_0}\,dV$$

(X_β обозначают компоненты радиус-вектора $\mathbf{R}_0$). Переходя от интеграла к сумме по зарядам, находим:

$$A_\alpha = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial X_\beta}\frac{\left(\sum e v_\alpha x_\beta\right)_{t'}}{R_0}.$$

Тем же способом, что и § 71, это выражение разделяется на квадрупольную и магнитно-дипольную части. Соответствующие скалярные потенциалы вычисляются по векторному потенциалу подобно тому, как это сделано в тексте. В результате получаем для квадрупольного излучения:

$$A_\alpha = -\frac{1}{6c}\frac{\partial}{\partial X_\beta}\frac{\dot{D}_{\alpha\beta}}{R_0}, \quad \varphi = \frac{1}{6}\frac{\partial^2}{\partial X_\alpha \partial X_\beta}\frac{D_{\alpha\beta}}{R_0},$$

и для магнитно-дипольного излучения:

$$\mathbf{A} = \operatorname{rot}\frac{\mathbf{m}}{R_0}, \quad \varphi = 0$$

(все величины в правых сторонах равенства берутся, как обычно, в момент времени $t' = t - R_0/c$).

Напряженности поля магнитно-дипольного излучения:

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\,\mathrm{rot}\,\frac{\mathfrak{m}}{R_0},\quad \mathbf{H} = \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\frac{\mathfrak{m}}{R_0}.$$

Сравнивая с (72,3), (72,4), мы видим, что **H** и **E** в магнитно-дипольном случае выражаются через $\mathfrak{m}$ так же, как соответственно **E** и — **H** выражаются через **d** в электрическом дипольном случае.

Спектральные компоненты потенциалов квадрупольного излучения:

$$A_\alpha^{(\omega)} = \frac{ik}{6} D_{\alpha\beta}^{(\omega)} \frac{\partial}{\partial X_\beta} \frac{e^{ikR_0}}{R_0},\quad \varphi^{(\omega)} = \frac{1}{6} D_{\alpha\beta}^{(\omega)} \frac{\partial^2}{\partial X_\alpha \partial X_\beta} \frac{e^{ikR_0}}{R_0}.$$

Выражения для поля мы не выписываем здесь ввиду их громоздкости.

§ 73. Излучение быстро движущегося заряда

Рассмотрим теперь заряженную частицу, движущуюся со скоростью не малой по сравнению со скоростью света.

Формулы § 67, выведенные в предположении $v \ll c$, неприменимы к этому случаю непосредственно. Мы можем, однако, рассматривать частицу в той системе отсчета, в которой она в данный момент покоится; в этой системе отсчета упомянутые формулы, очевидно, применимы (обращаем внимание на то, что это возможно сделать лишь в случае одной движущейся частицы; для нескольких частиц не существует, вообще говоря, системы отсчета, в которой бы все они одновременно покоились).

Таким образом, в указанной системе отсчета частица излучает в течение времени dt энергию

$$d\mathcal{E} = \frac{2e^2}{3c^3} w^2 dt \tag{73,1}$$

[согласно формуле (67,9)], где w — ускорение частицы в этой же системе. «Излучаемый» же ею импульс в рассматриваемой системе отсчета равен нулю

$$d\mathbf{P} = 0. \tag{73,2}$$

Действительно, излучение импульса определяется как интеграл от плотности потока импульса в поле излучения по замкнутой поверхности, охватывающей частицу. Но в силу свойств симметрии дипольного излучения импульс, уносимый в противоположных направлениях, одинаков по величине и противоположен по направлению; поэтому указанный интеграл обращается тождественно в нуль.

Для перехода к произвольной системе отсчета перепишем формулы (73,1) и (73,2) в четырехмерном виде. Легко видеть, что «излучение 4-импульса» dP^i должно быть записано как

$$dP^i = -\frac{2e^2}{3c} \frac{du^k}{ds} \frac{du_k}{ds} dx^i = -\frac{2e^2}{3c} \frac{du^k}{ds} \frac{du_k}{ds} u^i\, ds. \tag{73,3}$$

Действительно, в системе отсчета, в которой частица покоится, пространственные компоненты 4-скорости u^i равны нулю, а $\frac{du^k}{ds}\frac{du_k}{ds}=-\frac{w^2}{c^4}$; поэтому пространственные компоненты dP^i обращаются в нуль, а временная дает равенство (73,1).

Полное излучение 4-импульса за время пролета частицы через данное электромагнитное поле равно интегралу от выражения (73,3), т. е.

$$\Delta P^i = -\frac{2e^2}{3c}\int \frac{du^k}{ds}\frac{du_k}{ds}\,dx^i. \tag{73,4}$$

Перепишем эту формулу в другом виде, выразив 4-ускорение du^i/ds через тензор внешнего электромагнитного поля с помощью уравнений движения (23,4):

$$mc\frac{du_k}{ds} = \frac{e}{c}F_{kl}u^l.$$

Мы получим тогда

$$\Delta P^i = -\frac{2e^4}{3m^2c^5}\int (F_{kl}u^l)(F^{km}u_m)\,dx^i. \tag{73,5}$$

Временная компонента уравнения (73,4) или (73,5) дает полное излучение энергии $\Delta\mathscr{E}$. Подставляя для четырехмерных величин их выражения через трехмерные величины, получим:

$$\Delta\mathscr{E} = \frac{2e^2}{3c^3}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{w^2 - \frac{[\mathbf{vw}]^2}{c^2}}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^3}\,dt \tag{73,6}$$

($\mathbf{w}=\dot{\mathbf{v}}$ — ускорение частицы), или, через внешние электрическое и магнитное поля:

$$\Delta\mathscr{E} = \frac{2e^4}{3m^2c^3}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\left\{\mathbf{E}+\frac{1}{c}[\mathbf{vH}]\right\}^2 - \frac{1}{c^2}(\mathbf{E}\,\mathbf{v})^2}{1-\frac{v^2}{c^2}}\,dt. \tag{73,7}$$

Выражения для полного излучения импульса отличаются лишним множителем $\mathbf{v}$ под знаком интеграла.

Из формулы (73,7) видно, что при скоростях, близких к скорости света, полное излучение энергии в единицу времени зависит от скорости в основном как $(1-v^2/c^2)^{-1}$, т. е. пропорционально квадрату энергии движущейся частицы. Исключение представляет только движение в электрическом поле параллельно направлению поля. В этом случае множитель $(1-v^2/c^2)$, стоящий в знаменателе, сокращается с таким же множителем в числителе, и излучение оказывается не зависящим от энергии частицы.

Наконец, остановимся на вопросе об угловом распределении излучения быстро движущейся частицы. Для решения этой задачи удобно воспользоваться лиенар-вихертовским выражением для поля (63,8—9). На больших расстояниях мы должны сохранить в нем только член с более низкой степенью $1/R$ [второй член в формуле (63,8)]. Вводя единичный вектор $\mathbf{n}$ в направлении излучения ($\mathbf{R}=\mathbf{n}R$), получим формулы

$$\mathbf{E}=\frac{e}{c^2R}\frac{\left[\mathbf{n}\left[\left(\mathbf{n}-\frac{\mathbf{v}}{c}\right)\mathbf{w}\right]\right]}{\left(1-\frac{\mathbf{nv}}{c}\right)^3}, \quad \mathbf{H}=[\mathbf{nE}], \tag{73,8}$$

где все величины в правых сторонах равенств берутся в запаздывающий момент времени $t'=t-R/c$.

Интенсивность излучения в телесный угол do равна $dI=\frac{c}{4\pi}E^2R^2do$. Раскрывая квадрат E^2, найдем:

$$dI=\frac{e^2}{4\pi c^3}\left\{\frac{2(\mathbf{nw})(\mathbf{vw})}{c\left(1-\frac{\mathbf{vn}}{c}\right)^5}+\frac{\mathbf{w}^2}{\left(1-\frac{\mathbf{vn}}{c}\right)^4}-\frac{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)(\mathbf{nw})^2}{\left(1-\frac{\mathbf{vn}}{c}\right)^6}\right\}do. \tag{73,9}$$

Если же мы хотим определить угловое распределение полного излучения за все время движения заряда, то надо проинтегрировать интенсивность по времени. При этом следует помнить, что интегрируемое выражение является функцией t'; поэтому надо писать

$$dt=\frac{\partial t}{\partial t'}dt'=\left(1-\frac{\mathbf{nv}}{c}\right)dt' \tag{73,10}$$

[см. (63,6)], после чего интегрирование производится непосредственно по dt'. Таким образом, имеем следующее выражение для полного излучения в элемент телесного угла do:

$$d\mathscr{E}_{\mathbf{n}}=\frac{e^2}{4\pi c^3}do\int\left\{\frac{2(\mathbf{nw})(\mathbf{vw})}{c\left(1-\frac{\mathbf{vn}}{c}\right)^4}+\frac{\mathbf{w}^2}{\left(1-\frac{\mathbf{vn}}{c}\right)^3}-\frac{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)(\mathbf{nw})^2}{\left(1-\frac{\mathbf{vn}}{c}\right)^5}\right\}dt'. \tag{73,11}$$

Как видно из (73,9), угловое распределение излучения в общем случае довольно сложно. В ультрарелятивистском случае ($1-v/c\ll 1$) оно обладает характерной особенностью, связанной с наличием высоких степеней разности $1-\mathbf{vn}/c$ в знаменателях различных членов этого выражения. Именно, интенсивность велика в узком интервале углов, в котором мала разность $1-\mathbf{vn}/c$. Обозначив посредством θ малый угол между $\mathbf{n}$ и $\mathbf{v}$, имеем:

$$1-\frac{v}{c}\cos\theta\approx 1-\frac{v}{c}+\frac{\theta^2}{2};$$

эта разность мала ($\sim 1-v/c$) при $\theta \sim \sqrt{1-v/c}$ или, что то же,

$$\theta \sim \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}. \tag{73,12}$$

Таким образом, ультрарелятивистская частица излучает в основном в направлении своего движения в интервал углов (73,12) вокруг направления скорости.

Укажем также, что при произвольных скорости и ускорении частицы всегда имеются также два направления, в которых интенсивность излучения обращается в нуль. Это те направления, в которых вектор $\mathbf{n}-\mathbf{v}/c$ параллелен вектору $\mathbf{w}$ и потому поле (73,8) обращается в нуль (см. также задачу 2 в конце параграфа).

Наконец, выпишем более простые формулы, в которые переходит (73,9) в двух частных случаях.

Если скорость и ускорение частицы параллельны, то

$$\mathbf{H}=\frac{e}{c^2R}\frac{[\mathbf{wn}]}{\left(1-\frac{\mathbf{vn}}{c}\right)^3}$$

и интенсивность

$$dI=\frac{e^2}{4\pi c^3}\frac{w^2\sin^2\theta}{\left(1-\frac{v}{c}\cos\theta\right)^6}do. \tag{73,13}$$

Она, естественно, симметрична вокруг совместного направления $\mathbf{v}$ и $\mathbf{w}$ и обращается в нуль в направлениях по ($\theta=0$) и против ($\theta=\pi$) скорости. В ультрарелятивистском случае интенсивность как функция от θ имеет резкий двойной максимум в области (73,12) с «провалом» до нуля при $\theta=0$.

Если же скорость и ускорение взаимно перпендикулярны, то из (73,9) имеем:

$$dI=\frac{e^2w^2}{4\pi c^3}\left[\frac{1}{\left(1-\frac{v}{c}\cos\theta\right)^4}-\frac{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\sin^2\theta\cos^2\varphi}{\left(1-\frac{v}{c}\cos\theta\right)^6}\right]do, \tag{73,14}$$

где θ — по-прежнему угол между $\mathbf{n}$ и $\mathbf{v}$, а φ — азимутальный угол вектора $\mathbf{n}$ с плоскостью, проходящей через $\mathbf{v}$ и $\mathbf{w}$. Эта интенсивность симметрична лишь относительно плоскости $\mathbf{vw}$ и обращается в нуль в двух направлениях в этой плоскости, образующих угол $\theta=\arccos(v/c)$ со скоростью.

Задачи

1. Определить полное излучение релятивистской частицы с зарядом e_1, пролетающей на прицельном расстоянии ρ в кулоновом поле неподвижного центра (потенциал $\varphi=e_2/r$).

Решение. При пролете через поле релятивистская частица почти не отклоняется[1]). Поэтому в (73,7) можно считать скорость $\mathbf{v}$ постоянной, соответственно чему поле в точке нахождения частицы

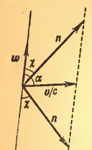


Рис. 15.

$$\mathbf{E}=\frac{e_2\mathbf{r}}{r^3}\approx\frac{e_2\mathbf{r}}{(\rho^2+v^2t^2)^{3/2}},$$

причем $x=vt$, $y=\rho$. Произведя в (73,7) интегрирование по времени, получим:

$$\Delta\mathscr{E}=\frac{\pi e_1^4 e_2^2}{12m^2c^3\rho^3 v}\,\frac{4c^2-v^2}{c^2-v^2}.$$

2. Определить направления, в которых обращается в нуль интенсивность излучения движущейся частицы.

Решение. Из геометрического построения (рис. 15) находим, что искомые направления $\mathbf{n}$ лежат в плоскости, проходящей через $\mathbf{v}$ и $\mathbf{w}$, и образуют с направлением $\mathbf{w}$ угол χ, определяющийся из соотношения

$$\sin\chi=\frac{v}{c}\sin\alpha,$$

где α — угол между $\mathbf{v}$ и $\mathbf{w}$.

§ 74. Магнито-тормозное излучение

Рассмотрим излучение заряда, движущегося с произвольной скоростью по окружности в постоянном однородном поле; такое излучение называют *магнито-тормозным*.

Радиус орбиты r и циклическая частота движения ω_H выражаются через напряженность поля H и скорость частицы v формулами (см. § 21):

$$r=\frac{mcv}{eH\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},\quad \omega_H=\frac{v}{r}=\frac{eH}{mc}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}. \qquad (74,1)$$

Полная интенсивность излучения по всем направлениям определяется по формуле (73,7) (без интегрирования по времени), в которой надо положить $\mathbf{E}=0$ и $\mathbf{H}\perp\mathbf{v}$:

$$I=\frac{2e^4H^2v^2}{3m^2c^5\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}. \qquad (74,2)$$

Мы видим, что полная интенсивность пропорциональна квадрату импульса частицы.

---

[1]) При $v\sim c$ отклонение на заметный угол может иметь место лишь при прицельных расстояниях $\rho\sim e^2/mc^2$, которые вообще не допускают классического рассмотрения.

Если же мы интересуемся угловым распределением излучения, то надо воспользоваться формулой (73,11). Интерес представляет интенсивность, усредненная по периоду движения. Соответственно этому будем интегрировать в (73,11) по времени обращения частицы по окружности и разделим результат на величину периода $T = 2\pi/\omega_H$.

Выберем плоскость орбиты в качестве плоскости xy (начало координат — в центре окружности), а плоскость yz проводим через направление излучения **k** (рис. 16). Магнитное поле будет направлено в отрицательном направлении оси z (изображенное на рис. 16 направление движения частицы отвечает положительному заряду e). Пусть, далее, θ — угол между направлением излучения **k** и осью y, а $\varphi = \omega_H t$ — угол между радиус-вектором частицы и осью x. Тогда косинус угла между направлением **k** и скоростью **v** равен $\cos\theta\cos\varphi$ (вектор **v** лежит в плоскости xy и в каждый момент времени перпендикулярен к радиус-вектору частицы). Ускорение частицы **w** выражаем через поле **H** и скорость **v** согласно уравнению движения [см. (21,1)]:

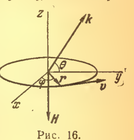


Рис. 16.

$$\mathbf{w} = \frac{e}{mc}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\,[\mathbf{vH}].$$

После простого вычисления получим:

$$dI = do\,\frac{e^4H^2v^2}{8\pi^2m^2c^5}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\int\limits_0^{2\pi}\frac{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\sin^2\theta+\left(\frac{v}{c}-\cos\theta\cos\varphi\right)^2}{\left(1-\frac{v}{c}\cos\theta\cos\varphi\right)^5}\,d\varphi \tag{74,3}$$

(интегрирование по времени заменено интегрированием по $d\varphi = \omega_H dt$). Процесс интегрирования элементарен, хотя выкладки довольно громоздки. В результате получается следующая формула:

$$dI = do\,\frac{e^4H^2v^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}{8\pi m^2c^5}\left[\frac{2+\frac{v^2}{c^2}\cos^2\theta}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\cos^2\theta\right)^{5/2}}-\frac{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\left(4+\frac{v^2}{c^2}\cos^2\theta\right)\cos^2\theta}{4\left(1-\frac{v^2}{c^2}\cos^2\theta\right)^{7/2}}\right]. \tag{74,4}$$

Отношение интенсивностей излучения под углом $\theta = \pi/2$ (перпендикулярно к плоскости орбиты) и под углом $\theta = 0$ (в плоскости орбиты) равно

$$\frac{(dI/do)_0}{(dI/do)_{\pi/2}} = \frac{4+3\frac{v^2}{c^2}}{8\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{5/2}}. \tag{74,5}$$

При $v \to 0$ это отношение стремится к 1/2, но при скоростях, близких к скорости света, оно становится очень большим. Мы вернемся еще к этому вопросу ниже.

Далее, рассмотрим спектральное распределение излучения. Поскольку движение заряда периодично, то речь идет о разложении в ряд Фурье. Вычисление удобно начать с векторного потенциала. Для этой компоненты Фурье имеем формулу [ср. (66,12)]

$$\mathbf{A}_n = e\frac{e^{ikR_0}}{cR_0T}\oint \exp\{i(\omega_H nt - \mathbf{kr})\}\,d\mathbf{r},$$

где интегрирование производится вдоль траектории частицы (окружности). Для координат частицы имеем $x = r\cos\omega_H t$, $y = r\sin\omega_H t$. В качестве переменной интегрирования выбираем угол $\varphi = \omega_H t$. Замечая, что

$$\mathbf{kr} = kr\cos\theta\sin\varphi = \frac{nv}{c}\cos\theta\sin\varphi$$

($k = n\omega_H/c = nv/cr$), находим для компоненты Фурье x-составляющей векторного потенциала

$$A_{xn} = -\frac{ev}{2\pi cR_0}e^{ikR_0}\int_0^{2\pi} e^{in\left(\varphi - \frac{v}{c}\cos\theta\sin\varphi\right)}\sin\varphi\,d\varphi.$$

С таким интегралом нам приходилось уже иметь дело в § 70. Он выражается через производную от функции Бесселя:

$$A_{xn} = -\frac{iev}{cR_0}e^{ikR_0}J_n'\left(\frac{nv}{c}\cos\theta\right). \qquad (74,6)$$

Аналогичным образом вычисляется A_{yn}:

$$A_{yn} = \frac{e}{R_0\cos\theta}e^{ikR_0}J_n\left(\frac{nv}{c}\cos\theta\right). \qquad (74,7)$$

Компонента же вдоль оси z, очевидно, вообще отсутствует.

По формулам § 66 имеем для интенсивности излучения с частотой $\omega = n\omega_H$ в элемент телесного угла do:

$$dI_n = \frac{c}{2\pi}|\mathbf{H}_n|^2R_0^2do = \frac{c}{2\pi}|[\mathbf{kA}_n]|^2R_0^2do.$$

Замечая, что

$$|[\mathbf{Ak}]|^2 = A_x^2k^2 + A_y^2k^2\sin^2\theta,$$

и подставляя выражения (74,6—7), получим для интенсивности излучения следующую формулу (*Шотт*, 1912):

$$dI_n = \frac{n^2e^4H^2}{2\pi c^3m^2}\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\left[\operatorname{tg}^2\theta\cdot J_n^2\left(\frac{nv}{c}\cos\theta\right) + \frac{v^2}{c^2}J_n'^2\left(\frac{nv}{c}\cos\theta\right)\right]do. \quad (74,8)$$

Для определения полной интенсивности излучения с частотой $\omega = n\omega_H$ по всем направлениям это выражение должно быть проинтегрировано по всем углам. Интегрирование, однако, не может быть произведено в конечном виде. Посредством ряда преобразований, использующих некоторые соотношения теории функций Бесселя, искомый интеграл может быть приведен к следующему виду [1]):

$$I_n = \frac{2e^4H^2}{m^2c^2v}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\left[n\frac{v^2}{c^2}J'_{2n}\left(\frac{2nv}{c}\right) - n^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\int\limits_0^{v/c} J_{2n}(2n\xi)\,d\xi\right]. \quad (74,9)$$

Рассмотрим более подробно ультрарелятивистский случай, когда скорость движения частицы близка к скорости света.

Положив в числителе формулы (74,2) $v = c$, найдем, что полная интенсивность магнито-тормозного излучения в ультрарелятивистском случае пропорциональна квадрату энергии частицы $\mathscr{E}$:

$$I = \frac{2e^4H^2}{3m^2c^3}\left(\frac{\mathscr{E}}{mc^2}\right)^2. \quad (74,10)$$

Угловое распределение излучения в этом случае крайне анизотропно. Оно сосредоточено в основном вблизи плоскости орбиты. Угловую ширину $\Delta\theta$, в которой заключена основная часть излучения, легко оценить из условия $1-\frac{v^2}{c^2}\cos^2\theta \sim 1-\frac{v^2}{c^2}$. Очевидно, что

$$\Delta\theta \sim \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = \frac{mc^2}{\mathscr{E}} \quad (74,11)$$

[этот результат находится, конечно, в соответствии с рассмотренным в предыдущем параграфе угловым распределением мгновенной интенсивности, см. (73,12) [2])].

Специфическим характером обладает в ультрарелятивистском случае также и спектральное распределение излучения (*Л. Арцимович и И. Померанчук*, 1945).

Мы увидим ниже, что в этом случае основную роль в излучении играют частоты с очень большими n. В связи с этим можно воспользоваться асимптотической формулой (70,9), согласно которой имеем:

$$J_{2n}(2n\xi) \approx \frac{1}{\sqrt{\pi}\,n^{1/3}}\Phi\left[n^{2/3}(1-\xi^2)\right]. \quad (74,12)$$

---

[1]) Вычисления можно найти в книге: *G. A. Schott*, Electromagnetic Radiation, § 84, Cambridge, 1912.

[2]) Не смешивать, однако, угол θ в этом параграфе с углом θ между **n** и **v** в § 73!

Подставив в (74,9), получим следующую формулу для спектрального распределения излучения при больших значениях n [1]):

$$I_n = \frac{2e^4H^2}{\sqrt{\pi}\, m^2c^3} \frac{mc^2}{\mathscr{E}} \sqrt{u} \left[-\Phi'(u) - \frac{u}{2} \int_u^\infty \Phi(u)\, du \right], \quad (74,13)$$

$$u = n^{2/3} \left(\frac{mc^2}{\mathscr{E}} \right)^2.$$

При $u \longrightarrow 0$ выражение в квадратных скобках стремится к постоянному пределу $\Phi'(0) = -0,4587 \ldots$ [2]). Поэтому при $u \ll 1$ имеем:

$$I_n = 0,52 \frac{e^4H^2}{m^2c^3} \left(\frac{mc^2}{\mathscr{E}} \right)^2 n^{1/3}, \qquad 1 \ll n \ll \left(\frac{\mathscr{E}}{mc^2} \right)^3. \quad (74,14)$$

При $u \gg 1$ можно воспользоваться известным асимптотическим выражением функции Эйри (см. примечание на стр. 198) и получить:

$$I_n = \frac{e^4H^2n^{1/2}}{2\sqrt{\pi}\, m^2c^3} \left(\frac{mc^2}{\mathscr{E}} \right)^{5/2} \exp\left[-\frac{2}{3} n \left(\frac{mc^2}{\mathscr{E}} \right)^3 \right], \qquad n \gg \left(\frac{\mathscr{E}}{mc^2} \right)^3, \quad (74,15)$$

т. е. интенсивность экспоненциально падает при очень больших n.

Спектральное распределение имеет, следовательно, максимум при $n \sim (\mathscr{E}/mc^2)^3$, и основная часть излучения сосредоточена в области частот

$$\omega \sim \omega_H \left(\frac{\mathscr{E}}{mc^2} \right)^3 = \frac{eH}{mc} \left(\frac{\mathscr{E}}{mc^2} \right)^2. \quad (74,16)$$

Эти частоты очень велики по сравнению с расстоянием ω_H между двумя соседними из них. Другими словами, спектр излучения состоит из очень большого числа близко расположенных линий, т. е. имеет квазинепрерывный характер. Вместо функции распределения I_n можно поэтому ввести распределение по непрерывному ряду частот $\omega = n\omega_H$, написав

$$dI = I_n dn = I_n \frac{d\omega}{\omega_H}.$$

---

[1]) При подстановке один из пределов интеграла ($n^{2/3}$) заменен, с требуемой точностью, на бесконечность, и везде, где возможно, положено $v = c$. Хотя в интеграле в (74,9) фигурируют также и не близкие к 1 значения ξ, тем не менее использование формулы (74,12) допустимо, поскольку интеграл быстро сходится на нижнем пределе.

[2]) Согласно определению функции Эйри имеем:

$$\Phi'(0) = -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \xi \sin \frac{\xi^3}{3}\, d\xi = -\frac{1}{\sqrt{\pi} \cdot 3^{1/3}} \int_0^\infty x^{-1/3} \sin x\, dx = -\frac{3^{1/6}\,\Gamma(2/3)}{2\sqrt{\pi}}.$$

Для численных расчетов удобно выразить это распределение через функции Макдональда K_ν[1]). Путем несложных преобразований формулы (74,13) оно может быть представлено в виде

$$dI = d\omega \frac{\sqrt{3}}{2\pi} \frac{e^3 H}{mc^2} F\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right), \qquad F(\xi) = \xi \int_\xi^\infty K_{5/3}(\xi)\, d\xi, \tag{74,17}$$

где обозначено

$$\omega_c = \frac{3eH}{2mc}\left(\frac{\mathscr{E}}{mc^2}\right)^2. \tag{74,18}$$

На рис. 17 изображен график функции $F(\xi)$.

Наконец, несколько замечаний о случае, когда частица движется не по плоской круговой орбите, а по винтовой траектории, т. е.

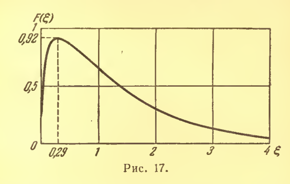


Рис. 17.

имеет продольную (по отношению к полю) скорость $v_\parallel = v\cos\chi$ (χ — угол между **H** и **v**). Частота вращательного движения дается той же формулой (74,1), но вектор **v** описывает не круг, а поверхность конуса с осью вдоль **H** и углом 2χ при вершине. Полная интенсивность излучения (понимаемая как полная потеря энергии частицей в 1 *сек*) будет отличаться от (74,2) заменой H на $H_\perp = H\sin\chi$.

В ультрарелятивистском случае излучение сконцентрировано в направлениях вблизи образующих «конуса скоростей». Спектральное распределение и полная интенсивность (понимаемые в том же смысле)

---

[1]) Связь функции Эйри с функцией $K_{1/3}$ дается формулой (4) в примечании на стр. 198. При дальнейших преобразованиях используются рекуррентные соотношения

$$K_{\nu-1}(x) - K_{\nu+1}(x) = -\frac{2\nu}{x} K_\nu, \quad 2K'_\nu(x) = -K_{\nu-1}(x) - K_{\nu+1}(x),$$

причем $K_{-\nu}(x) = K_\nu(x)$. В частности, легко найти, что

$$\Phi'(t) = -\frac{t}{\sqrt{3\pi}} K_{2/3}\left(\frac{2}{3} t^{3/2}\right).$$

получаются из (74,17) и (74,10) заменой $H \longrightarrow H_\perp$. Если же речь идет об интенсивности, наблюдаемой в указанных направлениях неподвижным наблюдателем, то в формулы надо ввести множитель $\left(1-\frac{v_\parallel}{c}\cos\chi\right)^{-1} \approx \sin^{-2}\chi$, учитывающий общее приближение излучателя к наблюдателю, происходящее со скоростью $v_\parallel \cos\chi$.

Задачи

1. Определить закон изменения энергии со временем для заряда, движущегося по круговой орбите в постоянном однородном магнитном поле и теряющего энергию путем излучения.

Решение. Согласно (74,2) имеем для потери энергии в единицу времени:

$$-\frac{d\mathscr{E}}{dt}=\frac{2e^4H^2}{3m^4c^7}\left(\mathscr{E}^2-m^2c^4\right)$$

($\mathscr{E}$ — энергия частицы). Отсюда находим:

$$\frac{\mathscr{E}}{mc^2}=\operatorname{cth}\left(\frac{2e^4H^2}{3m^3c^5}\,t+\text{const}\right).$$

С увеличением t энергия монотонно падает, приближаясь к значению $\mathscr{E}=mc^2$ (полная остановка частицы) асимптотически при $t \to \infty$.

2. Найти асимптотическую формулу для спектрального распределения излучения с большими значениями n для частицы, движущейся по окружности со скоростью, не близкой к скорости света.

Решение. Используем известную формулу теории функций Бесселя:

$$J_n(n\varepsilon)=\frac{1}{\sqrt{2\pi n}\,(1-\varepsilon^2)^{1/4}}\left[\frac{\varepsilon}{1+\sqrt{1-\varepsilon^2}}\,e^{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\right]^n,$$

справедливую при $n(1-\varepsilon^2)^{3/2} \gg 1$. С ее помощью находим из (74,9):

$$I_n=\frac{e^4H^2\sqrt{n}}{2\sqrt{\pi}\,m^2c^3}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{5/4}\left[\frac{v/c}{1+\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\,e^{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right]^{2n}.$$

Эта формула применима при $n(1-v^2/c^2)^{3/2} \gg 1$; если к тому же $1-v^2/c^2$ мало, то формула переходит в (74,15).

3. Найти поляризацию магнитотормозного излучения.

Решение. Электрическое поле $\mathbf{E}_n$ вычисляется по векторному потенциалу $\mathbf{A}_n$ (74,6—7) по формуле

$$\mathbf{E}_n=\frac{i}{k}\,[[\mathbf{k}\mathbf{A}_n]\,\mathbf{k}]=-\frac{i}{k}\,\mathbf{k}\,(\mathbf{k}\mathbf{A}_n)+ik\mathbf{A}_n.$$

Пусть $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ — единичные векторы в плоскости, перпендикулярной к $\mathbf{k}$, причем $\mathbf{e}_1$ параллелен оси x, а $\mathbf{e}_2$ лежит в плоскости yz [их компоненты: $\mathbf{e}_1=(1,\,0,\,0)$, $\mathbf{e}_2=(0,\,\sin\theta,\,-\cos\theta)$]; векторы $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{k}$ образуют правую тройку. Тогда электрическое поле будет:

$$\mathbf{E}_n=ikA_{xn}\mathbf{e}_1+ik\sin\theta A_{yn}\mathbf{e}_2$$

или, опустив несущественные общие множители:

$$\mathbf{E}_n \backsim \frac{v}{c} J_n' \left(\frac{nv}{c}\cos\theta\right) \mathbf{e}_1 + \operatorname{tg}\theta\, J_n\left(\frac{nv}{c}\cos\theta\right) i\mathbf{e}_2.$$

Волна эллиптически поляризована (см. § 48).

В ультрарелятивистском случае для больших n и малых углов θ функции J_n и J_n' выражаются через $K_{1/3}$ и $K_{2/3}$, причем в их аргументах полагаем

$$1-\frac{v^2}{c^2}\cos^2\theta \approx 1-\frac{v^2}{c^2}+\theta^2=\left(\frac{mc^2}{\mathscr{E}}\right)^2+\theta^2.$$

В результате получим:

$$\mathbf{E}_n = \mathbf{e}_1\psi K_{2/3}\left(\frac{n}{3}\psi^3\right)+i\mathbf{e}_2\theta K_{1/3}\left(\frac{n}{3}\psi^3\right), \qquad \psi=\sqrt{\left(\frac{mc^2}{\mathscr{E}}\right)^2+\theta^2}.$$

При $\theta=0$ эллиптическая поляризация вырождается в линейную вдоль $\mathbf{e}_1$. При больших θ ($|\theta|\gg mc^2/\mathscr{E}$, $n\theta^2\gg 1$) имеем $K_{1/3}(x)\approx K_{2/3}(x)\approx\sqrt{\pi/2x}\,e^{-x}$ и поляризация стремится к круговой: $\mathbf{E}_n \backsim \mathbf{e}_1 \pm i\mathbf{e}_2$; интенсивность излучения, однако, становится при этом экспоненциально малой. В промежуточной области углов малая ось эллипса лежит вдоль $\mathbf{e}_2$, а большая — вдоль $\mathbf{e}_1$. Направление вращения зависит от знака угла θ ($\theta>0$, если направления $\mathbf{H}$ и $\mathbf{k}$ лежат по разные стороны от плоскости орбиты, как изображено на рис. 16).

§ 75. Торможение излучением

В § 65 было показано, что разложение потенциалов поля системы зарядов в ряд по степеням v/c приводит во втором приближении к функции Лагранжа, вполне определяющей (в этом приближении) движение зарядов. Произведем теперь разложение поля до членов более высокого порядка и выясним, к каким эффектам приводят эти члены.

В разложении скалярного потенциала

$$\varphi=\int\frac{1}{R}\,\rho_{t-R/c}\,dV$$

член третьего порядка по $1/c$ равен

$$\varphi^{(3)}=-\frac{1}{6c^3}\frac{\partial^3}{\partial t^3}\int R^2\rho\,dV. \qquad (75,1)$$

По тем же причинам, что и при выводе (65,3), в разложении векторного потенциала мы должны взять только член второго порядка по $1/c$, т. е.

$$\mathbf{A}^{(2)}=-\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\int\mathbf{j}\,dV. \qquad (75,2)$$

Произведем преобразование потенциалов:

$$\varphi'=\varphi-\frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t}, \qquad \mathbf{A}'=\mathbf{A}+\operatorname{grad}f,$$

выбрав функцию f таким образом, чтобы скалярный потенциал $\varphi^{(3)}$

обратился в нуль:

$$f = -\frac{1}{6c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int R^2\rho\, dV.$$

Тогда новый векторный потенциал будет равен

$$\mathbf{A}'^{(2)} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\int \mathbf{j}\, dV - \frac{1}{6c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\nabla\int R^2\rho\, dV =$$

$$= -\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\int \mathbf{j}\, dV - \frac{1}{3c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int \mathbf{R}\rho\, dV.$$

Переходя здесь от интегралов к суммам по отдельным зарядам, для первого слагаемого в правой части получим выражение $-\frac{1}{c^2}\sum e\dot{\mathbf{v}}$. Во втором слагаемом пишем $\mathbf{R} = \mathbf{R}_0 - \mathbf{r}$, где $\mathbf{R}_0$ и $\mathbf{r}$ имеют обычный смысл (см. § 66); тогда $\dot{\mathbf{R}} = -\dot{\mathbf{r}} = -\mathbf{v}$, и второе слагаемое принимает вид $\frac{1}{3c^2}\sum e\dot{\mathbf{v}}$. Таким образом,

$$\mathbf{A}'^{(2)} = -\frac{2}{3c^2}\sum e\dot{\mathbf{v}}. \tag{75,3}$$

Соответствующее этому потенциалу магнитное поле равно нулю ($\mathbf{H} = \operatorname{rot}\mathbf{A}'^{(2)} = 0$), поскольку $\mathbf{A}'^{(2)}$ не содержит явным образом координат. Электрическое же поле, $\mathbf{E} = -\dot{\mathbf{A}}'^{(2)}/c$, равно

$$\mathbf{E} = \frac{2}{3c^3}\dddot{\mathbf{d}}, \tag{75,4}$$

где $\mathbf{d}$ — дипольный момент системы.

Таким образом, члены третьего порядка в разложении поля приводят к появлению дополнительных действующих на заряды сил, не содержащихся в функции Лагранжа (65,7); эти силы зависят от производных по времени от ускорения зарядов.

Рассмотрим систему зарядов, совершающих стационарное движение[1]) и вычислим среднюю работу, производимую полем (75,4) за единицу времени. На каждый заряд e действует сила $\mathbf{f} = e\mathbf{E}$, т. е.

$$\mathbf{f} = \frac{2e}{3c^3}\dddot{\mathbf{d}}. \tag{75,5}$$

В единицу времени эта сила производит работу, равную $\mathbf{fv}$; полная работа, совершенная над всеми зарядами, равна сумме по зарядам:

$$\sum \mathbf{fv} = \frac{2}{3c^3}\dddot{\mathbf{d}}\sum e\mathbf{v} = \frac{2}{3c^3}\dddot{\mathbf{d}}\dot{\mathbf{d}} = \frac{2}{3c^3}\frac{d}{dt}(\dot{\mathbf{d}}\ddot{\mathbf{d}}) - \frac{2}{3c^3}\ddot{\mathbf{d}}^2.$$

При усреднении по времени первый член исчезает, так что средняя

---

[1]) Точнее, — движение, которое было бы стационарным при пренебрежении излучением, приводящим к постепенному затуханию движения.

работа оказывается равной

$$\sum \mathbf{fv} = -\frac{2}{3c^3}\,\overline{\ddot{\mathbf{d}}^2}. \qquad (75,6)$$

Но стоящее справа выражение есть не что иное, как (взятое с обратным знаком) среднее излучение энергии системой за единицу времени [см. (67,8)]. Таким образом, возникающие в третьем приближении силы (75,5) описывают обратное действие излучения на заряды. Эти силы носят название *торможения излучением* или *лоренцевых сил трения*.

Одновременно с потерей энергии в излучающей системе зарядов происходит также и потеря момента импульса. Уменьшение момента импульса в единицу времени, $d\mathbf{M}/dt$, легко вычислить с помощью выражений для сил торможения. Дифференцируя момент $\mathbf{M} = \sum [\mathbf{rp}]$ по времени, имеем $\dot{\mathbf{M}} = \sum [\mathbf{r}\dot{\mathbf{p}}]$, так как $\sum [\dot{\mathbf{r}}\mathbf{p}] = \sum m[\mathbf{vv}] \equiv 0$. Производную по времени от импульса частицы заменяем действующей на нее силой трения (75,5) и находим:

$$\dot{\mathbf{M}} = \sum [\mathbf{rf}] = \frac{2}{3c^3} \sum e\,[\mathbf{r}\dddot{\mathbf{d}}] = \frac{2}{3c^3}[\mathbf{d}\dddot{\mathbf{d}}].$$

Нас интересует среднее по времени значение потери момента импульса при стационарном движении, подобно тому как выше нас интересовала средняя потеря энергии. Написав

$$[\mathbf{d}\dddot{\mathbf{d}}] = \frac{d}{dt}[\mathbf{d}\ddot{\mathbf{d}}] - [\dot{\mathbf{d}}\,\ddot{\mathbf{d}}]$$

и замечая, что полная производная по времени (первый член) при усреднении исчезает, найдем окончательно следующее выражение для средней потери момента импульса излучающей системой:

$$\overline{\frac{d\mathbf{M}}{dt}} = -\frac{2}{3c^3}\,\overline{[\dot{\mathbf{d}}\,\ddot{\mathbf{d}}]}. \qquad (75,7)$$

Торможение излучением имеет место и при наличии одного движущегося во внешнем поле заряда. Оно равно

$$\mathbf{f} = \frac{2e^2}{3c^3}\ddot{\mathbf{v}}. \qquad (75,8)$$

Для одной частицы можно всегда выбрать такую систему отсчета, в которой она в данный момент времени покоится. Если вычислять в такой системе дальнейшие члены разложения создаваемого зарядом поля, то легко убедиться в том, что при стремлении к нулю радиус вектора $\mathbf{R}$ от заряда к точке наблюдения все эти члены обращаются в нуль. Таким образом, в случае одного заряда формула (75,8) является точным выражением для обратного действия излучения в той системе отсчета, в которой заряд покоится.

Надо, однако, иметь в виду, что описание действия заряда «самого на себя» с помощью силы торможения вообще не является

вполне удовлетворительным и содержит в себе противоречия. Уравнение движения заряда в отсутствие внешнего поля, на который действует только сила (75,8), имеет вид

$$m\dot{\mathbf{v}}=\frac{2e^2}{3c^3}\ddot{\mathbf{v}}.$$

Это уравнение имеет, кроме тривиального решения $\mathbf{v}=\text{const}$, еще решение, в котором ускорение $\dot{\mathbf{v}}$ пропорционально $\exp\,(3mc^3t/2e^2)$, т. е. неограниченно возрастает со временем. Это значит, например, что заряд, прошедший через какое-нибудь поле, по выходе из поля должен был бы неограниченно «самоускоряться». Абсурдность этого результата свидетельствует об ограниченной применимости формулы (75,8).

Может возникнуть вопрос о том, каким образом электродинамика, удовлетворяющая закону сохранения энергии, может привести к абсурдному результату, в котором свободная частица неограниченно увеличивает свою энергию. Корни этой трудности находятся, в действительности, в упоминавшейся ранее (§ 37) бесконечной электромагнитной «собственной массе» элементарных частиц. Когда мы пишем в уравнениях движения конечную массу заряда, то мы этим, по существу, приписываем ему формально бесконечную же отрицательную «собственную массу» не электромагнитного происхождения, которая вместе с электромагнитной массой приводила бы к конечной массе частицы. Поскольку, однако, вычитание одной из другой двух бесконечностей не является вполне корректной математической операцией, то это и приводит к ряду дальнейших трудностей, в том числе и к указанной здесь.

В системе координат, в которой скорость частицы мала, уравнение движения с учетом торможения излучением имеет вид

$$m\dot{\mathbf{v}}=e\mathbf{E}+\frac{e}{c}[\mathbf{vH}]+\frac{2e^2}{3c^3}\ddot{\mathbf{v}}. \tag{75,9}$$

По изложенным соображениям, это уравнение применимо только постольку, поскольку сила торможения мала по сравнению с силой, действующей на заряд со стороны внешнего поля.

Для выяснения физического смысла этого условия поступим следующим образом. В системе отсчета, в которой заряд в данный момент покоится, вторая производная от скорости по времени равна, при пренебрежении силой торможения:

$$\ddot{\mathbf{v}}=\frac{e}{m}\dot{\mathbf{E}}+\frac{e}{mc}[\dot{\mathbf{v}}\mathbf{H}].$$

Во втором члене подставляем (ограничиваясь той же точностью) $\dot{\mathbf{v}}=e\mathbf{E}/m$ и получаем:

$$\ddot{\mathbf{v}}=\frac{e}{m}\dot{\mathbf{E}}+\frac{e^2}{m^2c}[\mathbf{EH}].$$

Соответственно этому сила торможения будет состоять из двух членов:

$$\mathbf{f} = \frac{2e^3}{3mc^3}\dot{\mathbf{E}} + \frac{2e^4}{3m^2c^4}[\mathbf{EH}]. \qquad (75,10)$$

Если ω есть частота движения, то $\dot{\mathbf{E}}$ пропорционально $\omega\mathbf{E}$ и, следовательно, первый член порядка величины $\frac{e^3\omega}{mc^3}E$; второй же — порядка $\frac{e^4}{m^2c^4}EH$. Поэтому условие малости сил торможения по сравнению с действующей на заряд внешней силой eE дает, во-первых,

$$\frac{e^2}{mc^3}\omega \ll 1,$$

или, вводя длину волны $\lambda \sim c/\omega$:

$$\lambda \gg \frac{e^2}{mc^2}. \qquad (75,11)$$

Таким образом, формула (75,8) для торможения излучением применима только в том случае, если длина падающей на заряд волны велика по сравнению с «радиусом» заряда e^2/mc^2. Мы видим, что расстояния порядка e^2/mc^2 опять оказываются той границей, за которой электродинамика приходит в противоречие сама с собой (см. § 37).

Во-вторых, сравнивая второй член в силе торможения с силой eE, находим условие

$$H \ll \frac{m^2c^4}{e^3}. \qquad (75,12)$$

Таким образом, необходимо также, чтобы само поле не было слишком велико. Поля порядка m^2c^4/e^3 тоже являются границей, за которой классическая электродинамика приводит к внутренним противоречиям. И здесь надо иметь в виду, что в действительности электродинамика становится неприменимой, вследствие квантовых эффектов, уже при значительно меньших полях[1]).

Напомним во избежание недоразумений, что длина волны в (75,11) и величина поля в (75,12) относятся к той системе отсчета, в которой частица в данный момент покоится.

Задачи

1. Определить время, в течение которого два притягивающихся заряда, совершающих эллиптическое движение (со скоростью, малой в сравнении со скоростью света) и теряющие энергию вследствие излучения, «упадут» друг на друга.

---

[1]) При полях порядка $m^2c^3/\hbar e$, где $\hbar$ — постоянная Планка.

Решение. Предполагая относительную потерю энергии за один оборот малой, мы можем положить производную по времени от энергии, равной средней интенсивности излучения (определенной в задаче 1 § 70):

$$\frac{d|\mathscr{E}|}{dt}=\frac{(2|\mathscr{E}|)^{3/2}\mu^{5/2}\alpha^3}{3c^3M^5}\left(\frac{e_1}{m_1}-\frac{e_2}{m_2}\right)^2\left(3-\frac{2|\mathscr{E}|M^2}{\mu\alpha^2}\right), \tag{1}$$

где $\alpha=|e_1e_2|$. Наряду с энергией, частицы теряют момент количества движения. Потеря момента в единицу времени дается формулой (75,7); подставляя в нее выражение (70,1) для $\mathbf{d}$ и замечая, что $\mu\ddot{\mathbf{r}}=-\alpha\mathbf{r}/r^3$ и $\mathbf{M}=\mu[\mathbf{rv}]$, находим:

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt}=-\frac{2\alpha}{3c^3}\left(\frac{e_1}{m_1}-\frac{e_2}{m_2}\right)^2\frac{\mathbf{M}}{r^3}.$$

Это выражение усредняем по периоду движения. Учитывая медленность изменения $\mathbf{M}$, в правой стороне равенства достаточно усреднить лишь r^{-3}; это среднее значение вычисляется точно так, как вычислялось в задаче 1 § 70 среднее значение от r^{-4}. В результате находим для средней потери момента в единицу времени следующее выражение:

$$\frac{dM}{dt}=-\frac{2\alpha(2\mu|\mathscr{E}|)^{3/2}}{3c^3M^2}\left(\frac{e_1}{m_1}-\frac{e_2}{m_2}\right)^2 \tag{2}$$

[знак среднего, как и в (1), опускаем]. Разделив (1) на (2), получим дифференциальное уравнение

$$\frac{d|\mathscr{E}|}{dM}=-\frac{\mu\alpha^2}{2M^3}\left(3-2\frac{|\mathscr{E}|M^2}{\mu\alpha^2}\right),$$

интегрируя которое, найдем:

$$|\mathscr{E}|=\frac{\mu\alpha^2}{2M^2}\left(1-\frac{M^3}{M_0^3}\right)+\frac{|\mathscr{E}_0|}{M_0}M. \tag{3}$$

Постоянная интегрирования выбрана таким образом, чтобы при $M=M_0$ было $\mathscr{E}=\mathscr{E}_0$, где M_0 и $\mathscr{E}_0$ — начальные значения момента и энергии частиц.

«Падению» частиц друг на друга соответствует $M\to 0$. Из (3) видно, что при этом, как и следовало, $\mathscr{E}\to-\infty$.

Заметим, что произведение $|\mathscr{E}|M^2$ стремится к $\mu\alpha^2/2$ и из формулы (70,3) видно, что эксцентриситет $\varepsilon\to 0$, т. е. по мере сближения частиц орбита приближается к окружности. Подставляя (3) в (2), определяем производную dt/dM, выраженную как функция от M, после чего интегрирование по dM в пределах от M_0 до нуля дает время падения:

$$t_{\text{пад}}=\frac{c^3M_0^5}{\alpha\sqrt{2|\mathscr{E}_0|\mu^3}}\left(\frac{e_1}{m_1}-\frac{e_2}{m_2}\right)^{-2}\left(\sqrt{\mu\alpha^2}+\sqrt{2M_0^2|\mathscr{E}_0|}\right)^{-2}.$$

2. Найти функцию Лагранжа системы из двух одинаковых заряженных частиц с точностью до членов четвертого порядка[1]) (*Я. А. Смородинский* и *В. Н. Голубенков*, 1956).

---

[1]) См. примечание на стр. 218. Члены третьего порядка из функции Лагранжа выпадают автоматически: члены соответствующего порядка в создаваемом частицами поле определяются производной по времени от дипольного момента [см. (75,3)], который в данном случае сохраняется.

Решенне. Вычисления удобио производить по схеме, несколько отлнчной от использованной в § 65. Исходнм из выражеиия для функции Лагранжа частиц вместе с создаваемым им полем

$$L=\int\left\{\frac{1}{8\pi}(\mathbf{E}^2-\mathbf{H}^2)+\frac{1}{c}\,\mathbf{jA}-\rho\varphi\right\}dV-\sum_a m_ac^2\sqrt{1-\frac{v_a^2}{c^2}}\,.$$

Написав здесь

$$\mathbf{E}^2-\mathbf{H}^2=\mathbf{E}\left(-\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}-\nabla\varphi\right)-\mathbf{H}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{A}$$

и произведя интегрирование по частям, получим:

$$\frac{1}{8\pi}\int(\mathbf{E}^2-\mathbf{H}^2)\,dV=$$

$$=-\frac{1}{8\pi}\oint\{\mathbf{E}\varphi+[\mathbf{AH}]\}\,d\mathbf{f}-\frac{1}{8\pi c}\frac{d}{dt}\int\mathbf{EA}\,dV-\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{c}\,\mathbf{jA}-\rho\varphi\right)dV.$$

Для системы, не излучающей дипольио, интеграл по бесконечно удаленной поверхиости ие дает вклада в члены порядка $1/c^4$. Член же с полной производной по времени вообще может быть опущен нз функции Лагранжа. Таким образом, искомые члены четвертого порядка в фуикции Лагранжа содержатся в выражеиин

$$L=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{c}\,\mathbf{jA}-\rho\varphi\right)dV-\sum_a m_ac^2\sqrt{1-\frac{v_a^2}{c^2}}\,.$$

Продолжая разложение, производившееся в § 65, найдем члены четвертого порядка в потенциалах поля (φ и $\mathbf{A}/c$), создаваемого зарядом 1 в точке нахождения заряда 2:

$$\varphi_1(2)=\frac{e}{24c^4}\frac{\partial^4R^3}{\partial t^4}\,,\qquad \frac{1}{c}\,\mathbf{A}_1(2)=\frac{e}{2c^4}\frac{\partial^2}{\partial t^2}(R\mathbf{v}_1).$$

Преобразованием (18,3) с соответствующей функцией f можно привести эти потенциалы к эквивалентному виду

$$\varphi_1(2)=0,\quad \frac{1}{c}\,\mathbf{A}_1(2)=\frac{e}{2c^4}\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2}(R\mathbf{v}_1)+\frac{1}{12}\frac{\partial^3}{\partial t^3}(\nabla R^3)\right] \tag{1}$$

(дифференцирования $\partial/\partial t$ производятся при фиксированиом положении точки наблюдения, т. е. точки 2; дифференцирования ∇ производятся по координатам точки наблюдения).

Члены 2-го порядка в функции Лагранжа даются теперь выражением[1]):

$$L^{(4)}=\frac{e}{2c}[\mathbf{A}_1(2)\,\mathbf{v}_2+\mathbf{A}_2(1)\,\mathbf{v}_1]+\frac{m}{16c^4}\left(v_1^6+v_2^6\right). \tag{2}$$

Произведя в (1) часть дифференцирований, представим $\mathbf{A}_1(2)$ в виде

$$\frac{1}{c}\,\mathbf{A}_1(2)=\frac{e}{8c^4}\frac{\partial\mathbf{F}_1}{\partial t}\,,\qquad \mathbf{F}_1=\frac{\partial}{\partial t}\,[3R\mathbf{v}_1-R\mathbf{n}\,(\mathbf{nv}_1)]$$

[1]) Здесь опущены бесконечные члены, связанные с действием на частицы их собственных полей. Эта операция соответствует «перенормировке» масс, входящих в функцию Лагранжа (ср. примечание на стр. 223).

(где $\mathbf{n}$ — единичный вектор в направлении от точки 1 к точке 2). Перед дальнейшим вычислением удобно сразу исключить из $L^{(4)}$ члены, содержащие производные от скоростей по времени выше первого порядка; для этого замечаем, что

$$\frac{1}{c}\,\mathbf{A}_1(2)\,\mathbf{v}_2=\frac{e}{8c^4}\,\mathbf{v}_2\,\frac{\partial\mathbf{F}_1}{\partial t}=\frac{e}{8c^4}\left\{\frac{d}{dt}(\mathbf{v}_2\mathbf{F})-(\mathbf{v}_2\nabla)(\mathbf{v}_2\mathbf{F})-\mathbf{F}\dot{\mathbf{v}}_2\right\},$$

где

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{v}_2\mathbf{F})=\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{v}_2\mathbf{F})+(\mathbf{v}_2\nabla)(\mathbf{v}_2\mathbf{F})$$

есть полная производная по времени (дифференцирование по обоим концам вектора $\mathbf{R}$!) и может быть опущена из функции Лагранжа. Ускорения же исключаются из получающегося выражения с помощью уравнений движения первого приближения: $m\dot{\mathbf{v}}_1=-e^2\mathbf{n}/R^2$, $m\dot{\mathbf{v}}_2=e^2\mathbf{n}/R^2$. После довольно длинного вычисления получается окончательно:

$$L^{(4)}=\frac{e^2}{8c^4R}\left\{[-v_1^2v_2^2+2(\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2)^2-3(\mathbf{n}\mathbf{v}_1)^2(\mathbf{n}\mathbf{v}_2)^2+(\mathbf{n}\mathbf{v}_1)^2v_2^2+(\mathbf{n}\mathbf{v}_2)^2v_1^2]+\right.$$
$$\left.+\frac{e^2}{mR}[-v_1^2-v_2^2+3(\mathbf{n}\mathbf{v}_1)^2+3(\mathbf{n}\mathbf{v}_2)^2]+\frac{2e^4}{m^2R^2}\right\}+\frac{m}{16c^4}(v_1^6+v_2^6).$$

Из симметрии по отношению к двум одинаковым частицам заранее очевидно, что в системе отсчета, в которой покоится их центр инерции, будет $\mathbf{v}_1=-\mathbf{v}_2$. Тогда члены четвертого порядка в функции Лагранжа

$$L^{(4)}=\frac{e^2}{8c^4R}\left\{\frac{1}{16}[v^4-3(\mathbf{n}\mathbf{v})^4+2(\mathbf{n}\mathbf{v})^2v^2]+\frac{e^2}{2mR}[3(\mathbf{n}\mathbf{v})^2-v^2]+\frac{2e^4}{m^2R^2}\right\}+\frac{mv^6}{2^9c^4},$$

где $\mathbf{v}=\mathbf{v}_2-\mathbf{v}_1$.

§ 76. Торможение излучением в релятивистском случае

Выведем релятивистское выражение для торможения излучением (для одного заряда), применимое и при движении со скоростями порядка скорости света. Эта сила будет теперь 4-вектором g^i, которым надо дополнить уравнение движения заряда, написанное в четырехмерном виде:

$$mc\,\frac{du^i}{ds}=\frac{e}{c}F^{ik}u_k+g^i. \qquad (76,1)$$

Для определения g^i заметим, что при $v\ll c$ его три пространственные компоненты должны перейти в компоненты вектора $\mathbf{f}/c$ (75,8). Легко видеть, что этим свойством обладает 4-вектор $\frac{2e^2}{3c}\frac{d^2u^i}{ds^2}$. Он, однако, не удовлетворяет тождеству $g^iu_i=0$, которое имеет место для компонент всякого 4-вектора силы. Для того чтобы удовлетворить этому условию, надо прибавить к написанному выражению некоторый дополнительный 4-вектор, составленный из 4-скорости u^i и ее производных. Три пространственные компоненты этого вектора должны обращаться в предельном случае $\mathbf{v}=0$ в нуль так, чтобы

не изменить правильного значения f, которое уже дается выражением $\frac{2e^2}{3c}\frac{d^2u^i}{ds^2}$. Этим свойством обладает 4-вектор u^i, и потому искомый дополнительный член должен иметь вид αu^i. Скаляр α надо выбрать так, чтобы удовлетворить соотношению $g^iu_i=0$. В результате находим:

$$g^i=\frac{2e^2}{3c}\left(\frac{d^2u^i}{ds^2}-u^iu^k\frac{d^2u_k}{ds^2}\right). \qquad (76,2)$$

Полученную формулу можно переписать в другом виде, выразив согласно уравнениям движения производные d^2u^i/ds^2 через тензор действующего на частицу внешнего электромагнитного поля:

$$\frac{du^i}{ds}=\frac{e}{mc^2}F^{ik}u_k, \quad \frac{d^2u^i}{ds^2}=\frac{e}{mc^2}\frac{\partial F^{ik}}{\partial x^l}u_ku^l+\frac{e^2}{m^2c^4}F^{ik}F_{kl}u^l.$$

При подстановке надо иметь в виду, что произведение антисимметричного по индексам i, k тензора $\partial F^{ik}/\partial x^l$ на симметричный тензор u_iu_k дает нуль. Итак,

$$g^i=\frac{2e^3}{3mc^3}\frac{\partial F^{ik}}{\partial x^l}u_ku^l-\frac{2e^4}{3m^2c^5}F^{il}F_{kl}u^k+\frac{2e^4}{3m^2c^5}(F_{kl}u^l)(F^{km}u_m)u^i. \qquad (76,3)$$

Интеграл от 4-силы g^i, взятый по мировой линии движения заряда, пролетающего через заданное поле, должен совпасть (с обратным знаком) с полным излучением зарядом 4-импульса ΔP^i [подобно тому как среднее значение работы силы f в нерелятивистском случае совпадает с интенсивностью дипольного излучения — см. (75,6)]. Легко убедиться в том, что это действительно так. Первый член в (76,2) при интегрировании обращается в нуль, поскольку на бесконечности частица не имеет ускорения, т. е. $du^i/ds=0$. Второй член интегрируем по частям и получаем:

$$-\int g_idx^i=\frac{2e^2}{3c}\int u^k\frac{d^2u_k}{ds^2}ds=-\frac{2e^2}{3c}\int\frac{du_k}{ds}\frac{du^k}{ds}ds,$$

что в точности совпадает с (73,4).

Когда скорость частицы приближается к скорости света, в пространственных компонентах 4-вектора (76,3) наиболее быстро возрастает часть, происходящая от члена, содержащего тройные произведения компонент 4-скорости. Сохраняя поэтому лишь этот член в (76,3) и учитывая связь (9,18) между пространственными компонентами 4-вектора g^i и трехмерной силой f, находим для последней:

$$\mathbf{f}=\frac{2e^4}{3m^2c^5}(F_{kl}u^l)(F^{km}u_m)\mathbf{v}.$$

Следовательно, в этом случае сила f направлена против направления скорости частицы; выбирая последнее в качестве оси x и раскрывая

четырехмерные выражения, получим:

$$f_x = -\frac{2e^4}{3m^2c^4}\,\frac{(E_y - H_z)^2 + (E_z + H_y)^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \tag{76,4}$$

(везде, за исключением знаменателя, положено $v = c$). Мы видим, что для ультрарелятивистской частицы сила торможения пропорциональна квадрату ее энергии.

Обратим внимание на следующее интересное обстоятельство. В предыдущем параграфе было показано, что полученные выражения для торможения излучением применимы лишь в таких полях, величина которых в системе покоя частицы (система K_0) мала по сравнению с m^2c^4/e^3. Пусть F есть порядок величины внешнего поля в системе отсчета K, в которой частица движется со скоростью $\mathbf{v}$. Тогда в системе K_0 поле имеет порядок величины $F/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ (см. формулы преобразования в § 24). Поэтому F должно удовлетворять условию

$$\frac{e^3 F}{m^2c^4\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \ll 1. \tag{76,5}$$

Между тем, отношение силы торможения (76,4) к внешней силе ($\sim eF$) по порядку величины есть

$$\frac{e^3 F}{m^2c^4\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)},$$

и мы видим, что соблюдение условия (76,5) не препятствует тому, что сила торможения может оказаться (при достаточно большой энергии частицы) большой по сравнению с обычной лоренцевой силой, действующей на заряд в электромагнитном поле[1]). Таким образом, для ультрарелятивистской частицы может иметь место случай, когда торможение излучением является основной действующей на нее силой.

В этом случае потерю энергии (кинетической) частицей на единице длины ее пути можно считать равной одной только силе тор-

---

[1]) Подчеркнем, что этот результат, разумеется, ни в какой степени не противоречит произведенному выше выводу релятивистского выражения для 4-силы g^i, предполвгавшему ее «малость» по срввнению с 4-силой $\frac{e}{c}F^{ik}u_k$. Достаточно соблюдения условия малости компонент одного 4-вектора по сравнению с другим хотя бы в одной системе отсчета; в силу релятивистской инвариантности получающиеся на основании такого предположения четырехмерные формулы будут автоматически справедливы и во всякой другой системе отсчета.

можения f_x; имея в виду, что последняя пропорциональна квадрату энергии частицы, напишем:

$$-\frac{d\mathscr{E}_{\text{кин}}}{dx} = k(x)\,\mathscr{E}^2_{\text{кин}},$$

где посредством $k(x)$ обозначен зависящий от координаты x коэффициент, выражающийся согласно (76,4) через поперечные компоненты поля. Интегрируя это дифференциальное уравнение, найдем:

$$\frac{1}{\mathscr{E}_{\text{кин}}} = \frac{1}{\mathscr{E}_0} + \int\limits_{-\infty}^{x} k(x)\,dx,$$

где $\mathscr{E}_0$ обозначает начальную энергию частицы (энергия при $x \to \infty$). В частности, конечная энергия частицы $\mathscr{E}_1$ (после пролетания частицы через поле) определяется формулой

$$\frac{1}{\mathscr{E}_1} = \frac{1}{\mathscr{E}_0} + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} k(x)\,dx.$$

Мы видим, что при $\mathscr{E}_0 \to \infty$ конечная энергия $\mathscr{E}_1$ стремится к постоянному, не зависящему от $\mathscr{E}_0$ пределу (*И. Померанчук*, 1939). Отсюда следует, что после пролетания через поле энергия частицы не может превышать значения $\mathscr{E}_{\text{кр}}$, определяемого равенством

$$\frac{1}{\mathscr{E}_{\text{кр}}} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} k(x)\,dx$$

или, подставляя выражение для $k(x)$,

$$\frac{1}{\mathscr{E}_{\text{кр}}} = \frac{2}{3m^2c^4}\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} [(E_y - H_z)^2 + (E_z + H_y)^2]\,dx. \qquad (76,6)$$

Задачи

1. Определить предельную энергию, которой может обладать частица после пролетания через поле магнитного диполя $\mathfrak{m}$; вектор $\mathfrak{m}$ и направление движения лежат в одной плоскости.

Решение. Выбираем плоскость, проходящую через вектор $\mathfrak{m}$ и направление движения, в качестве плоскости xz, причем частица движется параллельно оси x на расстоянии ρ от нее. Для действующих на частицу поперечных компонент поля магнитного диполя имеем [см. (44,4)]:

$$H_y = 0,$$

$$H_z = \frac{3(\mathfrak{m}\mathbf{r})z - \mathfrak{m}_z r^2}{r^5} = \frac{\mathfrak{m}}{(\rho^2 + x^2)^{5/2}}\left\{3(\rho\cos\varphi + x\sin\varphi)\,\rho - (\rho^2 + x^2)\cos\varphi\right\}$$

(φ — угол между $\mathfrak{m}$ и осью z). Подставляя в (76,6) и производя интегрирование, получим:

$$\frac{1}{\mathscr{E}_{\text{кр}}}=\frac{\mathfrak{m}^2\pi}{64m^2c^4\rho^5}\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2(15+26\cos^2\varphi).$$

2. Написать трехмерное выражение для силы торможения в релятивистском случае.

Решение. Вычисляя пространственные компоненты 4-вектора (76,3), получим:

$$\mathbf{f}=\frac{2e^3}{3mc^3}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}\left\{\left(\frac{\partial}{\partial t}+(\mathbf{v}\nabla)\right)\mathbf{E}+\frac{1}{c}\left[\mathbf{v}\left(\frac{\partial}{\partial t}+(\mathbf{v}\nabla)\right)\mathbf{H}\right]\right\}+$$
$$+\frac{2e^4}{3m^2c^4}\left\{[\mathbf{E}\mathbf{H}]+\frac{1}{c}[\mathbf{H}[\mathbf{H}\mathbf{v}]]+\frac{1}{c}\mathbf{E}(\mathbf{v}\mathbf{E})\right\}-$$
$$-\frac{2e^4}{3m^2c^5\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}\mathbf{v}\left\{\left(\mathbf{E}+\frac{1}{c}[\mathbf{v}\mathbf{H}]\right)^2-\frac{1}{c^2}(\mathbf{E}\mathbf{v})^2\right\}.$$

§ 77. Спектральное разложение излучения в ультрарелятивистском случае

Выше (§ 73) было показано, что излучение ультрарелятивистской частицы направлено в основном вперед, вдоль скорости частицы: оно почти целиком заключено в малом интервале углов

$$\Delta\theta\sim\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

вокруг направления $\mathbf{v}$.

Для вычисления спектрального разложения излучения существенно взаимоотношение между величиной этого интеграла и полным углом отклонения α частицы при пролете через внешнее электромагнитное поле.

Угол α может быть оценен следующим образом. Поперечное (к направлению движения) изменение импульса частицы порядка величины произведения поперечной силы eF[1]) на время пролетания через поле $t\sim a/v\approx a/c$ (где a — расстояние, на котором поле заметно отлично от нуля). Отношение этой величины к импульсу

$$p=\frac{mv}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\approx\frac{mc}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

[1]) Если выбрать ось x вдоль направления движения частицы, то $(eF)^2$ есть сумма квадратов y- и z-составляющих лоренцевой силы $e\mathbf{E}+\frac{e}{c}[\mathbf{v}\mathbf{H}]$, в которой можно при этом положить $v\approx c$:

$$F^2=(E_y-H_z)^2+(E_z+H_y)^2.$$

и определит порядок величины малого угла α:

$$\alpha \sim \frac{eFa}{mc^2}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\,.$$

Разделив его на $\Delta\theta$, найдем:

$$\frac{\alpha}{\Delta\theta} \sim \frac{eFa}{mc^2}\,. \tag{77,1}$$

Обратим внимание на то, что это отношение не зависит от скорости частицы и целиком определяется свойствами самого внешнего поля.

Предположим сначала, что

$$eFa \gg mc^2, \tag{77,2}$$

т. е. полный угол отклонения частицы велик по сравнению с $\Delta\theta$. Тогда мы можем утверждать, что излучение в заданном направлении происходит в основном с того участка траектории, на котором скорость частицы почти параллельна этому направлению (образует с ним угол в интервале $\Delta\theta$) и длина этого участка мала по сравнению с a. На таком участке поле F можно считать постоянным и поскольку малый участок кривой можно рассматривать как отрезок окружности, то мы можем применить результаты, полученные в § 74 для излучения при равномерном движении по окружности (заменив при этом H на F). В частности, можно утверждать, что основная часть излучения будет сосредоточена в области частот

$$\omega \sim \frac{eF}{mc\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)} \tag{77,3}$$

[см. (74,16)].

В обратном предельном случае

$$eFa \ll mc^2 \tag{77,4}$$

полный угол отклонения частицы мал по сравнению с $\Delta\theta$. В этом случае все излучение происходит в основном в один узкий интервал углов $\Delta\theta$ вокруг направления движения, определяясь при этом всей траекторией частицы.

Для вычисления спектрального разложения интенсивности в этом случае удобно исходить из выражения для поля в волновой зоне излучения в форме Лиенара—Вихерта (73,8). Вычислим компоненту Фурье

$$\mathbf{E}_\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E} e^{i\omega t}\, dt.$$

Выражение в правой стороне формулы (73,8) есть функция запаздывающего момента времени t', определяющегося из условия $t' = t - R(t')/c$. На больших расстояниях от частицы, движущейся

с почти постоянной скоростью $\mathbf{v}$, имеем:

$$t' \approx t - \frac{R_0}{c} + \frac{1}{c}\mathbf{n}\mathbf{r}(t') \approx t - \frac{R_0}{c} + \frac{1}{c}\mathbf{n}\mathbf{v}t'$$

($\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) \approx \mathbf{v}t$ — радиус-вектор частицы), или

$$t = t'\left(1 - \frac{\mathbf{n}\mathbf{v}}{c}\right) + \frac{R_0}{c}.$$

Интегрирование по dt заменяем интегрированием по dt', положив

$$dt = \left(1 - \frac{\mathbf{n}\mathbf{v}}{c}\right)dt',$$

и получаем:

$$\mathbf{E}_\omega = \frac{e}{c^2}\frac{e^{ikR_0}}{R_0\left(1 - \frac{\mathbf{n}\mathbf{v}}{c}\right)^2}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\mathbf{n}\left[\left(\mathbf{n} - \frac{\mathbf{v}}{c}\right)\mathbf{w}(t')\right]\right]e^{i\omega t'\left(1 - \frac{\mathbf{n}\mathbf{v}}{c}\right)}dt'.$$

Скорость $\mathbf{v}$ рассматривается здесь везде как постоянная величина; переменным является лишь ускорение $\mathbf{w}(t')$. Введя обозначение

$$\omega' = \omega\left(1 - \frac{\mathbf{n}\mathbf{v}}{c}\right) \qquad (77,5)$$

и соответствующую этой частоте компоненту Фурье ускорения, напишем $\mathbf{E}_\omega$ в виде

$$\mathbf{E}_\omega = \frac{e}{c^2}\frac{e^{ikR_0}}{R_0}\left(\frac{\omega}{\omega'}\right)^2\left[\mathbf{n}\left[\left(\mathbf{n} - \frac{\mathbf{v}}{c}\right)\mathbf{w}_{\omega'}\right]\right].$$

Наконец, согласно (66,9), находим окончательно для энергии, излученной в телесный угол do с частотой в $d\omega$:

$$d\mathscr{E}_{\mathbf{n}\omega} = \frac{e^2}{2\pi c^3}\left(\frac{\omega}{\omega'}\right)^4\left|\left[\mathbf{n}\left[\left(\mathbf{n} - \frac{\mathbf{v}}{c}\right)\mathbf{w}_{\omega'}\right]\right]\right|^2 do\,\frac{d\omega}{2\pi}. \qquad (77,6)$$

Оценку порядка величины частот, в области которых сосредоточена основная часть излучения в случае (77,4), легко сделать, заметив, что компонента Фурье $\mathbf{w}_{\omega'}$ заметно отлична от нуля лишь, если время $1/\omega'$ или, что то же,

$$\frac{1}{\omega\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}$$

будет того же порядка, что и время $a/v \sim a/c$, в течение которого заметным образом меняется ускорение частицы. Поэтому находим:

$$\omega \sim \frac{c}{a\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}. \qquad (77,7)$$

Зависимость этих частот от энергии такая же, как и в (77,3), но коэффициент иной.

В произведенном [для обоих случаев (77,2) и (77,4)] исследовании подразумевалось, что полная потеря энергии частицей при ее прохождении через поле относительно мала. Покажем теперь, что к первому из рассмотренных случаев приводится также вопрос об излучении ультрарелятивистской частицей, полная потеря энергии которой сравнима с ее первоначальной энергией.

Потерю энергии частицей в поле можно определить как работу силы лоренцева трения. Работа силы (76,4) на пути $\sim a$ есть, по порядку величины,

$$af \sim \frac{e^4F^2a}{m^2c^4\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}.$$

Для того чтобы она оказалась сравнимой с полной энергией частицы $mc^2/\sqrt{1-v^2/c^2}$, поле должно существовать на расстояниях

$$a \sim \frac{m^3c^6}{e^4F^2}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}.$$

Но тогда автоматически соблюдается условие (77,2)

$$aeF \sim \frac{m^3c^6}{e^3F}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \gg mc^2,$$

поскольку поле F во всяком случае должно удовлетворять условию (76,5)

$$\frac{F}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \ll \frac{m^2c^4}{e^3},$$

без которого вообще не может применяться обычная электродинамика.

Задачи

1. Определить спектральное распределение полной (по всем направлениям) интенсивности излучения при условии (77,2).

Решение. Излучение с каждого элемента длины траектории определяется формулой (74,11), в которой надо заменить H на значение F поперечной силы в данной точке и, кроме того, надо перейти от дискретного спектра частот к непрерывному. Этот переход осуществляется формальным умножением на dn и заменой

$$I_n\,dn = I_n\frac{dn}{d\omega}\,d\omega = I_n\frac{d\omega}{\omega_0}.$$

Интегрируя затем интенсивность по всему времени, найдем спектральное распределение полного излучения в следующем виде:

$$d\mathscr{E}_\omega = -\,d\omega\,\frac{2e^2\omega\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}{c\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{\Phi'(u)}{u}+\frac{1}{2}\int\limits_{u}^{\infty}\Phi(u)\,du\right]dt,$$

где $\Phi(u)$ — функция Эйри от аргумента

$$u=\left[\frac{mc\omega}{eF}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\right]^{2/3}.$$

Подынтегральное выражение зависит от переменной интегрирования t неявным образом через величину u (F, а с ним и u, меняются вдоль траектории частицы; при заданном движении это изменение можно рассматривать как зависимость от времени).

2. Определить спектральное распределение полной (по всем направлениям) излученной энергии при условии (77,4).

Решение. Имея в виду, что основную роль играет излучение под малыми углами к направлению движения, пишем:

$$\omega'=\omega\left(1-\frac{v}{c}\cos\theta\right)\approx\omega\left(1-\frac{v}{c}+\frac{\theta^2}{2}\right)\approx\frac{\omega}{2}\left(1-\frac{v^2}{c^2}+\theta^2\right).$$

Интегрирование выражения (77,6) по углам $do=\sin\theta\, d\theta\, d\varphi\approx\theta\, d\theta\, d\varphi$ заменяем интегрированием по $d\varphi\, d\omega'/\omega$. При раскрытии квадрата двойного векторного произведения в (77,6) следует иметь в виду, что в ультрарелятивистском случае продольная составляющая ускорения мала по сравнению с поперечной (в отношении $1-v^2/c^2$) и в данном случае с достаточной степенью точности можно считать $\mathbf{w}$ и $\mathbf{v}$ взаимно перпендикулярными. В результате получим для спектрального распределения полного излучения следующую формулу:

$$d\mathscr{E}_\omega=\frac{e^2\omega\, d\omega}{2\pi c^3}\int\limits_{\frac{\omega}{2}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}^{\infty}\frac{|\mathbf{w}_{\omega'}|^2}{\omega'^2}\left[1-\frac{\omega}{\omega'}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)+\frac{\omega^2}{2\omega'^2}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^2\right]d\omega'.$$

§ 78. Рассеяние свободными зарядами

Если на систему зарядов падает электромагнитная волна, то под ее влиянием заряды приходят в движение. Это движение в свою очередь сопровождается излучением во все стороны; происходит *рассеяние* первоначальной волны.

Рассеяние удобно характеризовать отношением количества энергии, испускаемой рассеивающей системой в данном направлении в единицу времени, к плотности потока энергии падающего на систему излучения. Это отношение имеет размерность площади и называется *эффективным сечением* (или просто *сечением*) *рассеяния*.

Пусть dI есть энергия, излучаемая системой в телесный угол do (в 1 сек.) при падении на нее волны с вектором Пойнтинга $\mathbf{S}$. Тогда сечение рассеяния (в телесный угол do) равно

$$d\sigma=\frac{\overline{dI}}{\overline{S}} \tag{78,1}$$

(черта над буквой означает усреднение по времени). Интеграл σ от $d\sigma$ по всем направлениям есть полное сечение рассеяния.

Рассмотрим рассеяние, производимое одним неподвижным свободным зарядом. Пусть на этот заряд падает плоская монохроматическая линейно поляризованная волна. Ее электрическое поле можно написать в виде

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \cos(\mathbf{kr} - \omega t + \alpha).$$

Мы будем предполагать, что скорость, приобретаемая зарядом под действием поля падающей волны, мала по сравнению со скоростью света, что практически всегда выполняется. Тогда можно считать, что сила, действующая на заряд, равна $e\mathbf{E}$, а силой $\frac{e}{c}[\mathbf{vH}]$ со стороны магнитного поля можно пренебречь. В этом случае можно также пренебречь влиянием смещения заряда при его колебаниях под влиянием поля. Если заряд совершает колебания около начала координат, то можно тогда считать, что на него все время действует то поле, которое имеется в начале координат, т. е.

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \cos(\omega t - \alpha).$$

Поскольку уравнения движения заряда гласят

$$m\ddot{\mathbf{r}} = e\mathbf{E},$$

а его дипольный момент $\mathbf{d} = e\mathbf{r}$, то

$$\ddot{\mathbf{d}} = \frac{e^2}{m}\mathbf{E}. \tag{78,2}$$

Для вычисления рассеянного излучения воспользуемся формулой (67,7) для дипольного излучения; мы имеем право сделать это, поскольку приобретаемая зарядом скорость предполагается малой. Заметим также, что частота излучаемой зарядом (т. е. рассеянной им) волны равна, очевидно, частоте падающей волны.

Подставляя (78,2) в (67,7), находим:

$$dI = \frac{e^4}{4\pi m^2 c^3}[\mathbf{En}]^2\, do.$$

С другой стороны, вектор Пойнтинга падающей волны равен (78,3)

$$S = \frac{c}{4\pi}E^2.$$

Отсюда мы находим сечение рассеяния в телесный угол do:

$$d\sigma = \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \sin^2\theta\, do, \tag{78,4}$$

где θ — угол между направлением рассеяния (вектором $\mathbf{n}$) и направлением электрического поля $\mathbf{E}$ падающей волны. Мы видим, что эффективное сечение рассеяния свободным зарядом не зависит от частоты.

Определим полное сечение σ. Для этого выберем направление $\mathbf{E}$ в качестве полярной оси; тогда $do = \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$ и, интегрируя по $d\theta$ от 0 до π и по $d\varphi$ от 0 до 2π, находим:

$$\sigma = \frac{8\pi}{3}\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \qquad (78,5)$$

(так называемая *формула Томсона*).

Наконец, вычислим дифференциальное сечение $d\sigma$ в случае, когда падающая волна не поляризована (естественный свет). Для этого мы должны усреднить (78,4) по всем направлениям вектора $\mathbf{E}$ в плоскости, перпендикулярной к направлению распространения падающей волны (направлению волнового вектора $\mathbf{k}$). Обозначив через $\mathbf{e}$ единичный вектор в направлении $\mathbf{E}$, пишем:

$$\overline{\sin^2\theta} = 1 - \overline{(\mathbf{ne})^2} = 1 - n_\alpha n_\beta \overline{e_\alpha e_\beta}.$$

Усреднение осуществляется формулой[1])

$$\overline{e_\alpha e_\beta} = \frac{1}{2}\left(\delta_{\alpha\beta} - \frac{k_\alpha k_\beta}{k^2}\right) \qquad (78,6)$$

и дает

$$\overline{\sin^2\theta} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{(\mathbf{nk})^2}{k^2}\right) = \frac{1}{2}(1 + \cos^2\vartheta),$$

где ϑ — угол между направлениями падающей и рассеянной волн (угол рассеяния). Таким образом, искомое сечение рассеяния неполяризованной волны свободным зарядом:

$$d\sigma = \frac{1}{2}\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 (1 + \cos^2\vartheta). \qquad (78,7)$$

Наличие рассеяния приводит к появлению некоторой силы, действующей на рассеивающую частицу. В этом легко убедиться из следующих соображений. Падающая на частицу волна теряет в среднем в единицу времени энергию $c\overline{W}\sigma$, где $\overline{W}$ — средняя плотность энергии, а σ — полное эффективное сечение рассеяния. Поскольку импульс поля равен его энергии, деленной на скорость света, то падающая волна теряет при этом импульс, равный по величине $\overline{W}\sigma$. С другой стороны, в системе отсчета, в которой заряд совершает лишь малые колебания под влиянием силы $e\mathbf{E}$, и его скорость v поэтому мала, полный поток импульса в рассеянной волне равен, с точностью до членов высшего порядка по v/c, нулю (в § 73 было указано, что в системе отсчета, в которой $v = 0$, излучения импульса частицей не

[1]) Действительно, $\overline{e_\alpha e_\beta}$ есть симметричный тензор с равным 1 следом, дающий нуль при умножении на k_α ввиду перпендикулярности $\mathbf{e}$ и $\mathbf{k}$. Этим условиям и удовлетворяет написанное выражение.

происходит). Поэтому весь теряемый падающей волной импульс «поглощается» рассеивающей частицей. Средняя действующая на частицу сила $\overline{\mathbf{f}}$ равна средней величине поглощаемого в единицу времени импульса, т. е.

$$\overline{\mathbf{f}} = \sigma \overline{W} \mathbf{n}_0 \tag{78,8}$$

($\mathbf{n}_0$ — единичный вектор в направлении распространения падающей волны). Отметим, что средняя сила оказывается величиной второго порядка по отношению к полю падающей волны, в то время как «мгновенная» сила (главная часть которой есть $e\mathbf{E}$) — первого порядка по отношению к полю.

Формулу (78,8) можно получить и непосредственно, усредняя силу торможения (75,10). Первый член, пропорциональный $\dot{\mathbf{E}}$, при усреднении обращается в нуль (как и среднее значение основной силы $e\mathbf{E}$). Второй же член дает:

$$\overline{\mathbf{f}} = \frac{2e^4}{3m^2c^4}\overline{E^2}\mathbf{n}_0 = \frac{8\pi}{3}\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \cdot \frac{\overline{E^2}}{4\pi}\mathbf{n}_0,$$

что ввиду (78,5) совпадает с (78,8).

Задачи

1. Определить эффективное сечение рассеяния эллиптически поляризованной волны свободным зарядом.

Решение. Поле волны имеет вид $\mathbf{E} = \mathbf{A}\cos(\omega t + \alpha) + \mathbf{B}\sin(\omega t + \alpha)$, где $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ — взаимно перпендикулярные векторы (см. § 48). Аналогично выводу, проделанному в тексте, находим:

$$d\sigma = \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \frac{[\mathbf{A}\mathbf{n}]^2 + [\mathbf{B}\mathbf{n}]^2}{A^2 + B^2} do.$$

2. Определить эффективное сечение рассеяния линейно поляризованной волны зарядом, совершающим (под влиянием некоторой упругой силы) малые колебания (так называемым осциллятором).

Решение. Уравнение движения заряда в падающей на него волне $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0\cos(\omega t + \alpha)$ есть

$$\ddot{\mathbf{r}} + \omega_0^2\mathbf{r} = \frac{e}{m}\mathbf{E}_0\cos(\omega t + \alpha),$$

где ω_0 — частота его свободных колебаний. Для вынужденных колебаний имеем отсюда:

$$\mathbf{r} = \frac{e\mathbf{E}_0\cos(\omega t + \alpha)}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}.$$

Определяя отсюда $\ddot{\mathbf{d}}$, находим:

$$d\sigma = \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2}\sin^2\theta\, do$$

(θ — угол между $\mathbf{E}$ и $\mathbf{n}$).

3. Определить полное эффективное сечение рассеяния света электрическим диполем, представляющим собой в механическом отношении ротатор. Частота волны ω предполагается большой по сравнению с частотой Ω_0 свободного вращения ротатора.

Решение. При условии $\omega \gg \Omega_0$ собственным вращением ротатора можно пренебречь и рассматривать только вынужденное вращение под влиянием момента сил $[\mathbf{dE}]$, действующего на него со стороны рассеиваемой волны. Уравнение этого движения: $J\dot{\mathbf{\Omega}} = [\mathbf{dE}]$, где J — момент инерции ротатора, а $\mathbf{\Omega}$ — угловая скорость вращения. Изменение же вектора дипольного момента при его вращении без изменения абсолютной величины дается формулой $\dot{\mathbf{d}} = [\mathbf{\Omega d}]$. Из этих двух уравнений находим (опуская член, квадратичный по малой величине $\mathbf{\Omega}$):

$$\ddot{\mathbf{d}} = \frac{1}{J}\,[[\mathbf{dE}]\,\mathbf{d}] = \frac{1}{J}\left\{\mathbf{E}d^2 - (\mathbf{Ed})\,\mathbf{d}\right\}.$$

Предполагая все ориентации диполя в пространстве равновероятными и усредняя $\ddot{\mathbf{d}}^2$ по ним, получим в результате полное эффективное сечение в виде

$$\sigma = \frac{16\pi d^4}{9c^4 J^2}.$$

4. Определить степень деполяризации рассеянного света при рассеянии естественного света свободным зарядом.

Решение. Из соображений симметрии очевидно, что две некогерентные поляризованные компоненты рассеянного света (см. § 50) будут поляризованы линейно: одна в плоскости рассеяния (плоскость, проходящая через падающий и рассеянный лучи), а другая — перпендикулярно к этой плоскости. Интенсивности этих компонент определяются составляющими поля падающей волны в плоскости рассеяния ($\mathbf{E}_{\parallel}$) и перпендикулярно к ней ($\mathbf{E}_{\perp}$) и, согласно (78,3), пропорциональны соответственно $[\mathbf{E}_{\parallel}\mathbf{n}]^2 = E_{\parallel}^2 \cos^2\vartheta$ и $[\mathbf{E}_{\perp}\mathbf{n}]^2 = E_{\perp}^2$ (ϑ — угол рассеяния). Поскольку для естественного падающего света $\overline{E_{\parallel}^2} = \overline{E_{\perp}^2}$, то степень деполяризации [см. определение (50,9)]:

$$\rho = \cos^2\vartheta.$$

5. Определить частоту (ω') света, рассеянного движущимся зарядом.

Решение. В системе координат, где заряд покоится, частота света при рассеянии не меняется ($\omega = \omega'$). В инвариантной форме это соотношение можно написать в виде

$$k'_i u'^i = k_i u^i,$$

где u^i — 4-скорость заряда. Отсюда без труда получаем:

$$\omega'\left(1 - \frac{v}{c}\cos\theta'\right) = \omega\left(1 - \frac{v}{c}\cos\theta\right),$$

где θ и θ' — углы, составляемые падающей и рассеянной волной с направлением движения (v — скорость заряда).

6. Определить угловое распределение рассеяния линейно поляризованной волны зарядом, движущимся с произвольной скоростью v в направлении распространения волны.

Решение. Скорость частицы $\mathbf{v}$ перпендикулярна к полям $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ падающей волны, а потому перпендикулярна и к приобретаемому частицей ускорению $\mathbf{w}$. Интенсивность рассеяния определяется формулой (73,14),

в которой ускорение $\mathbf{w}$ надо выразить через поля $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ согласно формуле, полученной в задаче к § 17. Разделив интенсивность dI на вектор Пойнтинга падающей волны, найдем следующее выражение для сечения рассеяния:

$$d\sigma=\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2\frac{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\left(1-\frac{v}{c}\right)^2}{\left(1-\frac{v}{c}\sin\theta\cos\varphi\right)^6}\left[\left(1-\frac{v}{c}\sin\theta\cos\varphi\right)^2-\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\cos^2\theta\right]do,$$

где теперь θ и φ — полярный угол и азимут направления $\mathbf{n}$ относительно системы координат с осью z вдоль направления $\mathbf{E}$ и осью x вдоль $\mathbf{v}$ [$\cos(\mathbf{n}, \mathbf{E})=\cos\theta$, $\cos(\mathbf{n}, \mathbf{v})=\sin\theta\cos\varphi$].

7. Определить движение заряда под влиянием средней силы, действующей на него со стороны рассеиваемой им волны.

Решение. Сила (78,8), а потому и скорость рассматриваемого движения направлены вдоль распространения падающей волны (ось x). Во вспомогательной системе отсчета K_0, в которой заряд покоится (напоминаем, что речь идет о движении, усредненном по периоду малых колебаний), действующая на него сила равна $\sigma\overline{W}_0$, а приобретаемое им под влиянием этой силы ускорение

$$w_0=\frac{\sigma}{m}\overline{W}_0$$

(индекс нуль относится к величинам в системе отсчета K_0). Преобразование же к исходной системе отсчета K (в которой заряд движется со скоростью v) осуществляется формулой, полученной в задаче к § 7, и формулой (47,7) и дает:

$$\frac{d}{dt}\frac{v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=\frac{1}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}}\frac{dv}{dt}=\frac{\overline{W}\sigma}{m}\frac{1-\frac{v}{c}}{1+\frac{v}{c}}.$$

Интегрируя это уравнение, получаем:

$$\frac{\overline{W}\sigma}{mc}t=\frac{1}{3}\sqrt{\frac{1+\frac{v}{c}}{1-\frac{v}{c}}}\cdot\frac{2-\frac{v}{c}}{1-\frac{v}{c}}-\frac{2}{3},$$

чем и определяется в неявном виде скорость $v=dx/dt$ как функция времени (постоянная интегрирования выбрана так, что $v=0$ при $t=0$).

8. Определить среднюю силу, действующую на заряд, движущийся в электромагнитном поле, представляющем собой наложение волн со всеми возможными, изотропно распределенными направлениями распространения.

Решение. Пишем уравнения движения заряда в четырехмерном виде

$$mc\frac{du^i}{ds}=g^i.$$

Для определения 4-вектора g^i замечаем, что в системе отсчета, в которой заряд в данный момент покоится, при наличии всего одной волны, распространяющейся в определенном направлении (скажем, вдоль оси x), уравнение движения есть $(v_x\equiv v)$:

$$m\frac{dv}{dt}=\sigma W$$

(знак среднего везде опускаем). Это значит, что x-компонента вектора g^i должна перейти в $W\sigma/c$. Таким свойством обладает 4-вектор $\frac{\sigma}{c}T^{ik}u_k$, где T^{ik} — тензор энергии-импульса волны, а u^i — 4-скорость заряда. Далее, g^i должно удовлетворять условию $g^iu_i=0$. Это может быть достигнуто прибавлением к написанному выражению 4-вектора вида αu^i, где α — скаляр. Определяя α соответствующим образом, получим:

$$mc\frac{du^i}{ds}=\frac{\sigma}{c}\left(T^{ik}u_k-u^iu_ku_lT^{kl}\right). \tag{1}$$

В электромагнитном поле изотропного излучения вектор Пойнтинга исчезает в силу симметрии, а тензор напряжений $\sigma_{\alpha\beta}$ должен иметь вид $\mathrm{const}\cdot\delta_{\alpha\beta}$. Замечая также, что должно быть $T^i_i=0$, откуда $\sigma_{\alpha\alpha}=T^0_0=W$, находим:

$$\sigma_{\alpha\beta}=\frac{W}{3}\delta_{\alpha\beta}.$$

Подставляя эти выражения в (1), получим для действующей на заряд силы:

$$\frac{d}{dt}\frac{mv}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=-\frac{4W\sigma v}{3c\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}.$$

Эта сила действует в направлении, противоположном движению заряда, т. е. заряд испытывает торможение. Отметим, что при $v\ll c$ сила торможения пропорциональна скорости заряда:

$$m\frac{dv}{dt}=-\frac{4W\sigma}{3c}v.$$

9. Определить эффективное сечение рассеяния линейно поляризованной волны осциллятором, с учетом торможения излучением.

Решение. Уравнение движения заряда в падающей волне пишем в виде

$$\ddot{\mathbf{r}}+\omega_0^2\mathbf{r}=\frac{e}{m}\mathbf{E}_0e^{-i\omega t}+\frac{2e^2}{3mc^3}\dddot{\mathbf{r}}.$$

В силе торможения можно подставить приближенно $\dddot{\mathbf{r}}=-\omega_0^2\dot{\mathbf{r}}$; тогда получим:

$$\ddot{\mathbf{r}}+\gamma\dot{\mathbf{r}}+\omega_0^2\mathbf{r}=\frac{e}{m}\mathbf{E}_0e^{-i\omega t},$$

где $\gamma=\frac{2e^2}{3mc^3}\omega_0^2$. Отсюда находим:

$$\mathbf{r}=\frac{e}{m}\mathbf{E}_0\frac{e^{-i\omega t}}{\omega_0^2-\omega^2-i\omega\gamma}.$$

Эффективное сечение

$$\sigma=\frac{8\pi}{3}\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2\frac{\omega^4}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\omega^2\gamma^2}.$$

§ 79. Рассеяние волн с малыми частотами

Рассеяние электромагнитных волн системой зарядов отличается от рассеяния одним (неподвижным) зарядом прежде всего тем, что благодаря наличию собственного движения зарядов в системе частота рассеянного излучения может быть отличной от частоты падающей волны. Именно, в спектральное разложение рассеянного излучения входят наряду с частотой ω падающей волны также и частоты ω', отличающиеся от ω на любую из собственных частот движения рассеивающей системы. Рассеяние с изменением частоты называют *некогерентным* (или *комбинационным*) в противоположность *когерентному* рассеянию без изменения частоты.

Предполагая поле падающей волны слабым, мы можем представить плотность тока в виде $\mathbf{j}=\mathbf{j}_0+\mathbf{j}'$, где $\mathbf{j}_0$ — плотность тока в отсутствие внешнего поля, а $\mathbf{j}'$ — изменение тока под влиянием падающей волны. Соответственно этому векторный потенциал (и другие величины) поля системы тоже будет иметь вид $\mathbf{A}=\mathbf{A}_0+\mathbf{A}'$, где $\mathbf{A}_0$ и $\mathbf{A}'$ определяются точками $\mathbf{j}_0$ и $\mathbf{j}'$; потенциал $\mathbf{A}'$ описывает рассеянную системой волну.

Рассмотрим рассеяние волны, частота ω которой мала по сравнению со всеми собственными частотами системы. Рассеяние будет состоять как из когерентной, так и из некогерентной части, но мы будем рассматривать здесь только когерентное рассеяние.

Для вычисления поля рассеянной волны, при достаточно малой частоте ω, всегда можно пользоваться тем разложением запаздывающих потенциалов, которое было произведено в §§ 67 и 71, даже если скорости частиц в системе и не малы по сравнению со скоростью света. Действительно, для законности указанного разложения интеграла

$$\mathbf{A}'=\frac{1}{cR_0}\int \mathbf{j}'_{t-\frac{R_0}{c}+\frac{\mathbf{rn}}{c}}\,dV$$

необходимо лишь, чтобы время $\mathbf{rn}/c\sim a/c$ было мало по сравнению со временем $\sim 1/\omega$; при достаточно малых ω ($\omega\ll c/a$) это условие выполняется независимо от величины скоростей частиц в системе.

Первые члены разложения дают:

$$\mathbf{H}'=\frac{1}{c^2R_0}\{[\ddot{\mathbf{d}}'\mathbf{n}]+[[\ddot{\mathbf{m}}'\mathbf{n}]\,\mathbf{n}]\},$$

где $\mathbf{d}'$, $\mathbf{m}'$ — части дипольного и магнитного моментов системы, которые создаются падающим на систему рассеиваемым излучением. Следующие члены разложения содержат производные по времени более высокого порядка, чем второго, и мы их опускаем.

Компонента $\mathbf{H}'_\omega$ спектрального разложения поля рассеянной волны с частотой, равной частоте падающего излучения, определится этой

же формулой, в которой надо вместо всех величин подставить их компоненты Фурье: $\ddot{\mathbf{d}}'_\omega = -\omega^2\mathbf{d}'_\omega$, $\ddot{\mathbf{m}}'_\omega = -\omega^2\mathbf{m}'_\omega$. Тогда получаем:

$$\mathbf{H}'_\omega = \frac{\omega^2}{c^2R_0}\{[\mathbf{n}\mathbf{d}'_\omega] + [\mathbf{n}[\mathbf{m}'_\omega\mathbf{n}]]\}. \tag{79,1}$$

Следующие члены разложения поля дали бы величины, пропорциональные более высокой степени малой частоты. Если скорости всех частиц в системе малы ($v \ll c$), то в (79,1) можно пренебречь вторым членом по сравнению с первым, поскольку магнитный момент содержит отношение v/c. Тогда

$$\mathbf{H}'_\omega = \frac{1}{c^2R_0}\omega^2[\mathbf{n}\mathbf{d}'_\omega]. \tag{79,2}$$

Если полный заряд системы равен нулю, то при $\omega \to 0$ $\mathbf{d}'_\omega$ и $\mathbf{m}'_\omega$ стремятся к постоянным пределам (если бы сумма зарядов была отлична от нуля, то при $\omega = 0$, т. е. в постоянном поле, система начала бы двигаться как целое). Поэтому при малых ω ($\omega \ll v/a$) можно считать $\mathbf{d}'_\omega$ и $\mathbf{m}'_\omega$ не зависящими от частоты, так что поле рассеянной волны пропорционально квадрату частоты. Интенсивность же ее, следовательно, пропорциональна ω^4. Таким образом, при рассеянии волн с малой частотой эффективное сечение когерентного рассеяния пропорционально четвертой степени частоты падающего излучения[1]).

§ 80. Рассеяние волн с большими частотами

Рассмотрим теперь рассеяние волн системой зарядов в обратном случае, когда частота ω волны велика по сравнению с основными собственными частотами системы. Последние имеют порядок величины $\omega_0 \sim v/a$, так что ω должно удовлетворять условию

$$\omega \gg \omega_0 \sim \frac{v}{a}. \tag{80,1}$$

Кроме того, мы будем предполагать, что скорости зарядов в системе малы ($v \ll c$).

Согласно условию (80,1) период движения зарядов в системе велик по сравнению с периодом волны. Поэтому в течение промежутков времени порядка периода волны движение зарядов в системе можно считать равномерным. Это значит, что при рассмотрении рассеяния коротких волн можно не учитывать взаимодействия зарядов в системе друг с другом, т. е. их можно считать свободными.

Таким образом, при вычислении скорости $\mathbf{v}'$, приобретаемой зарядом в поле падающей волны, мы можем рассматривать каждый заряд

[1]) Этот результат фактически справедлив для рассеяния света не только нейтральными атомами, но и ионами. Благодаря большой массе ядра рассеянием, происходящим от движения иона как целого, можно пренебречь.

системы в отдельности и писать для него уравнение движения в виде

$$m\frac{d\mathbf{v}'}{dt} = e\mathbf{E} = e\mathbf{E}_0 e^{-i(\omega t - \mathbf{kr})},$$

где $\mathbf{k} = \omega\mathbf{n}/c$ — волновой вектор падающей волны. Радиус-вектор заряда является, конечно, функцией времени. В показателе экспоненциального множителя с правой стороны этого уравнения скорость изменения первого члена со временем велика по сравнению со скоростью изменения второго (первая равна ω, а вторая — порядка $kv \sim v\omega/c \ll \omega$). Поэтому при интегрировании уравнений движения можно считать в правой их части $\mathbf{r}$ постоянным. Тогда

$$\mathbf{v}' = -\frac{e}{i\omega m}\mathbf{E}_0 e^{-i(\omega t - \mathbf{kr})}. \qquad (80,2)$$

Для векторного потенциала рассеянной волны (на больших расстояниях от системы) имеем согласно общей формуле (66,2):

$$\mathbf{A}' = \frac{1}{cR_0}\int \mathbf{j}'_{t - \frac{R_0}{c} + \frac{\mathbf{rn}'}{c}}\, dV = \frac{1}{cR_0}\sum (e\mathbf{v}')_{t - \frac{R_0}{c} + \frac{\mathbf{rn}'}{c}},$$

где сумма берется по всем зарядам системы; $\mathbf{n}'$ — единичный вектор в направлении рассеяния. Подставляя сюда (80,2), находим:

$$\mathbf{A}' = -\frac{1}{icR_0\omega} e^{-i\omega\left(t - \frac{R_0}{c}\right)} \mathbf{E}_0 \sum \frac{e^2}{m} e^{-i\mathbf{qr}}, \qquad (80,3)$$

где $\mathbf{q} = \mathbf{k}' - \mathbf{k}$ есть разность между волновым вектором рассеянной $\mathbf{k}' = \omega\mathbf{n}'/c$ и волновым вектором $\mathbf{k} = \omega\mathbf{n}/c$ падающей волн[1]). Значение суммы в (80,3) должно браться в момент времени $t' = t - R_0/c$, так как изменением $\mathbf{r}$ за время $\mathbf{rn}'/c$ можно пренебречь ввиду предполагаемой малости скоростей частиц (индекс t', как обычно, для краткости опускаем). Абсолютная величина вектора $\mathbf{q}$ равна

$$q = 2\frac{\omega}{c}\sin\frac{\vartheta}{2}, \qquad (80,4)$$

где ϑ — угол рассеяния.

При рассеянии на атоме (или молекуле) в сумме в (80,3) можно пренебречь членами, соответствующими ядрам, ввиду большой величины их масс по сравнению с массами электронов. Ниже мы будем иметь в виду именно этот случай, соответственно чему вынесем множитель e^2/m за знак суммы, понимая в нем под e и m заряд и массу электрона.

---

[1]) Строго говоря, волновой вектор $\mathbf{k}' = \omega'\mathbf{n}'/c$, где частота ω' рассеянной волны может отличаться от ω. Разностью $\omega' - \omega \sim \omega_0$ можно, однако, пренебречь в рассматриваемом случае больших частот.

Для поля $\mathbf{H}'$ рассеянной волны находим согласно (66,3):

$$\mathbf{H}' = \frac{[\mathbf{n}'\mathbf{E}_0]}{c^2 R_0} e^{-i\omega\left(t-\frac{R_0}{c}\right)} \frac{e^2}{m} \sum e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}}. \qquad (80,5)$$

Поток энергии в элемент телесного угла в направлении $\mathbf{n}'$ равен

$$\frac{c\,|\mathbf{H}'|^2}{8\pi} R_0^2\, do = \frac{e^4}{8\pi c^3 m^2} [\mathbf{n}'\mathbf{E}_0]^2 \left|\sum e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}}\right|^2 do.$$

Разделив это на поток энергии $c\,|\mathbf{E}_0|^2/8\pi$ падающей волны и вводя угол θ между направлением поля $\mathbf{E}$ падающей волны и направлением рассеяния, находим окончательно сечение рассеяния в виде

$$d\sigma = \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \overline{\left|\sum e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}}\right|^2} \sin^2\theta\, do. \qquad (80,6)$$

Черта обозначает усреднение по времени, т. е. усреднение по движению зарядов в системе; оно производится ввиду того, что рассеяние наблюдается в промежутки времени, большие по сравнению с периодом движения зарядов в системе.

Для длины волны падающего излучения из условия (80,1) следует неравенство $\lambda \ll ac/v$. Что же касается относительной величины λ и a, то возможны оба предельных случая $\lambda \gg a$ и $\lambda \ll a$. В обоих этих случаях общая формула (80,6) значительно упрощается.

При $\lambda \gg a$ в выражении (80,6) $\mathbf{q}\mathbf{r} \ll 1$, поскольку $q \sim 1/\lambda$, $r \sim a$. Заменяя соответственно этому $e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}}$ единицей, имеем:

$$d\sigma = Z^2 \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \sin^2\theta\, do, \qquad (80,7)$$

т. е. рассеяние пропорционально квадрату числа Z электронов в атоме.

Перейдем к случаю $\lambda \ll a$. В квадрате суммы в (80,6) наряду с равными единице квадратами модуля каждого из членов имеются произведения вида $e^{i\mathbf{q}(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)}$. При усреднении по движению зарядов, т. е. по их взаимным расположениям в системе, разности $\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2$ пробегают значения в интервале порядка a. Поскольку $q \sim 1/\lambda$, $\lambda \ll a$, то экспоненциальный множитель $e^{i\mathbf{q}(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)}$ является в этом интервале быстро осциллирующей функцией, и его среднее значение обращается в нуль. Таким образом, при $\lambda \ll a$ сечение рассеяния равно

$$d\sigma = Z \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \sin^2\theta\, do, \qquad (80,8)$$

т. е. пропорционально первой степени атомного номера. Заметим, что эта формула неприменима при малых углах рассеяния ($\vartheta \sim \lambda/a$),

так как в этом случае $q \sim \vartheta/\lambda \sim 1/a$ и показатель $\mathbf{qr}$ невелик по сравнению с единицей.

Для определения эффективного сечения когерентного рассеяния мы должны выделить ту часть поля рассеянной волны, которая имеет частоту ω. Выражение (80,5) для поля зависит от времени через множитель $e^{-i\omega t}$ и, кроме того, от времени зависит также сумма $\sum e^{-i\mathbf{qr}}$. Эта последняя зависимость и приводит к тому, что в поле рассеянной волны содержатся наряду с частотой ω еще и другие (хотя и близкие к ней) частоты. Та часть поля, которая обладает частотой ω (т. е. зависит от времени только посредством множителя $e^{-i\omega t}$), получится, очевидно, если усреднить по времени сумму $\sum e^{-i\mathbf{qr}}$. Соответственно этому выражение для эффективного сечения когерентного рассеяния $d\sigma_{\text{ког}}$ отличается от полного сечения $d\sigma$ тем, что вместо среднего значения квадрата модуля суммы в нем стоит квадрат модуля среднего значения суммы:

$$d\sigma_{\text{ког}} = \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \left|\overline{\sum e^{-i\mathbf{qr}}}\right|^2 \sin^2\theta \, do. \qquad (80,9)$$

Полезно заметить, что это среднее значение суммы есть (с точностью до коэффициента) не что иное, как пространственная компонента Фурье от среднего распределения $\rho(\mathbf{r})$ плотности электрического заряда в атоме:

$$e\overline{\sum e^{-i\mathbf{qr}}} = \int \rho(\mathbf{r})\, e^{-i\mathbf{qr}}\, dV = (2\pi)^3 \rho_{\mathbf{q}}. \qquad (80,10)$$

При $\lambda \gg a$ мы можем снова заменить $e^{-i\mathbf{qr}}$ единицей, так что

$$d\sigma_{\text{ког}} = Z^2 \left(\frac{e^2}{mc^2}\right) \sin^2\theta \, do. \qquad (80,11)$$

Сравнивая это с полным сечением (80,7), мы видим, что $d\sigma_{\text{ког}} = d\sigma$, т. е. все рассеяние является когерентным.

Если же $\lambda \ll a$, то при усреднении в (80,9) все члены суммы (как средние значения быстро осциллирующих функций времени) исчезают, так что $d\sigma_{\text{ког}} = 0$. Таким образом, в этом случае рассеяние целиком некогерентно.

ГЛАВА X

ЧАСТИЦА В ГРАВИТАЦИОННОМ ПОЛЕ

§ 81. Гравитационные поля в нерелятивистской механике

Гравитационные поля (или поля *тяготения*) обладают следующим основным свойством: все тела вне зависимости от их массы движутся в них (при заданных начальных условиях) одинаковым образом. установлено опытным путем.

Например, законы свободного падения в поле тяготения земли одинаковы для всех тел, какой бы массой они ни обладали, — все они приобретают одно и тоже ускорение.

Это свойство гравитационных полей дает возможность установить существенную аналогию между движением тел в гравитационном поле и движением тел, не находящихся в каком-либо внешнем поле, но рассматриваемых с точки зрения неинерциальной системы отсчета. Действительно, в инерциальной системе отсчета свободное движение всех тел происходит прямолинейно и равномерно, и если, скажем, в начальный момент времени их скорости были одинаковыми, то они будут одинаковыми все время. Очевидно, поэтому, что если рассматривать это движение в заданной неинерциальной системе, то и относительно нее все тела будут двигаться одинаковым образом.

Таким образом, свойства движения в неинерциальной системе отсчета те же, что в инерциальной системе при наличии гравитационного поля. Другими словами, неинерциальная система отсчета эквивалентна некоторому гравитационному полю. Это обстоятельство называют *принципом эквивалентности*.

Рассмотрим, например, движение в равномерно ускоренной системе отсчета. Свободно движущиеся в такой системе отсчета тела любой массы будут, очевидно, обладать относительно этой системы одинаковым постоянным ускорением, равным и противоположным ускорению самой системы отсчета. Таким же является движение в однородном постоянном гравитационном поле, например в поле тяготения земли (в небольших участках его, где поле можно рассматривать как однородное). Таким образом, равномерно ускоренная система отсчета эквивалентна постоянному однородному внешнему полю.

Несколько более общим случаем является неравномерно ускоренная, поступательно и прямолинейно движущаяся система отсчета, — она, очевидно, эквивалентна однородному, но переменному гравитационному полю.

Однако поля, которым эквивалентны неинерциальные системы отсчета, все же не вполне тождественны с «истинными» гравитационными полями, существующими и в инерциальных системах. Между ними имеется весьма существенное отличие в отношении их свойств на бесконечности. На бесконечном расстоянии от создающих поле тел «истинное» гравитационное поле всегда стремится к нулю. Поля же, которым эквивалентны неинерциальные системы отсчета, на бесконечности, напротив, неограниченно возрастают, или, в крайнем случае, остаются конечными по величине. Так, например, возникающие во вращающейся системе отсчета центробежные силы неограниченно растут при удалении от оси вращения; поле, которому эквивалентна ускоренно прямолинейно движущаяся система отсчета, одинаково во всем пространстве, в том числе и на бесконечности.

Поля, которым эквивалентны неинерциальные системы отсчета, исчезают, как только мы перейдем к инерциальной системе. В противоположность этому, «истинные» гравитационные поля (существующие и в инерциальной системе отсчета) невозможно исключить никаким выбором системы отсчета. Это видно уже непосредственно из указанного выше различия между условиями на бесконечности в «истинных» гравитационных полях и в полях, которым эквивалентны неинерциальные системы; поскольку последние на бесконечности к нулю не стремятся, то ясно, что никаким выбором системы отсчета нельзя исключить «истинные» поля, обращающиеся на бесконечности в нуль.

Единственное, чего можно достичь соответствующим выбором системы отсчета, это — исключения гравитационного поля в данном участке пространства, достаточно малом для того, чтобы в нем можно было считать поле однородным. Это можно сделать путем выбора ускоренно движущейся системы, ускорение которой было бы равно тому ускорению, которое приобретает частица, помещенная в рассматриваемом участке поля.

Движение частицы в гравитационном поле определяется в нерелятивистской механике функцией Лагранжа, имеющей (в инерциальной системе отсчета) вид

$$L = \frac{mv^2}{2} - m\varphi, \tag{81,1}$$

где φ — некоторая функция координат и времени, характеризующая поле и называемая *гравитационным потенциалом*[1]). Соответственно

[1]) Ниже нам не придется больше пользоваться электромагнитным потенциалом φ, так что обозначение гравитационного потенциала той же буквой не может привести к недоразумению.

уравнения движения частицы гласят

$$\dot{\mathbf{v}} = -\operatorname{grad} \varphi. \tag{81,2}$$

Они не содержат массы или какой-либо другой постоянной, характеризующей свойства частицы, что является выражением основного свойства гравитационных полей.

§ 82. Гравитационное поле в релятивистской механике

Основное свойство гравитационных полей,—что все тела движутся в них одинаковым образом,— остается в силе и в релятивистской механике. Остается, следовательно, и аналогия между гравитационными полями и неинерциальными системами отсчета. Поэтому естественно при изучении свойств гравитационных полей в релятивистской механике тоже исходить из этой аналогии.

В инерциальной системе отсчета в декартовой системе координат интервал ds определяется формулой

$$ds^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2.$$

При переходе к любой другой инерциальной системе отсчета (т. е. при преобразовании Лоренца) интервал, как мы знаем, сохраняет тот же самый вид. Однако, если мы перейдем к неинерциальной системе отсчета, то ds^2 уже не будет суммой квадратов дифференциалов четырех координат.

Так, при переходе к равномерно вращающейся системе координат

$$x = x' \cos \Omega t - y' \sin \Omega t, \quad y = x' \sin \Omega t + y' \cos \Omega t, \quad z = z'$$

(Ω—угловая скорость вращения, направленная вдоль оси z) интервал приобретает вид

$$ds^2 = [c^2 - \Omega^2(x'^2 + y'^2)]\, dt^2 - dx'^2 - dy'^2 - dz'^2 + 2\Omega y'\, dx'\, dt - 2\Omega x'\, dy'\, dt.$$

По какому бы закону ни преобразовывалось время, это выражение не может быть приведено к сумме квадратов дифференциалов четырех координат.

Таким образом, в неинерциальной системе отсчета квадрат интервала является некоторой квадратичной формой общего вида от дифференциалов координат, т. е. имеет вид

$$ds^2 = g_{ik}dx^i dx^k, \tag{82,1}$$

где g_{ik}— некоторые функции пространственных координат x^1, x^2, x^3 и временной координаты x^0. Четырехмерная система координат x^0, x^1, x^2, x^3 является, таким образом, при пользовании неинерциальными системами отсчета криволинейной. Величины g_{ik}, определяя

все свойства геометрии в каждой данной криволинейной системе координат, устанавливают, как говорят, *метрику* пространства-времени.

Величины g_{ik} можно, очевидно, всегда считать симметричными по индексам i и k ($g_{ik}=g_{ki}$), поскольку они определяются из симметричной формы (82,1), куда g_{ik} и g_{ki} входят помноженными на одно и то же произведение $dx^i dx^k$. В общем случае имеется, следовательно, всего 10 различных величин g_{ik} — четыре с одинаковыми и $4\cdot 3/2=6$ с различными индексами. В инерциальной системе отсчета при пользовании декартовыми пространственными координатами $x^{1,2,3}=x, y, z$ и временем $x^0=ct$ величины g_{ik} равны:

$$g_{00}=1,\ g_{11}=g_{22}=g_{33}=-1,\ g_{ik}=0 \text{ при } i\neq k. \qquad (82,2)$$

Систему координат (четырехмерную) с этими значениями g_{ik} мы будем называть *галилеевой.*

В предыдущем параграфе было показано, что неинерциальные системы отсчета эквивалентны некоторым силовым полям. Мы видим теперь, что в релятивистской механике эти поля определяются величинами g_{ik}.

То же самое относится и к «истинным» гравитационным полям. Всякое гравитационное поле является не чем иным, как изменением метрики пространства-времени, соответственно чему оно определяется величинами g_{ik}. Это важнейшее обстоятельство означает, что геометрические свойства пространства-времени (его метрика) определяются физическими явлениями, а не являются неизменными свойствами пространства и времени.

Теория гравитационных полей, построенная на основе теории относительности, носит название *общей теории относительности.* Она была создана Эйнштейном (и окончательно сформулирована им в 1916 г.) и является, пожалуй, самой красивой из существующих физических теорий. Замечательно, что она была построена Эйнштейном чисто дедуктивным путем и лишь в дальнейшем была подтверждена астрономическими наблюдениями.

Как и в нерелятивистской механике, между «истинными» гравитационными полями и полями, которым эквивалентны неинерциальные системы отсчета, имеется коренное отличие. При переходе к неинерциальной системе отсчета квадратичная форма имеет вид (82,1), т. е. величины g_{ik} получаются из их галилеевых значений (82,2) преобразованием координат, а потому обратным преобразованием могут быть снова приведены во всем пространстве к галилеевым значениям. То, что такой вид g_{ik} является лишь весьма специальным, видно уже из того, что преобразованием всего лишь четырех координат нельзя, в общем случае, привести десять величин g_{ik} к наперед заданному виду.

«Истинное» гравитационное поле не может быть исключено никаким преобразованием координат. Другими словами, при наличии

гравитационного поля пространство-время таково, что определяющие его метрику величины g_{ik} никаким преобразованием координат не могут быть приведены во всем пространстве к их галилееву виду. Такое пространство-время называют *кривым* в отличие от *плоского*, в котором указанное приведение возможно.

Надлежащим преобразованием координат можно, однако, привести g_{ik} к галилееву виду в любой отдельной точке негалилеева пространства-времени: это сводится к приведению к диагональному виду квадратичной формы с постоянными коэффициентами (значения g_{ik} в данной точке). Такую систему координат мы будем называть *галилеевой* для данной точки[1]).

Заметим, что, будучи приведенной в данной точке к диагональному виду, матрица величин g_{ik} имеет одно положительное и три отрицательных главных значения (совокупность этих знаков называют *сигнатурой* матрицы). Отсюда следует в частности, что определитель g, составленный из величин g_{ik}, в реальном пространстве-времени всегда отрицателен:

$$g < 0. \tag{82,3}$$

Изменение метрики пространства-времени означает также и изменение чисто пространственной метрики. Галилеевым g_{ik} в плоском пространстве-времени соответствует евклидова геометрия пространства. В гравитационном же поле геометрия пространства становится неевклидовой. Это относится как к «истинным» гравитационным полям, в которых пространство-время «искривлено», так и к полям, возникающим лишь от неинерциальности системы отсчета и сохраняющим пространство-время плоским.

Вопрос о пространственной геометрии в гравитационном поле будет рассмотрен более подробно в § 84. Здесь же полезно привести простое рассуждение, наглядно иллюстрирующее неизбежность возникновения неевклидовости пространства при переходе к неинерциальной системе отсчета. Рассмотрим две системы отсчета, из которых одна (K) инерциальна, а другая (K') равномерно вращается относительно K вокруг общей оси z. Окружность в плоскости xy системы K (с центром в начале координат) может рассматриваться и как окружность в плоскости $x'y'$ системы K'. Измеряя длину окружности и ее диаметр масштабной линейкой в системе K, мы получим значения, отношение которых равно π, в соответствии с евклидовостью геометрии в инерциальной системе отсчета. Пусть теперь измерение производится неподвижным относительно K' масштабом.

---

[1]) Во избежание недоразумений укажем, однако, уже сейчас, что выбор такой системы координат не означает еще исключения гравитационного поля в соответствующем бесконечно малом элементе 4-объема. Такое исключение, тоже всегда возможное в силу принципа эквивалентности, означает нечто большее (см. § 87).

Наблюдая за этим процессом из системы K, мы найдем, что масштаб, приложенный вдоль окружности, претерпевает лоренцево сокращение, а радиально приложенный масштаб не меняется. Ясно поэтому, что отношение длины окружности к ее диаметру, полученное в результате такого измерения, окажется больше π.

В общем случае произвольного переменного гравитационного поля метрика пространства не только неевклидова, но еще и меняется со временем. Это значит, что меняются со временем соотношения между различными геометрическими расстояниями. В результате взаимное расположение внесенных в поле «пробных частиц» ни в какой системе координат не может оставаться неизменным[1]). Так, если частицы расположены вдоль какой-либо окружности и вдоль ее диаметра, то поскольку отношение длины окружности к длине диаметра не равно π и меняется со временем, ясно, что если расстояния частиц вдоль диаметра остаются неизменными, то должны изменяться расстояния вдоль окружности, и наоборот. Таким образом, в общей теории относительности, вообще говоря, невозможна взаимная неподвижность системы тел.

Это обстоятельство существенно меняет само понятие системы отсчета в общей теории относительности по сравнению с тем смыслом, который оно имело в специальной теории. В последней под системой отсчета понималась совокупность покоящихся друг относительно друга, неизменным образом взаимно расположенных тел. При наличии переменного гравитационного поля таких систем тел не существует и для точного определения положения частицы в пространстве необходимо, строго говоря, иметь совокупность бесконечного числа тел, заполняющих все пространство, наподобие некоторой «среды». Такая система тел вместе со связанными с каждым из них произвольным образом идущими часами и является системой отсчета в общей теории относительности.

В связи с произвольностью выбора системы отсчета законы природы должны записываться в общей теории относительности в виде, формально пригодном в любой четырехмерной системе координат (или, как говорят, в *ковариантном* виде). Это обстоятельство, однако, разумеется не означает физической эквивалентности всех этих систем отсчета (подобной физической эквивалентности всех инерциальных систем отсчета в специальной теории). Напротив, конкретный вид физических явлений, в том числе свойства движения тел, во всех системах отсчета становится различным.

---

[1]) Строго говоря, число частиц должно быть больше четырех. Поскольку из всяких шести отрезков можно построить четырехгранник, то должным определением системы отсчета всегда можно добиться того, чтобы система четырех частиц образовывала в ней неизменный четырехгранник. Тем более, можно определить взаимную неподвижность в системах трех или двух частиц.

§ 83. Криволинейные координаты

Поскольку при изучении гравитационных полей приходится рассматривать явления в произвольных системах отсчета, то возникает необходимость развить четырехмерную геометрию в форме, пригодной в произвольных координатах. Этому посвящены §§ 83, 85, 86.

Рассмотрим преобразование одной системы координат x^0, x^1, x^2, x^3 в другую x'^0, x'^1, x'^2, x'^3:

$$x^i = f^i(x'^0, x'^1, x'^2, x'^3),$$

где f^i — некоторые функции. При преобразовании координат их дифференциалы преобразуются согласно формулам

$$dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial x'^k} dx'^k. \tag{83,1}$$

Контравариантным 4-вектором называется всякая совокупность четырех величин A^i, которые при преобразовании координат преобразуются как их дифференциалы:

$$A^i = \frac{\partial x^i}{\partial x'^k} A'^k. \tag{83,2}$$

Пусть φ — некоторый скаляр. Производные $\partial\varphi/\partial x^i$ при преобразовании координат преобразуются согласно формулам

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x^i} = \frac{\partial\varphi}{\partial x'^k}\frac{\partial x'^k}{\partial x^i}, \tag{83,3}$$

отличным от формул (83,2). *Ковариантным 4-вектором* называется всякая совокупность четырех величин A_i, которые при преобразовании координат преобразуются как производные от скаляра:

$$A_i = \frac{\partial x'^k}{\partial x^i} A'_k. \tag{83,4}$$

Аналогичным образом определяются 4-тензоры различных рангов. Так, контравариантным 4-тензором 2-го ранга A^{ik} называется совокупность 16 величин, преобразующихся как произведения двух контравариантных векторов, т. е. по закону

$$A^{ik} = \frac{\partial x^i}{\partial x'^l}\frac{\partial x^k}{\partial x'^m} A'^{lm}. \tag{83,5}$$

Ковариантный тензор 2-го ранга A_{ik} преобразуется по закону

$$A_{ik} = \frac{\partial x'^l}{\partial x^i}\frac{\partial x'^m}{\partial x^k} A'_{lm}, \tag{83,6}$$

а смешанный 4-тензор $A^i{}_k$ — по формулам

$$A^i{}_k = \frac{\partial x^i}{\partial x'^l} \frac{\partial x'^m}{\partial x^k} A'^l{}_m. \qquad (83,7)$$

Данные определения являются естественным обобщением определений 4-векторов и 4-тензоров в галилеевых координатах (§ 6), согласно которым дифференциалы dx^i тоже составляют контравариантный, а производные $\partial\varphi/\partial x^i$ — ковариантный 4-вектор[1]).

Правила образования 4-тензоров путем перемножения или упрощения произведений других 4-тензоров остаются в криволинейных координатах теми же, что и в галилеевых координатах. Легко, например, убедиться в том, что в силу законов преобразования (83,2) и (83,4) скалярное произведение двух 4-векторов A^iB_i действительно инвариантно:

$$A^iB_i = \frac{\partial x^i}{\partial x'^l} \frac{\partial x'^m}{\partial x^i} A'^l B'_m = \frac{\partial x'^m}{\partial x'^l} A'^l B'_m = A'^l B'_l.$$

Определение единичного 4-тензора δ^i_k при переходе к криволинейным координатам не меняется: его компоненты снова $\delta^i_k = 0$ при $i \neq k$, а при $i = k$ равны 1. Если A^k — 4-вектор, то при умножении на δ^i_k мы получим:

$$A^k \delta^i_k = A^i,$$

т. е. снова 4-вектор; этим и доказывается, что δ^i_k является тензором.

Квадрат элемента длины в криволинейных координатах есть квадратичная форма дифференциалов dx^i:

$$ds^2 = g_{ik}\, dx^i\, dx^k, \qquad (83,8)$$

где g_{ik} — функции координат; g_{ik} симметричны по индексам i и k:

$$g_{ik} = g_{ki}. \qquad (83,9)$$

Поскольку произведение (упрощенное) g_{ik} на контравариантный тензор $dx^i dx^k$ есть скаляр, то g_{ik} составляют ковариантный тензор; он называется *метрическим тензором*.

Два тензора A_{ik} и B^{ik} называются обратными друг другу, если

$$A_{ik} B^{kl} = \delta^l_i.$$

В частности, контравариантным метрическим тензором g^{ik} называется тензор, обратный тензору g_{ik}, т. е.

$$g_{ik} g^{kl} = \delta^l_i. \qquad (83,10)$$

---

[1]) Но в то время как в галилеевой системе сами координаты x^i (а не только их дифференциалы) тоже составляют 4-вектор, в криволинейных координатах это, разумеется, не имеет места.

Одна и та же векторная физическая величина может быть представлена как в контра-, так и в ковариантных компонентах. Очевидно, что единственными величинами, которые могут определять связь между теми и другими, являются компоненты метрического тензора. Такая связь дается формулами:

$$A^i = g^{ik}A_k, \quad A_i = g_{ik}A^k. \tag{83,11}$$

В галилеевой системе координат метрический тензор имеет компоненты:

$$g_{ik}^{(0)} = g^{(0)ik} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{83,12}$$

При этом формулы (83,11) дают известную связь $A^0 = A_0, A^{1,2,3} = -A_{1,2,3}$ [1]).

Сказанное относится и к тензорам. Переход между различными формами одного и того же физического тензора совершается с помощью метрического тензора по формулам:

$$A^i{}_k = g^{il}A_{lk}, \quad A^{ik} = g^{il}g^{km}A_{lm}$$

и т. п.

В § 6 был определен (в галилеевой системе координат) совершенно антисимметричный единичный псевдотензор e^{iklm}. Преобразуем его к произвольной криволинейной системе координат, причем обозначим его теперь через E^{iklm}. Обозначение же e^{iklm} сохраним для величин, определенных по-прежнему по значению $e^{0123} = 1$ (или $e_{0123} = -1$).

Пусть x'^i — галилеевы, а x^i — произвольные криволинейные координаты. Согласно общим правилам преобразования тензоров, имеем:

$$E^{iklm} = \frac{\partial x^i}{\partial x'^p}\frac{\partial x^k}{\partial x'^r}\frac{\partial x^l}{\partial x'^s}\frac{\partial x^m}{\partial x'^t}e^{prst},$$

или

$$E^{iklm} = Je^{iklm},$$

где J — определитель, составленный из производных $\partial x^i/\partial x'^p$, т. е. не что иное, как якобиан преобразования от галилеевых координат к криволинейным:

$$J = \frac{\partial(x^0, x^1, x^2, x^3)}{\partial(x'^0, x'^1, x'^2, x'^3)}.$$

[1]) Везде, где при проведении аналогии мы пользуемся галилеевой системой координат, надо иметь в виду, что такую систему можно выбрать только в плоском 4-пространстве. В случае же кривого 4-пространства надо было бы говорить о системе координат, галилеевой в данном бесконечно малом элементе 4-объема, которую всегда можно выбрать. Все выводы от этого уточнения не меняются.

Этот якобиан можно выразить через определитель метрического тензора g_{ik} (в системе x^i). Для этого пишем формулу преобразования метрического тензора:

$$g^{ik} = \frac{\partial x^i}{\partial x'^l} \frac{\partial x^k}{\partial x'^m} g^{(0)lm}$$

и приравниваем определители, составленные из величин, стоящих в обеих сторонах этого равенства. Определитель обратного тензора $|g^{ik}| = 1/g$. Определитель же $|g^{(0)lm}| = -1$. Поэтому имеем $1/g = -J^2$, откуда $J = 1/\sqrt{-g}$.

Таким образом, в криволинейных координатах антисимметричный единичный тензор 4-го ранга должен быть определен как

$$E^{iklm} = \frac{1}{\sqrt{-g}} e^{iklm}. \tag{83,13}$$

Опускание индексов у этого тензора осуществляется с помощью формулы

$$e^{prst} g_{ip} g_{kr} g_{ls} g_{mt} = -g e_{iklm},$$

так что его ковариантные компоненты

$$E_{iklm} = \sqrt{-g}\, e_{iklm}. \tag{83,14}$$

В галилеевой системе координат x'^i интеграл от скаляра по $d\Omega' = dx'^0 dx'^1 dx'^2 dx'^3$ тоже есть скаляр, т. е. элемент $d\Omega'$ ведет себя при интегрировании как скаляр (§ 6). При преобразовании к криволинейным координатам x^i элемент интегрирования $d\Omega'$ переходит в

$$d\Omega' \to \frac{1}{J} d\Omega = \sqrt{-g}\, d\Omega.$$

Таким образом, в криволинейных координатах при интегрировании по 4-объему ведет себя как инвариант произведение $\sqrt{-g}\, d\Omega$ [1]).

Все сказанное в конце § 6 относительно элементов интегрирования по гиперповерхности, поверхности и линии остается в силе и в криволинейных координатах, с тем только отличием, что несколько меняется определение дуальных тензоров. Элемент «площади» гиперповерхности, построенный на трех бесконечно малых смещениях, есть контравариантный антисимметричный тензор dS^{ikl};

---

[1]) Если φ — скаляр, то величину $\sqrt{-g}\,\varphi$, дающую при интегрировании по $d\Omega$ инвариант, иногда называют *скалярной плотностью*. Аналогично говорят о *векторной* и *тензорной плотностях* $\sqrt{-g}\, A^i$, $\sqrt{-g}\, A^{ik}$ и т. д. Эти величины дают вектор или тензор при умножении на элемент 4-объема $d\Omega$ (интеграл же $\int A^i \sqrt{-g}\, d\Omega$ по конечной области, вообще говоря, не может быть вектором, так как законы преобразования вектора A^i в разных точках области различны).

дуальный ему вектор получается при умножении на тензор $\sqrt{-g}\, e_{iklm}$, т. е. равен

$$\sqrt{-g}\, dS_i = -\frac{1}{6} e_{iklm} dS^{klm} \sqrt{-g}. \qquad (83,15)$$

Аналогично, если df^{ik} есть элемент поверхности (двухмерной), построенный на двух бесконечно малых смещениях, то дуальный ему тензор определяется как[1])

$$\sqrt{-g}\, df^{*}_{ik} = \frac{1}{2} \sqrt{-g}\, e_{iklm} df^{lm}. \qquad (83,16)$$

Мы оставляем здесь обозначения dS_i и df^{*}_{ik}, как и прежде, соответственно для $\frac{1}{6} e_{klmi} dS^{klm}$ и $\frac{1}{2} e_{iklm} df^{lm}$ (а не для их произведений на $\sqrt{-g}$); правила (6, 14—19) для преобразования различных интегралов друг в друга остаются тогда теми же самыми, поскольку их вывод имеет формальный характер, не связанный с тензорными свойствами соответствующих величин. Из них нам в особенности понадобится правило преобразования интеграла по гиперповерхности в интеграл по 4-объему (теорема Гаусса), осуществляющегося заменой

$$dS_i \rightarrow d\Omega \frac{\partial}{\partial x^i}. \qquad (83,17)$$

§ 84. Расстояния и промежутки времени

Мы уже говорили, что в общей теории относительности выбор системы отсчета ничем не ограничен; тремя пространственными координатами x^1, x^2, x^3 могут являться любые величины, определяющие расположение тел в пространстве, а временная координата x^0 может определяться произвольно идущими часами. Возникает вопрос о том, каким образом по значениям величин x^0, x^1, x^2, x^3 можно определить истинные расстояния и промежутки времени.

Определим сначала связь истинного времени, которое мы будем ниже обозначать посредством τ, с координатой x^0. Для этого рассмотрим два бесконечно близких события, происходящих в одной

---

[1]) Подразумевается, что элементы dS^{klm} и df^{ik} построены по бесконечно малым смещениям dx^i, dx'^i, dx''^i таким же образом, как они были определены в § 6, каков бы ни был геометрический смысл координат x^i. Тогда остается в силе и прежний формальный смысл элементов dS_i, df^{*}_{ik}. В частности, по-прежнему $dS_0 = dx^1 dx^2 dx^3 \equiv dV$. Мы сохраним в дальнейшем прежнее обозначение dV для произведения дифференциалов трех пространственных координат; надо, однако, помнить, что элемент геометрического пространственного объема дается в криволинейных координатах не самим dV, а произведением $\sqrt{\gamma}\, dV$, где γ — определитель пространственного метрического тензора (который будет определен в следующем параграфе).

и той же точке пространства. Тогда интервал ds^2 между этими двумя событиями есть не что иное, как $cd\tau$, где $d\tau$ — промежуток времени (истинного) между обоими событиями. Полагая $dx^1 = dx^2 = dx^3 = 0$ в общем выражении $ds^2 = g_{ik}dx^i dx^k$, находим, следовательно,

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 = g_{00}(dx^0)^2,$$

откуда

$$d\tau = \frac{1}{c}\sqrt{g_{00}}\,dx^0, \tag{84,1}$$

или для времени между любыми двумя событиями в одной и той же точке пространства

$$\tau = \frac{1}{c}\int\sqrt{g_{00}}\,dx^0. \tag{84,2}$$

Эти соотношения и определяют промежутки истинного времени (или, как говорят, *собственного времени* для данной точки пространства) по изменению координаты x^0. Заметим также, что величина g_{00}, как видно из приведенных формул, положительна:

$$g_{00} > 0. \tag{84,3}$$

Необходимо подчеркнуть разницу между смыслом условия (84,3) и смыслом условия об определенной сигнатуре (знаках главных значений) тензора g_{ik} (§ 82). Тензор g_{ik}, не удовлетворяющий второму из этих условий, вообще не может соответствовать какому бы то ни было реальному гравитационному полю, т. е. метрике реального пространства-времени. Невыполнение же условия (84,3) означало бы лишь, что соответствующая система отсчета не может быть осуществлена реальными телами; если условие о главных значениях при этом выполняется, то надлежащим преобразованием координат можно добиться того, что g_{00} станет положительным (пример подобной системы представляет собой вращающаяся система координат — см. § 89).

Определим теперь элемент dl пространственного расстояния. В специальной теории относительности можно определять dl как интервал между двумя бесконечно близкими событиями, происходящими в один и тот же момент времени. В общей теории относительности этого, вообще говоря, уже нельзя сделать, т. е. нельзя определить dl, просто положив $dx^0 = 0$ в ds. Это связано с тем, что в гравитационном поле собственное время в разных точках пространства различным образом связано с координатой x^0.

Для определения dl поступим теперь следующим образом.

Пусть из некоторой точки B пространства (с координатами $x^\alpha + dx^\alpha$) отправляется световой сигнал в бесконечно близкую к ней точку A (с координатами x^α), а затем сразу обратно по тому

же пути. Необходимое для этого время (отсчитываемое в одной и той же точке B), умноженное на c, есть, очевидно, удвоенное расстояние между обеими точками.

Напишем интервал, выделив пространственные и временную координаты:

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta + 2g_{0\alpha} dx^0 dx^\alpha + g_{00} (dx^0)^2, \qquad (84,4)$$

где, как обычно, по дважды повторяющимся греческим индексам подразумевается суммирование по значениям 1, 2, 3. Интервал между событиями, являющимися уходом и приходом сигнала из одной точки в другую, равен нулю. Решая уравнение $ds^2 = 0$ относительно dx^0, найдем два корня:

$$\begin{aligned} dx^{0\,(1)} &= \frac{1}{g_{00}} \left(-g_{0\alpha} dx^\alpha - \sqrt{(g_{0\alpha} g_{0\beta} - g_{\alpha\beta} g_{00})\, dx^\alpha dx^\beta}\right), \\ dx^{0\,(2)} &= \frac{1}{g_{00}} \left(-g_{0\alpha} dx^\alpha + \sqrt{(g_{0\alpha} g_{0\beta} - g_{\alpha\beta} g_{00})\, dx^\alpha dx^\beta}\right), \end{aligned} \qquad (84,5)$$

отвечающих распространению сигнала в двух направлениях между A и B. Если x^0 есть момент прибытия сигнала в A, то моменты его отправления из B и обратного возвращения в B будут соответственно $x^0 + dx^{0\,(1)}$ и $x^0 + dx^{0\,(2)}$. На схематическом рис. 18 сплошные прямые — мировые линии, соответствующие заданным координатам x^α и $x^\alpha + dx^\alpha$, а пунктир — мировые линии сигналов[1]). Ясно, что полный промежуток «времени» между отправлением и возвращением сигнала в ту же точку равен

Рис. 18.

$$dx^{0\,(2)} - dx^{0\,(1)} = \frac{2}{g_{00}} \sqrt{(g_{0\alpha} g_{0\beta} - g_{\alpha\beta} g_{00})\, dx^\alpha dx^\beta}.$$

Соответствующий промежуток истинного времени получается отсюда согласно (84,1) умножением на $\sqrt{g_{00}}/c$, а расстояние dl между обеими точками — еще умножением на $c/2$. В результате находим:

$$dl^2 = \left(-g_{\alpha\beta} + \frac{g_{0\alpha} g_{0\beta}}{g_{00}}\right) dx^\alpha dx^\beta.$$

Это и есть искомое выражение, определяющее расстояние через элементы пространственных координат. Перепишем его в виде

$$dl^2 = \gamma_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta, \qquad (84,6)$$

[1]) На рис. 18 предположено, что $dx^{0\,(2)} > 0$, $dx^{0\,(1)} < 0$, что, однако, необязательно: $dx^{0\,(1)}$ и $dx^{0\,(2)}$ могут оказаться и одного знака. Тот факт, что в таком случае значение $x^0(A)$ в момент прихода сигнала в A могло бы оказаться меньшим значения $x^0(B)$ в момент его выхода из B, не заключает в себе никакого противоречия, поскольку ход часов в различных точках пространства не предполагается каким-либо способом синхронизованным.

где

$$\gamma_{\alpha\beta} = -g_{\alpha\beta} + \frac{g_{0\alpha}g_{0\beta}}{g_{00}} \tag{84,7}$$

есть трехмерный метрический тензор, определяющий метрику, т. е. геометрические свойства пространства. Соотношениями (84,7) устанавливается связь между метрикой реального пространства и метрикой четырехмерного пространства-времени[1]).

Необходимо, однако, помнить, что g_{ik} зависят, вообще говоря, от x^0, так что и пространственная метрика (84, 6) меняется со временем. По этой причине не имеет смысла интегрировать dl — такой интеграл зависел бы от того, по какой мировой линии между двумя заданными пространственными точками он брался. Таким образом, в общей теории относительности теряет, вообще говоря, смысл понятие об определенном расстоянии между телами, остающееся в силе лишь в бесконечно малом. Единственным случаем, когда расстояние может быть определено и в конечных областях пространства, являются такие системы отсчета, в которых g_{ik} не зависят от времени, и потому интеграл $\int dl$ вдоль пространственной кривой имеет определенный смысл.

Полезно заметить, что тензор $-\gamma_{\alpha\beta}$ является тензором, обратным контравариантному трехмерному тензору $g^{\alpha\beta}$. Действительно, расписав в компонентах равенство $g^{ik}g_{kl} = \delta_l^i$, имеем:

$$\begin{aligned} &g^{\alpha\beta}g_{\beta\gamma} + g^{\alpha 0}g_{0\gamma} = \delta_\gamma^\alpha, \\ &g^{\alpha\beta}g_{\beta 0} + g^{\alpha 0}g_{00} = 0, \\ &g^{0\beta}g_{\beta 0} + g^{00}g_{00} = 1. \end{aligned} \tag{84,8}$$

Определив $g^{\alpha 0}$ из второго равенства и подставив в первое, получим:

$$-g^{\alpha\beta}\gamma_{\beta\gamma} = \delta_\gamma^\alpha,$$

[1]) Квадратичная форма (84,6) должна быть существенно положительной. Для этого ее коэффициенты должны, как известно, удовлетворять условиям:

$$\gamma_{11} > 0, \quad \begin{vmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \gamma_{23} \\ \gamma_{31} & \gamma_{32} & \gamma_{33} \end{vmatrix} > 0.$$

Выражая γ_{ik} через g_{ik}, легко найдем, что эти условия принимают вид:

$$\begin{vmatrix} g_{00} & g_{01} \\ g_{10} & g_{11} \end{vmatrix} < 0, \quad \begin{vmatrix} g_{00} & g_{01} & g_{02} \\ g_{10} & g_{11} & g_{12} \\ g_{20} & g_{21} & g_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad g < 0.$$

Этим условиям вместе с условием (84,3) должны удовлетворять компоненты метрического тензора во всякой системе отсчета, которая может быть осуществлена с помощью реальных тел.

что и требовалось доказать. Этот результат можно сформулировать иначе, сказав, что величины $-g^{\alpha\beta}$ составляют контравариантный трехмерный метрический тензор, отвечающий метрике (84,6):

$$\gamma^{\alpha\beta} = -g^{\alpha\beta}. \qquad (84,9)$$

Укажем также, что определители g и γ, составленные соответственно из величин g_{ik} и $\gamma_{\alpha\beta}$, связаны друг с другом простым соотношением:

$$-g = g_{00}\gamma. \qquad (84,10)$$

В ряде дальнейших применений нам будет удобным вводить трехмерный вектор $\mathbf{g}$, ковариантные компоненты которого определяются как

$$g_\alpha = -\frac{g_{0\alpha}}{g_{00}}. \qquad (84,11)$$

Рассматривая $\mathbf{g}$ как вектор в пространстве с метрикой (84,6), мы должны определить его контравариантные компоненты как $g^\alpha = \gamma^{\alpha\beta}g_\beta$. С помощью (84,9) и второго из равенств (84,8) легко видеть, что

$$g^\alpha = \gamma^{\alpha\beta}g_\beta = -g^{0\alpha}. \qquad (84,12)$$

Отметим также формулу

$$g^{00} = \frac{1}{g_{00}} - g_\alpha g^\alpha, \qquad (84,13)$$

следующую из третьего из равенств (84,8).

Перейдем теперь к определению понятия одновременности в общей теории относительности. Другими словами, выясним вопрос о возможности синхронизации часов, находящихся в разных точках пространства, т. е. приведения в соответствие друг с другом показаний этих часов.

Такая синхронизация должна быть, очевидно, осуществлена с помощью обмена световыми сигналами между обеими точками. Рассмотрим снова процесс распространения сигналов между двумя бесконечно близкими точками A и B, изображенный на рис. 18. Одновременным с моментом x^0 в точке A следует считать показание часов в точке B, лежащее посередине между моментами отправления и обратного прибытия сигнала в эту точку, т. е. момент

$$x^0 + \Delta x^0 = x^0 + \frac{1}{2}\left(dx^{0(2)} + dx^{0(1)}\right).$$

Подставляя сюда (84,5), находим разность значений «времени» x^0 для двух одновременных событий, происходящих в бесконечно близких точках, в виде:

$$\Delta x^0 = -\frac{g_{0\alpha}dx^\alpha}{g_{00}} \equiv g_\alpha dx^\alpha. \qquad (84,14)$$

Это соотношение дает возможность синхронизовать часы в любом бесконечно малом объеме пространства. Продолжая подобную синхронизацию из точки A дальше, можно синхронизовать часы, т. е. определить одновременность событий вдоль любой незамкнутой линии[1]).

Синхронизация же часов вдоль замкнутого контура оказывается, вообще говоря, невозможной. Действительно, обойдя вдоль контура и вернувшись в исходную точку, мы получили бы для Δx^0 отличное от нуля значение. Тем более оказывается невозможной однозначная синхронизация часов во всем пространстве. Исключение составляют лишь такие системы отсчета, в которых все компоненты $g_{0\alpha}$ равны нулю[2]).

Следует подчеркнуть, что невозможность синхронизации всех часов является свойством именно произвольной системы отсчета, а не пространства-времени как такового. В любом гравитационном поле всегда можно выбрать (и даже бесчисленным числом способов) систему отсчета таким образом, чтобы обратить три величины $g_{0\alpha}$ тождественно в нуль и, тем самым, сделать возможной полную синхронизацию часов (см. § 100).

Уже в специальной теории относительности течение истинного времени различно для движущихся друг относительно друга часов. В общей же теории относительности истинное время течет различным образом и в разных точках пространства в одной и той же системе отсчета. Это значит, что интервал собственного времени между двумя событиями, происходящими в некоторой точке пространства, и интервал времени между одновременными с ними событиями в другой точке пространства, вообще говоря, отличны друг от друга.

§ 85. Ковариантное дифференцирование

В галилеевых координатах[3]) дифференциалы dA_i вектора A_i образуют вектор, а производные $\partial A_i/\partial x^k$ от компонент вектора по координатам образуют тензор. В криволинейных же координатах это не имеет места; dA_i не есть вектор, а $\partial A_i/\partial x^k$ не есть тензор. Это связано с тем, что dA_i есть разность векторов, находящихся в разных (бесконечно близких) точках пространства; в разных же точках пространства векторы преобразуются различно, так как коэффициенты

[1]) Умножив равенство (84,14) на g_{00} и перенеся оба члена в одну сторону, можно представить условие синхронизации в виде $dx_0 = g_{0i}dx^i = 0$: должен быть равен нулю «ковариантный дифференциал» dx_0 между двумя бесконечно близкими одновременными событиями.

[2]) Сюда же следует причислить случаи, когда $g_{0\alpha}$ могут быть обращены в нуль простым преобразованием временной координаты, не затрагивающим выбора системы объектов, служащих для определения пространственных координат.

[3]) Вообще всегда, когда величины g_{ik} постоянны.

в формулах преобразования (83,2), (83,4) являются функциями координат.

В сказанном легко убедиться и непосредственно. Для этого выведем формулы преобразования дифференциалов dA_i в криволинейных координатах. Ковариантный вектор преобразуется согласно формулам

$$A_i = \frac{\partial x'^k}{\partial x^i} A'_k;$$

поэтому

$$dA_i = \frac{\partial x'^k}{\partial x^i} dA'_k + A'_k d\frac{\partial x'^k}{\partial x^i} = \frac{\partial x'^k}{\partial x^i} dA'_k + A'_k \frac{\partial^2 x'^k}{\partial x^i \partial x^l} dx'^l.$$

Таким образом, dA_i преобразуется вовсе не как вектор (то же относится, конечно, и к дифференциалам контравариантных векторов). Только в случае, если вторые производные $\frac{\partial^2 x'^k}{\partial x^i \partial x^l} = 0$, т. е. если x'^k являются линейными функциями от x^k, формулы преобразования имеют вид

$$dA_i = \frac{\partial x'^k}{\partial x^i} dA'_k,$$

т. е. dA_i преобразуется как вектор.

Мы займемся теперь определением тензора, который играет в криволинейных координатах роль тензора $\partial A_i/\partial x^k$ в галилеевых координатах. Другими словами, мы должны преобразовать $\partial A_i/\partial x^k$ от галилеевых координат к криволинейным.

Для того чтобы получить в криволинейных координатах дифференциал вектора, являющийся вектором, надо, чтобы оба вычитаемых один из другого вектора находились в одной точке пространства. Другими словами, надо каким-то образом «перенести» один из двух бесконечно близких векторов в точку, где находится второй, после чего определить разность обоих векторов, относящихся теперь к одной и той же точке пространства. Сама операция переноса должна быть при этом определена таким образом, чтобы в галилеевых координатах указанная разность совпадала с обычным дифференциалом dA_i. Поскольку dA_i есть просто разность компонент двух бесконечно близких векторов, то это значит, что в результате операции переноса при пользовании галилеевыми координатами компоненты вектора не должны изменяться. Но такой перенос есть не что иное, как перенос вектора параллельно самому себе. При *параллельном переносе* вектора его компоненты в галилеевых координатах не меняются; если же пользоваться криволинейными координатами, то при таком переносе компоненты вектора, вообще говоря, изменятся. Поэтому в криволинейных координатах разность компонент обоих векторов после перенесения одного из них в точку, где находится второй,

не будет совпадать с их разностью до переноса (т. е. с дифференциалом dA_i).

Таким образом, при сравнении двух бесконечно близких векторов мы должны один из них подвергнуть параллельному переносу в точку, где находится второй. Рассмотрим какой-нибудь контравариантный вектор; если его значение в точке с координатами x^i есть A^i, то в соседней точке x^i+dx^i он равен A^i+dA^i. Вектор A^i подвергнем бесконечно малому параллельному переносу в точку x^i+dx^i; его изменение при этом обозначим посредством δA^i. Тогда разность DA^i между обоими векторами, находящимися теперь в одной точке, равна

$$DA^i = dA^i - \delta A^i. \qquad (85,1)$$

Изменение δA^i компонент вектора при бесконечно малом параллельном переносе зависит от величины самих компонент, причем эта зависимость должна, очевидно, быть линейной. Это следует непосредственно из того, что сумма двух векторов должна преобразовываться по тому же закону, что и каждый из них. Таким образом, δA^i имеет вид

$$\delta A^i = -\Gamma^i_{kl} A^k dx^l, \qquad (85,2)$$

где Γ^i_{kl} — некоторые функции координат, вид которых зависит, конечно, от выбора системы координат; в галилеевой системе все $\Gamma^i_{kl}=0$.

Уже отсюда видно, что величины Γ^i_{kl} не образуют тензора, так как тензор, равный нулю в одной системе координат, равен нулю и во всякой другой. В криволинейном пространстве нельзя, конечно, никаким выбором координат обратить все Γ^i_{kl} везде в нуль. Можно, однако, выбрать такую систему координат, в которой Γ^i_{kl} обращаются в нуль в данном бесконечно малом участке (см. конец этого параграфа)[1]. Величины Γ^i_{kl} носят название *символов Кристоффеля*. Мы будем ниже пользоваться также и величинами $\Gamma_{i,kl}$[2]) определяемыми следующим образом:

$$\Gamma_{i,kl} = g_{im}\Gamma^m_{kl}. \qquad (85,3)$$

Обратно,

$$\Gamma^i_{kl} = g^{im}\Gamma_{m,kl}. \qquad (85,4)$$

[1]) Именно такую систему координат надо иметь в виду во всех рассуждениях, где мы для краткости говорим просто о галилеевой системе; тем самым все доказательства становятся относящимися не только к плоскому, но и к кривому 4-пространству.

[2]) Вместо обозначений Γ^i_{kl} и $\Gamma_{i,kl}$ иногда пользуются обозначениями соответственно $\left\{ {kl \atop i} \right\}$ и $\left[{kl \atop i} \right]$.

Легко связать и изменение компонент ковариантного вектора при параллельном переносе с символами Кристоффеля. Для этого заметим, что при параллельном переносе скаляры, очевидно, не меняются. В частности, не меняется при параллельном переносе скалярное произведение двух векторов.

Пусть A_i и B^i — некоторый ковариантный и некоторый контравариантный векторы. Тогда из $\delta(A_iB^i) = 0$ имеем:

$$B^i\delta A_i = -A_i\delta B^i = \Gamma^i_{kl}B^kA_i dx^l,$$

или, меняя обозначение индексов,

$$B^i\delta A_i = \Gamma^k_{il}A_kB^i dx^l.$$

Отсюда имеем ввиду произвольности B^i:

$$\delta A_i = \Gamma^k_{il}A_k dx^l, \tag{85,5}$$

чем и определяется изменение ковариантного вектора при параллельном переносе.

Подставляя (85,2) и $dA^i = \frac{\partial A^i}{\partial x^l}dx^l$ в (85,1), имеем:

$$DA^i = \left(\frac{\partial A^i}{\partial x^l} + \Gamma^i_{kl}A^k\right)dx^l. \tag{85,6}$$

Аналогично находим для ковариантного вектора

$$DA_i = \left(\frac{\partial A_i}{\partial x^l} - \Gamma^k_{il}A_k\right)dx^l. \tag{85,7}$$

Выражения, стоящие в скобках в (85,6—7) являются тензорами, так как умноженные на вектор dx^l они дают снова вектор. Очевидно, что они и являются теми тензорами, которые осуществляют искомое обобщение понятия производной от вектора на криволинейные координаты. Эти тензоры носят название *ковариантных производных* соответственно векторов A^i и A_i. Мы будем обозначать их посредством $A^i_{;k}$ и $A_{i;k}$. Таким образом,

$$DA^i = A^i_{;l}dx^l, \quad DA_i = A_{i;l}dx^l, \tag{85,8}$$

а сами ковариантные производные:

$$A^i_{;l} = \frac{\partial A^i}{\partial x^l} + \Gamma^i_{kl}A^k, \tag{85,9}$$

$$A_{i;l} = \frac{\partial A_i}{\partial x^l} - \Gamma^k_{il}A_k. \tag{85,10}$$

В галилеевых координатах $\Gamma^i_{kl} = 0$ и ковариантные производные переходят в обычные.

Легко определить также ковариантную производную от тензора. Для этого надо определить изменение тензора при бесконечно малом параллельном переносе. Рассмотрим, например, какой-нибудь контравариантный тензор, являющийся произведением двух контравариантных векторов A^iB^k. При параллельном переносе имеем:

$$\delta(A^iB^k) = A^i\delta B^k + B^k\delta A^i = -A^i\Gamma^k_{lm}B^l dx^m - B^k\Gamma^i_{lm}A^l dx^m.$$

В силу линейности этого преобразования оно должно иметь место и для любого тензора A^{ik}:

$$\delta A^{ik} = -(A^{im}\Gamma^k_{ml} + A^{mk}\Gamma^i_{ml})\, dx^l. \qquad (85,11)$$

Подставляя это в

$$DA^{ik} = dA^{ik} - \delta A^{ik} \equiv A^{ik}{}_{;l}\, dx^l,$$

находим ковариантную производную тензора A^{ik} в виде

$$A^{ik}{}_{;l} = \frac{\partial A^{ik}}{\partial x^l} + \Gamma^i_{ml}A^{mk} + \Gamma^k_{ml}A^{im}. \qquad (85,12)$$

Совершенно аналогично находим ковариантные производные смешанного и ковариантного тензоров в виде

$$A^i_{k;l} = \frac{\partial A^i_k}{\partial x^l} - \Gamma^m_{kl}A^i_m + \Gamma^i_{ml}A^m_k, \qquad (85,13)$$

$$A_{ik;l} = \frac{\partial A_{ik}}{\partial x^l} - \Gamma^m_{il}A_{mk} - \Gamma^m_{kl}A_{im}. \qquad (85,14)$$

Аналогичным образом можно определить ковариантную производную тензора любого ранга. При этом получается следующее правило ковариантного дифференцирования: чтобы получить ковариантную производную тензора $A^{\cdots}_{\cdots}$ по x^l, к обычной производной $\partial A^{\cdots}_{\cdots}/\partial x^l$ на каждый ковариантный индекс i $(A^{\cdot\cdot}_{\cdot i \cdot})$ надо прибавить член $-\Gamma^k_{il}A^{\cdot\cdot}_{\cdot k \cdot}$, а на каждый контравариантный индекс i $(A^{\cdot i \cdot}_{\cdots})$ надо прибавить член $+\Gamma^i_{kl}A^{\cdot k \cdot}_{\cdots}$.

Можно легко убедиться в том, что ковариантная производная от произведения находится по тем же правилам, что и обычная производная от произведения. При этом ковариантную производную от скаляра φ надо понимать как обычную производную, т. е. как ковариантный вектор $\varphi_k = \partial\varphi/\partial x^k$, в согласии с тем, что для скаляров $\delta\varphi = 0$ и потому $D\varphi = d\varphi$. Например, ковариантная производная произведения A_iB_k равна

$$(A_iB_k)_{;l} = A_{i;l}B_k + A_iB_{k;l}.$$

Поднимая у ковариантных производных индекс, указывающий дифференцирование, мы получим так называемые контравариантные

производные. Так,

$$A_i^{;k} = g^{kl} A_{i;l}, \quad A^{i;k} = g^{kl} A^i_{\ ;l}.$$

Докажем, что символы Кристоффеля Γ^i_{kl} симметричны по нижним индексам. Поскольку ковариантная производная вектора $A_{i;k}$ есть тензор, то и разность $A_{i;k} - A_{k;i}$ есть тензор. Пусть вектор A_i есть градиент скаляра, т. е. $A_i = \partial\varphi/\partial x^i$. Поскольку

$$\frac{\partial A_i}{\partial x^k} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^i \partial x^k} = \frac{\partial A_k}{\partial x^i},$$

то с помощью выражения (85,10) имеем:

$$A_{k;i} - A_{i;k} = (\Gamma^l_{ik} - \Gamma^l_{ki}) \frac{\partial\varphi}{\partial x^l}.$$

В галилеевой системе координат ковариантные производные превращаются в обычные, а потому левая часть написанного равенства обращается в нуль. Но поскольку $A_{k;i} - A_{i;k}$ есть тензор, то, будучи равным нулю в одной системе, он должен быть равен нулю в любой системе координат. Отсюда находим, что

$$\Gamma^i_{kl} = \Gamma^i_{lk}. \tag{85,15}$$

Очевидно, что и

$$\Gamma_{i,kl} = \Gamma_{i,lk}. \tag{85,16}$$

В общем случае имеется всего 40 различных величин Γ^i_{kl} — для каждого из четырех значений индекса i имеется 10 различных пар значений индексов k и l (считая пары, получающиеся перестановкой k и l одинаковыми).

В заключение этого параграфа приведем формулы преобразования от одной системы координат к другой для символов Кристоффеля. Эти формулы можно получить, сравнивая законы преобразования обеих сторон равенств, определяющих любую из ковариантных производных, и требуя, чтобы эти законы для обеих сторон были одинаковы. Простое вычисление приводит к формуле

$$\Gamma^i_{kl} = \Gamma'^m_{np} \frac{\partial x^i}{\partial x'^m} \frac{\partial x'^n}{\partial x^k} \frac{\partial x'^p}{\partial x^l} + \frac{\partial^2 x'^m}{\partial x^k \partial x^l} \frac{\partial x^i}{\partial x'^m}. \tag{85,17}$$

Из этой формулы видно, что величины Γ^i_{kl} ведут себя как тензоры лишь по отношению к линейным преобразованиям координат [когда исчезает второй член в (85,17)].

Формула (85,17) позволяет легко доказать сделанное выше утверждение о возможности такого выбора системы координат, при

котором все Γ^i_{kl} обращаются в нуль в любой наперед заданной точке (такую систему называют *локально-геодезической*, см. § 87) [1]).

Действительно, пусть заданная точка выбрана в качестве начала координат и величины Γ^i_{kl} имеют в ней первоначально (в координатах x^i) значения $(\Gamma^i_{kl})_0$. Произведем вблизи этой точки преобразование

$$x'^i = x^i + \frac{1}{2}(\Gamma^i_{kl})_0 x^k x^l. \qquad (85,18)$$

Тогда

$$\left(\frac{\partial^2 x'^m}{\partial x^k \partial x^l}\,\frac{\partial x^i}{\partial x'^m}\right)_0 = (\Gamma^i_{kl})_0$$

и согласно (85,17) все Γ'^m_{np} обращаются в нуль.

Заметим, что для преобразования (85,18)

$$\left(\frac{\partial x'^i}{\partial x^k}\right)_0 = \delta^i_k,$$

поэтому оно не меняет значений любого тензора (в том числе тензора g_{ik}) в заданной точке, так что обращение символов Кристоффеля в нуль может быть осуществлено одновременно с приведением g_{ik} к галилееву виду.

§ 86. Связь символов Кристоффеля с метрическим тензором

Докажем, что ковариантная производная от метрического тензора g_{ik} равна нулю. Для этого заметим, что для вектора DA_i, как и для всякого вектора, должно иметь место соотношение

$$DA_i = g_{ik} DA^k.$$

С другой стороны, $A_i = g_{ik}A^k$, и потому

$$DA_i = D(g_{ik}A^k) = g_{ik}DA^k + A^k Dg_{ik}.$$

Сравнивая с $DA_i = g_{ik}DA^k$, имеем в виду производности вектора A^i:

$$Dg_{ik} = 0.$$

Поэтому и ковариантная производная

$$g_{ik;l} = 0. \qquad (86,1)$$

Таким образом, при ковариантном дифференцировании g_{ik} надо рассматривать как постоянные.

---

[1]) Можно показать также, что надлежащим выбором системы координат можно обратить в нуль все Γ^i_{kl} не только в данной точке, но и вдоль заданной линии.

Равенством $g_{ik;l}=0$ можно воспользоваться для того, чтобы выразить символы Кристоффеля Γ^i_{kl} через метрический тензор g_{ik}. Для этого напишем согласно общему определению (85,14):

$$g_{ik;l}=\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l}-g_{mk}\Gamma^m_{il}-g_{im}\Gamma^m_{kl}=\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l}-\Gamma_{k,il}-\Gamma_{i,kl}=0.$$

Таким образом, производные от g_{ik} выражаются через символы Кристоффеля[1]). Напишем эти производные, переставляя индексы i, k, l:

$$\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l}=\Gamma_{k,il}+\Gamma_{i,kl},\quad \frac{\partial g_{li}}{\partial x^k}=\Gamma_{i,kl}+\Gamma_{l,ik},\quad -\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i}=-\Gamma_{l,ki}-\Gamma_{k,li}.$$

Взяв полусумму этих равенств, находим (помня, что $\Gamma_{i,kl}=\Gamma_{i,lk}$):

$$\Gamma_{i,kl}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l}+\frac{\partial g_{il}}{\partial x^k}-\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i}\right). \tag{86,2}$$

Отсюда имеем для символов $\Gamma^i_{kl}=g^{im}\Gamma_{m,kl}$:

$$\Gamma^i_{kl}=\frac{1}{2}g^{im}\left(\frac{\partial g_{mk}}{\partial x^l}+\frac{\partial g_{ml}}{\partial x^k}-\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^m}\right). \tag{86,3}$$

Эти формулы и дают искомые выражения символов Кристоффеля через метрический тензор.

Выведем полезное для дальнейшего выражение для упрощенного символа Кристоффеля Γ^i_{ki}. Для этого определим дифференциал dg определителя g, составленного из компонент тензора g_{ik}; dg можно получить, взяв дифференциал от каждой компоненты тензора g_{ik} и умножив ее на свой коэффициент в определителе, т. е. на соответствующий минор. С другой стороны, компоненты тензора g^{ik}, обратного тензору g_{ik}, равны, как известно, минорам определителя из величин g_{ik}, деленным на этот определитель. Поэтому миноры определителя g равны gg^{ik}. Таким образом,

$$dg=gg^{ik}dg_{ik}=-gg_{ik}dg^{ik} \tag{86,4}$$

(поскольку $g_{ik}g^{ik}=\delta^i_i=4$, то $g^{ik}dg_{ik}=-g_{ik}dg^{ik}$).

Из (86,3) имеем:

$$\Gamma^i_{ki}=\frac{1}{2}g^{im}\left(\frac{\partial g_{mk}}{\partial x^i}+\frac{\partial g_{mi}}{\partial x^k}-\frac{\partial g_{ki}}{\partial x^m}\right).$$

---

[1]) Выбор локально-геодезической системы координат означает поэтому обращение в нуль в данной точке всех первых производных от компонент метрического тензора.

Меняя местами индексы m и i в третьем и первом членах в скобках, видим, что оба эти члена взаимно сокращаются, так что

$$\Gamma^i_{ki} = \frac{1}{2} g^{im} \frac{\partial g_{im}}{\partial x^k},$$

или согласно (86,4)

$$\Gamma^i_{ki} = \frac{1}{2g} \frac{\partial g}{\partial x^k} = \frac{\partial \ln \sqrt{-g}}{\partial x^k}. \tag{86,5}$$

Полезно заметить также выражение для величины $g^{kl}\Gamma^i_{kl}$. Имеем:

$$g^{kl}\Gamma^i_{kl} = \frac{1}{2} g^{kl} g^{im} \left(\frac{\partial g_{mk}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{lm}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^m} \right) = g^{kl} g^{im} \left(\frac{\partial g_{mk}}{\partial x^l} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^m} \right).$$

С помощью (86,4) это можно преобразовать к виду

$$g^{kl}\Gamma^i_{kl} = -\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial (\sqrt{-g}\, g^{ik})}{\partial x^k}. \tag{86,6}$$

При различных вычислениях бывает полезным иметь в виду, что производные от контравариантного тензора g^{ik} связаны с производными от g_{ik} соотношениями

$$g_{il} \frac{\partial g^{lk}}{\partial x^m} = -g^{lk} \frac{\partial g_{il}}{\partial x^m} \tag{86,7}$$

(получающимися при дифференцировании равенства $g_{il} g^{lk} = \delta^k_i$). Наконец, укажем, что производные от g^{ik} тоже могут быть выражены через величины Γ^i_{kl}. Именно, из тождества $g^{ik}{}_{;l} = 0$ непосредственно следует, что

$$\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l} = -\Gamma^i_{ml} g^{mk} - \Gamma^k_{ml} g^{im}. \tag{86,8}$$

С помощью полученных формул можно привести к удобному виду выражение $A^i_{;i}$, являющееся обобщением дивергенции вектора на криволинейные координаты. Воспользовавшись (86,5), имеем:

$$A^i_{;i} = \frac{\partial A^i}{\partial x^i} + \Gamma^i_{li} A^l = \frac{\partial A^i}{\partial x^i} + A^l \frac{\partial \ln \sqrt{-g}}{\partial x^l},$$

или окончательно

$$A^i_{;i} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial (\sqrt{-g}\, A^i)}{\partial x^i}. \tag{86,9}$$

Аналогичное выражение можно получить и для дивергенции антисимметричного тензора A^{ik}. Из (85,12) имеем:

$$A^{ik}_{;k} = \frac{\partial A^{ik}}{\partial x^k} + \Gamma^i_{mk} A^{mk} + \Gamma^k_{mk} A^{im}.$$

Но поскольку $A^{mk}=-A^{km}$, то

$$\Gamma^l_{mk}A^{mk}=-\Gamma^l_{km}A^{km}=0.$$

Подставляя выражение (86,5) для Γ^k_{mk}, находим, следовательно:

$$A^{ik}_{;k}=\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial(\sqrt{-g}\,A^{ik})}{\partial x^k}. \qquad (86,10)$$

Пусть теперь A_{ik} — симметричный тензор; определим выражение $A^k_{i;k}$ для его смешанных компонент. Имеем:

$$A^k_{i;k}=\frac{\partial A^k_i}{\partial x^k}+\Gamma^k_{lk}A^l_i-\Gamma^l_{ik}A^k_l=\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial(A^k_i\sqrt{-g})}{\partial x^k}-\Gamma^l_{ki}A^k_l.$$

Последний член здесь равен

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{il}}{\partial x^k}+\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i}-\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l}\right)A^{kl}.$$

В силу симметрии тензора A^{kl} два члена в скобках взаимно сокращаются, и остается

$$A^k_{i;k}=\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial(\sqrt{-g}\,A^k_i)}{\partial x^k}-\frac{1}{2}\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i}A^{kl}. \qquad (86,11)$$

В декартовых координатах $\frac{\partial A_i}{\partial x^k}-\frac{\partial A_k}{\partial x^i}$ есть антисимметричный тензор. В криволинейных координатах этот тензор есть $A_{i;k}-A_{k;i}$. Однако с помощью выражений для $A_{i;k}$ и ввиду того, что $\Gamma^i_{kl}=\Gamma^i_{lk}$, имеем:

$$A_{i;k}-A_{k;i}=\frac{\partial A_i}{\partial x^k}-\frac{\partial A_k}{\partial x^i}. \qquad (86,12)$$

Наконец, преобразуем к криволинейным координатам сумму $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i\partial x^i}$ вторых производных от некоторого скаляра φ. Очевидно, что в криволинейных координатах эта сумма перейдет в $\varphi^{;i}_{;i}$. Но $\varphi_{;i}=\partial\varphi/\partial x^i$, так как ковариантное дифференцирование скаляра сводится к обычному дифференцированию. Поднимая индекс i, имеем:

$$\varphi^{;i}=g^{ik}\frac{\partial\varphi}{\partial x^k}$$

и с помощью формулы (86,9) находим:

$$\varphi^{;i}_{;i}=\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{-g}\,g^{ik}\frac{\partial\varphi}{\partial x^k}\right). \qquad (86,13)$$

Полезно заметить, что теорема Гаусса (83,17) для преобразования интеграла от вектора по гиперповерхности в интеграл по 4-объему может быть написана ввиду (86,9) как

$$\oint A^i\sqrt{-g}\,dS_i=\int A^i_{;i}\sqrt{-g}\,d\Omega. \qquad (86,14)$$

§ 87. Движение частицы в гравитационном поле

Движение свободной материальной частицы в специальной теории относительности определяется принципом наименьшего действия:

$$\delta S = -mc\delta \int ds = 0, \qquad (87,1)$$

согласно которому частица движется так, что ее мировая линия является экстремальной между двумя заданными мировыми точками, т. е. в данном случае прямой (в обычном трехмерном пространстве этому соответствует прямолинейное равномерное движение).

Движение частицы в гравитационном поле должно определяться принципом наименьшего действия в той же форме (87,1), так как гравитационное поле является не чем иным, как изменением метрики пространства-времени, проявляющимся только в изменении выражения ds через dx^i. Таким образом, в гравитационном поле частица движется так, что ее мировая точка перемещается по экстремальной, или, как говорят, по *геодезической* линии в 4-пространстве x^0, x^1, x^2, x^3; поскольку, однако, при наличии гравитационного поля пространство-время негалилеево, то эта линия не «прямая», а реальное пространственное движение частицы—не равномерно и непрямолинейно.

Вместо того чтобы снова исходить непосредственно из принципа наименьшего действия (см. задачу к этому параграфу), проще найти уравнения движения частицы в гравитационном поле путем соответствующего обобщения дифференциальных уравнений свободного движения частицы в специальной теории относительности, т. е. в галилеевой 4-системе координат. Эти уравнения гласят $du^i/ds = 0$, или иначе $du^i = 0$, где $u^i = dx^i/ds$ есть 4-скорость. Очевидно, что в криволинейных координатах это уравнение обобщается в

$$Du^i = 0. \qquad (87,2)$$

Из выражения (85,6) для ковариантного дифференциала вектора имеем:

$$du^i + \Gamma^i_{kl} u^k dx^l = 0.$$

Разделив это уравнение на ds, находим:

$$\frac{d^2x^i}{ds^2} + \Gamma^i_{kl} \frac{dx^k}{ds} \frac{dx^l}{ds} = 0. \qquad (87,3)$$

Это и есть искомые уравнения движения. Мы видим, что движение частицы в гравитационном поле определяется величинами Γ^i_{kl}. Производная d^2x^i/ds^2 есть 4-ускорение частицы. Поэтому мы можем назвать величину $-m\Gamma^i_{kl}u^k u^l$ «4-силой», действующей на частицу в гравитационном поле. Тензор g_{ik} играет при этом роль «потенциалов»

гравитационного поля — его производные определяют «напряженность» поля Γ^i_{kl} [1]).

В § 85 было показано, что соответствующим выбором системы координат всегда можно обратить все Γ^i_{kl} в нуль в любой заданной точке пространства-времени. Мы видим теперь, что выбор такой локально-инерциальной системы отсчета означает исключение гравитационного поля в данном бесконечно малом элементе пространства-времени, а возможность такого выбора есть выражение принципа эквивалентности в релятивистской теории тяготения.

4-импульс частицы в гравитационном поле определяется по-прежнему как

$$p^i = mcu^i, \tag{87,4}$$

а его квадрат равен

$$p_i p^i = m^2c^2. \tag{87,5}$$

Подставив сюда $-\partial S/\partial x^i$ вместо p_i, найдем уравнение Гамильтона — Якоби для частицы в гравитационном поле

$$g^{ik}\frac{\partial S}{\partial x^i}\frac{\partial S}{\partial x^k} + m^2c^2 = 0. \tag{87,6}$$

Для распространения светового сигнала уравнение геодезической линии в форме (87,3) неприменимо, так как вдоль мировой линии распространения светового луча интервал $ds = 0$ и все члены в уравнении (87,3) обращаются в бесконечность. Для придания уравнениям движения в этом случае нужного вида воспользуемся тем, что направление распространения луча света в геометрической оптике определяется волновым вектором, касательным к лучу. Мы можем поэтому написать четырехмерный волновой вектор в виде $k^i = dx^i/d\lambda$, где λ есть некоторый параметр, меняющийся вдоль луча. В специальной теории относительности при распространении света в пустоте волновой вектор не меняется вдоль луча, т. е. $dk^i = 0$ (см. § 53). В гравитационном поле это уравнение переходит в $Dk^i = 0$ или

$$\frac{dk^i}{d\lambda} + \Gamma^i_{kl}k^k k^l = 0 \tag{87,7}$$

(из этих же уравнений определится и параметр λ).

[1]) Отметим также вид уравнения движения, выраженного через ковариантные компоненты 4-ускорения. Из условия $Du_i = 0$ находим:

$$\frac{du_i}{ds} - \Gamma_{k,il}u^k u^l = 0.$$

При подстановке сюда $\Gamma_{k,il}$ из (86,2) два члена сокращаются и остается

$$\frac{du_i}{ds} - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i}u^k u^l = 0.$$

Квадрат волнового 4-вектора равен нулю (см. § 48), т. е.

$$k_i k^i = 0. \qquad (87,8)$$

Подставляя сюда $\partial\psi/\partial x^i$ вместо k_i (ψ — эйконал), находим уравнение эйконала в гравитационном поле

$$g^{ik}\frac{\partial\psi}{\partial x^i}\frac{\partial\psi}{\partial x^k} = 0. \qquad (87,9)$$

В предельном случае малых скоростей релятивистские уравнения движения частицы в гравитационном поле должны перейти в соответствующие нерелятивистские уравнения. При этом надо иметь в виду, что из предположения о малости скоростей вытекает также условие, что само гравитационное поле должно быть слабым; в противном случае находящаяся в нем частица приобрела бы большую скорость.

Выясним, как связан в этом предельном случае метрический тензор g_{ik} с нерелятивистским потенциалом φ гравитационного поля.

В нерелятивистской механике движение частицы в гравитационном поле определяется функцией Лагранжа (81,1). Мы напишем ее теперь в виде

$$L = -mc^2 + \frac{mv^2}{2} - m\varphi, \qquad (87,10)$$

прибавив постоянную $-mc^2$ [1]). Это надо сделать для того, чтобы нерелятивистская функция Лагранжа в отсутствие поля $L = -mc^2 + mv^2/2$ была в точности той, в которую переходит соответствующая релятивистская функция $L = -mc^2\sqrt{1 - v^2/c^2}$ в пределе при $v/c \to 0$.

Нерелятивистское действие S для частицы в гравитационном поле, следовательно, имеет вид

$$S = \int L\,dt = -mc\int\left(c - \frac{v^2}{2c} + \frac{\varphi}{c}\right)dt.$$

Сравнивая это с выражением $S = -mc\int ds$, мы видим, что в рассматриваемом предельном случае

$$ds = \left(c - \frac{v^2}{2c} + \frac{\varphi}{c}\right)dt.$$

[1]) Потенциал φ определен, разумеется, лишь с точностью до произвольной аддитивной постоянной. Мы подразумеваем везде естественный выбор этой постоянной, при котором потенциал обращается в нуль вдали от тел, создающих поле.

Возводя в квадрат и опуская члены, обращающиеся при $c \to \infty$ в нуль, находим:

$$ds^2 = (c^2 + 2\varphi)\,dt^2 - d\mathbf{r}^2, \tag{87,11}$$

где мы учли, что $\mathbf{v}\,dt = d\mathbf{r}$.

Таким образом, компонента g_{00} метрического тензора в предельном случае равна

$$g_{00} = 1 + \frac{2\varphi}{c^2}. \tag{87,12}$$

Что касается остальных компонент, то из (87,11) следовало бы, что $g_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}$, $g_{0\alpha} = 0$. В действительности, однако, поправки к ним, вообще говоря, того же порядка величины, что и поправка в g_{00} (см. об этом подробнее в § 106). Невозможность определения этих поправок приведенным выше способом связана с тем, что поправка в $g_{\alpha\beta}$, имеющая тот же порядок величины, что и поправка в g_{00}, привела бы в функции Лагранжа к членам более высокого порядка малости (вследствие того, что в выражении для ds^2 компоненты $g_{\alpha\beta}$ не умножаются на c^2, как это имеет место для g_{00}).

Задача

Вывести уравнение движения (87,3) из принципа наименьшего действия (87,1).

Решение. Имеем:

$$\delta ds^2 = 2ds\delta ds = \delta\,(g_{ik}dx^i dx^k) = dx^i dx^k \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l}\,\delta x^l + 2g_{ik}dx^i d\delta x^k.$$

Поэтому

$$\delta S = -mc\int\left\{\frac{1}{2}\,\frac{dx^i}{ds}\,\frac{dx^k}{ds}\,\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l}\,\delta x^l + g_{ik}\,\frac{dx^i}{ds}\,\frac{d\delta x^k}{ds}\right\}ds =$$

$$= -mc\int\left\{\frac{1}{2}\,\frac{dx^i}{ds}\,\frac{dx^k}{ds}\,\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l}\,\delta x^l - \frac{d}{ds}\left(g_{ik}\,\frac{dx^i}{ds}\right)\delta x^k\right\}ds$$

(при интегрировании по частям учтено, что на пределах $\delta x^k = 0$). Во втором члене под интегралом заменим индекс k индексом l. Тогда находим, приравнивая нулю коэффициент при произвольной вариации δx^l:

$$\frac{1}{2}\,u^i u^k\,\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} - \frac{d}{ds}\,(g_{il}u^i) = \frac{1}{2}\,u^i u^k\,\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} - g_{il}\,\frac{du^i}{ds} - u^i u^k\,\frac{\partial g_{il}}{\partial x^k} = 0.$$

Замечая, что третий член можно написать в виде

$$-\frac{1}{2}\,u^i u^k\left(\frac{\partial g_{il}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i}\right),$$

и вводя символы Кристоффеля $\Gamma_{l,ik}$ согласно (86,2), получаем:

$$g_{il}\,\frac{du^i}{ds} + \Gamma_{l,ik}u^i u^k = 0.$$

Уравнение (87,3) получается отсюда поднятием индекса l.

§ 88. Постоянное гравитационное поле

Гравитационное поле называют *постоянным*, если можно выбрать такую систему отсчета, в которой все компоненты метрического тензора не зависят от временной координаты x^0; последнюю называют в таком случае *мировым временем*.

Выбор мирового времени не вполне однозначен. Так, при добавлении к x^0 произвольной функции пространственных координат все g_{ik} по-прежнему не будут содержать x^0; это преобразование соответствует произвольности выбора начала отсчета времени в каждой точке пространства[1]). Кроме того, разумеется, мировое время допускает умножение на произвольную постоянную, т. е. произвольный выбор единицы его измерения.

Строго говоря, постоянным может быть лишь поле, создаваемое одним телом. В системе нескольких тел их взаимное гравитационное притяжение приводит к возникновению движения, в результате чего создаваемое ими поле не может быть постоянным.

Если создающее поле тело неподвижно (в системе отсчета, в которой g_{ik} не зависят от x^0), то оба направления времени эквивалентны. При должном выборе начала отсчета времени во всех точках пространства, интервал ds в этом случае не должен меняться при изменении знака x^0, а потому все компоненты $g_{0\alpha}$ метрического тензора должны быть тождественно равными нулю. Такие постоянные гравитационные поля мы будем называть *статическими*.

Неподвижность тела, однако, не является обязательным условием постоянства создаваемого им поля. Так, будет постоянным также и поле равномерно вращающегося вокруг своей оси аксиально-симметрического тела. Но в этом случае оба направления времени уже отнюдь не равноценны — при изменении знака времени меняется знак угловой скорости вращения. Поэтому в таких постоянных гравитационных полях (которые мы будем называть *стационарными*) компоненты $g_{0\alpha}$ метрического тензора, вообще говоря, отличны от нуля.

Смысл мирового времени в постоянном гравитационном поле заключается в том, что его промежуток между двумя событиями в

---

[1]) Легко видеть, что прн этом преобразоваинн пространственная метрнка, как и следовало, ие меияется.

Действительио, при замеие

$$x^0 \longrightarrow x^0 + f(x^1, x^2, x^3)$$

с произвольной функцией $f(x^1, x^2, x^3)$ компоненты g_{ik} заменяются на

$$g_{\alpha\beta} \longrightarrow g_{\alpha\beta} + g_{00} f_{,\alpha} f_{,\beta} + g_{0\alpha} f_{,\beta} + g_{0\beta} f_{,\alpha},$$
$$g_{0\alpha} \longrightarrow g_{0\alpha} + g_{00} f_{,\alpha}, \quad g_{00} \longrightarrow g_{00},$$

где $f_{,\alpha} \equiv \partial f / \partial x^\alpha$. Прн этом, очевидно, трехмерный тензор (84,7) не меняется.

некоторой точке пространства совпадает с его промежутком между любыми другими двумя событиями в любой другой точке пространства, соответственно одновременными (в выясненном в § 84 смысле) с первой парой событий. Но одинаковым промежуткам мирового времени x_0 соответствуют в разных точках пространства различные промежутки собственного времени τ. Связь (84,1) между ними можно написать теперь в виде

$$\tau = \frac{1}{c}\sqrt{g_{00}}\,x^0, \qquad (88,1)$$

применимом к любым конечным промежуткам.

В слабом гравитационном поле можно воспользоваться приближенным выражением (87,12); при этом (88,1) дает, с той же точностью,

$$\tau = \frac{x^0}{c}\left(1 + \frac{\varphi}{c^2}\right). \qquad (88,2)$$

Таким образом, собственное время течет тем медленнее, чем меньше гравитационный потенциал в данной точке пространства, т. е. чем больше его абсолютная величина (ниже, в § 96 будет показано, что потенциал φ отрицателен). Если из двух одинаковых часов одни находились некоторое время в гравитационном поле, то после этого часы, бывшие в поле, окажутся отставшими.

Как уже было указано, в статическом гравитационном поле компоненты $g_{0\alpha}$ метрического тензора равны нулю. Согласно результатам § 84 это значит, что в таком поле возможна синхронизация часов во всем пространстве.

Заметим также, что для элемента пространственного расстояния в статическом поле имеем просто:

$$dl^2 = -g_{\alpha\beta}\,dx^\alpha\,dx^\beta. \qquad (88,3)$$

В стационарном поле $g_{0\alpha}$ отличны от нуля и синхронизация часов во всем пространстве невозможна. Поскольку g_{ik} не зависят от x^0, то формулу (84,14) для разности значений мирового времени двух одновременных событий, происходящих в разных точках пространства, можно написать в виде

$$\Delta x^0 = -\int \frac{g_{0\alpha}\,dx^\alpha}{g_{00}}, \qquad (88,4)$$

применимом для любых двух точек на линии, вдоль которой производится синхронизация часов. При синхронизации же вдоль замкнутого контура разность значений мирового времени, которая

обнаружилась бы по возвращении в исходную точку, равна интегралу

$$\Delta x^0 = -\oint \frac{g_{0\alpha}\, dx^\alpha}{g_{00}}, \qquad (88,5)$$

взятому по этому замкнутому контуру [1]).

Рассмотрим распространение лучей света в постоянном гравитационном поле. Мы видели в § 53, что частота света равна производной от эйконала ψ по времени (с обратным знаком). Частота, измеренная в мировом времени x^0/c, поэтому равна $\omega_0 = -c\, \partial\psi/\partial x^0$. Поскольку уравнение эйконала (87,9) в постоянном поле не содержит x^0 явно, то частота ω_0 остается постоянной при распространении луча света. Частота же, измеренная в собственном времени, равна $\omega = -\partial\psi/\partial\tau$; она различна в разных точках пространства.

В силу соотношения

$$\frac{\partial\psi}{\partial\tau} = \frac{\partial\psi}{\partial x^0}\frac{\partial x^0}{\partial\tau} = \frac{\partial\psi}{\partial x^0}\frac{c}{\sqrt{g_{00}}}$$

имеем:

$$\omega = \frac{\omega_0}{\sqrt{g_{00}}}. \qquad (88,6)$$

В слабом гравитационном поле получаем отсюда приближенно:

$$\omega = \omega_0\left(1 - \frac{\varphi}{c^2}\right). \qquad (88,7)$$

Мы видим, что частота света возрастает с увеличением абсолютной величины потенциала гравитационного поля, т. е. при приближении к создающим поле телам; наоборот, при удалении луча от этих тел частота света уменьшается. Если луч света, испущенный в точке, где гравитационный потенциал равен φ_1, имеет (в этой точке) частоту ω, то, придя в точку с потенциалом φ_2, он будет иметь частоту (измеренную в собственном времени в этой точке), равную

$$\frac{\omega}{1 - \frac{\varphi_1}{c^2}}\left(1 - \frac{\varphi_2}{c^2}\right) = \omega\left(1 + \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{c^2}\right).$$

Линейчатый спектр, испускаемый какими-либо атомами, находящимися, например, на солнце, выглядит там точно так же, как выглядит на земле спектр, испускаемый находящимися на ней такими же атомами. Если же на земле наблюдается спектр, испускаемый атомами, находящимися на солнце, то, как следует из вышеизложенного, его линии окажутся смещенными по сравнению с линиями

[1]) Интеграл (88,5) тождественно равен нулю, если сумма $g_{0\alpha}\, dx^\alpha/g_{00}$ является полным дифференциалом какой-либо функции пространственных координат. Такой случай, однако, означал бы просто, что мы имеем в действительности дело со статическим полем и преобразованием вида $x^0 \to x^0 + f(x^\alpha)$ все $g_{0\alpha}$ могут быть обращены в нуль.

такого же спектра, испускаемого на земле. Именно, каждая линия с частотой ω будет смещена на интервал $\Delta\omega$, определяемый из формулы

$$\Delta\omega = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{c^2}\,\omega, \tag{88,8}$$

где φ_1 и φ_2 — потенциалы гравитационного поля соответственно в месте испускания и в месте наблюдения спектра. Если на земле наблюдается спектр, испускаемый на солнце или звездах, то $|\varphi_1| > |\varphi_2|$ и из (88,8) следует, что $\Delta\omega < 0$, т. е. смещение происходит в сторону меньших частот. Описанное явление называют *красным смещением.*

Происхождение этого явления можно уяснить себе непосредственно на основании сказанного выше о мировом времени. В силу постоянства поля промежуток мирового времени, в течение которого некоторое колебание в световой волне распространится из одной заданной точки пространства в другую, не зависит от x^0. Поэтому число колебаний, происходящих в единицу мирового времени, будет одинаковым во всех точках вдоль луча. Но один и тот же промежуток мирового времени соответствует тем большему промежутку собственного времени, чем дальше мы находимся от создающих поле тел. Следовательно, частота, т. е. число колебаний в единицу собственного времени, будет падать при удалении света от этих масс.

При движении частицы в постоянном поле сохраняется ее энергия, определяемая как производная $(-c\,\partial S/\partial x^0)$ от действия по мировому времени; это следует, например, из того, что x^0 не входит явно в уравнение Гамильтона — Якоби. Определенная таким образом энергия есть временная компонента ковариантного 4-вектора импульса $p_k = mcu_k = mcg_{ki}u^i$. В статическом поле $ds^2 = g_{00}\,dx_0^2 - dl^2$ и мы имеем для энергии, которую мы обозначим здесь посредством $\mathscr{E}_0$,

$$\mathscr{E}_0 = mc^2 g_{00}\frac{dx^0}{ds} = mc^2 g_{00}\frac{dx^0}{\sqrt{g_{00}\,(dx^0)^2 - dl^2}}.$$

Введем скорость частицы

$$v = \frac{dl}{d\tau} = \frac{c\,dl}{\sqrt{g_{00}}\,dx^0},$$

измеренную в собственном времени, т. е. наблюдателем, находящимся в данном месте. Тогда мы получим для энергии

$$\mathscr{E}_0 = \frac{mc^2\sqrt{g_{00}}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \tag{88,9}$$

Это есть та величина, которая остается постоянной при движении частицы.

Легко показать, что выражение (88,9) для энергии остается в силе и в стационарном поле, если только скорость v измерять в собственном времени, определенном по часам, синхронизованным вдоль траектории частицы. Если частица выходит из точки A в момент мирового времени x^0 и приходит в бесконечно близкую точку B в момент x^0+dx^0, то для определения скорости надо взять теперь не промежуток времени $(x^0+dx^0)-x^0=dx^0$, а разность между x^0+dx^0 и моментом $x^0-\frac{g_{0\alpha}}{g_{00}}dx^\alpha$, который одновременен в точке B моменту x^0 в. точке A:

$$(x^0+dx^0)-\left(x^0-\frac{g_{0\alpha}}{g_{00}}dx^\alpha\right)=dx^0+\frac{g_{0\alpha}}{g_{00}}dx^\alpha.$$

Умножив его на $\sqrt{g_{00}}/c$, получим соответствующий интервал собственного времени, так что скорость

$$v^\alpha=\frac{c\,dx^\alpha}{\sqrt{h}\,(dx^0-g_\alpha\,dx^\alpha)}, \qquad (88,10)$$

где мы ввели обозначения

$$g_\alpha=-\frac{g_{0\alpha}}{g_{00}}, \quad h=g_{00} \qquad (88,11)$$

для трехмерного вектора $\mathbf{g}$ (упоминавшегося уже в § 84) и для трехмерного скаляра g_{00}. Ковариантные компоненты скорости $\mathbf{v}$ как трехмерного вектора в пространстве с метрикой $\gamma_{\alpha\beta}$ и соответственно квадрат этого вектора надо понимать как [1])

$$v_\alpha=\gamma_{\alpha\beta}v^\beta, \quad v^2=v_\alpha v^\alpha. \qquad (88,12)$$

Заметим, что при таком определении интервал ds выражается через скорость формулой, аналогичной обычной формуле:

$$ds^2=g_{00}(dx^0)^2+2g_{0\alpha}dx^0\,dx^\alpha+g_{\alpha\beta}dx^\alpha\,dx^\beta=$$
$$=h\,(dx^0-g_\alpha\,dx^\alpha)^2-dl^2=h\,(dx^0-g_\alpha\,dx^\alpha)^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right). \qquad (88,13)$$

Компоненты 4-скорости $u^i=dx^i/ds$ равны

$$u^\alpha=\frac{v^\alpha}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \quad u^0=\frac{1}{\sqrt{h}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}+\frac{g_\alpha v^\alpha}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \qquad (88,14)$$

[1]) В дальнейшем мы неоднократно будем вводить в рассмотрение, наряду с 4-векторами и 4-тензорами, также и трехмерные векторы и тензоры, определенные в пространстве с метрикой $\gamma_{\alpha\beta}$; таковыми являются, в частности, введенные уже векторы $\mathbf{g}$ и $\mathbf{v}$. В то время как в первом случае тензорные операции (в том числе поднятие и опускание индексов) производятся с помощью метрического тензора g_{ik}, во втором случае — с помощью тензора $\gamma_{\alpha\beta}$. Во избежание могущих возникнуть в связи с этим недоразумений мы будем обозначать трехмерные величины с помощью символов, не используемых для обозначения четырехмерных величин.

Энергия же

$$\mathcal{E}_0 = mc^2 g_{0i} u^i = mc^2 h\,(u^0 - g_\alpha u^\alpha)$$

и после подстановки (88,14) приобретает вид (88,9).

В предельном случае слабого гравитационного поля и малых скоростей, подставляя $g_{00} = 1 + 2\varphi/c^2$ в (88,9), получим приближенно:

$$\mathcal{E}_0 = mc^2 + \frac{mv^2}{2} + m\varphi, \qquad (88,15)$$

где $m\varphi$ — потенциальная энергия частицы в гравитационном поле, что находится в соответствии с функцией Лагранжа (87,10).

Задачи

1. Определить силу, действующую на частицу в постоянном гравитационном поле.

Решение. Для нужных нам компонент Γ^i_{kl} находим следующие выражения

$$\Gamma^\alpha_{00} = \frac{1}{2} h^{;\alpha},$$

$$\Gamma^\alpha_{0\beta} = \frac{h}{2}\left(g^\alpha_{;\beta} - g_\beta^{;\alpha}\right) - \frac{1}{2} g_\beta h^{;\alpha}, \qquad (1)$$

$$\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = \lambda^\alpha_{\beta\gamma} + \frac{h}{2}\left[g_\beta\left(g_\gamma^{;\alpha} - g^\alpha_{;\gamma}\right) + g_\gamma\left(g_\beta^{;\alpha} - g^\alpha_{;\beta}\right)\right] + \frac{1}{2} g_\beta g_\gamma h^{;\alpha}.$$

В этих выражениях все тензорные действия (ковариантные дифференцирования, подъем и опускание индексов) производятся в трехмерном пространстве с метрикой $\gamma_{\alpha\beta}$ над трехмерным вектором g^α и трехмерным скаляром h (88,11); $\lambda^\alpha_{\beta\gamma}$ есть трехмерный символ Кристоффеля, составленный из компонент тензора $\gamma_{\alpha\beta}$ так, как Γ^i_{kl} составляется из компонент g_{ik}; при вычислении использованы формулы (84,9—12).

Подставив (1) в уравнение движения

$$\frac{du^\alpha}{ds} = -\Gamma^\alpha_{00}(u^0)^2 - 2\Gamma^\alpha_{0\beta} u^0 u^\beta - \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} u^\beta u^\gamma$$

и используя выражения (88,14) для компонент 4-скорости, после простых преобразований получим:

$$\frac{d}{ds}\frac{v^\alpha}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = -\frac{h^{;\alpha}}{2h\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)} - \frac{\sqrt{h}\left(g^\alpha_{;\beta} - g_\beta^{;\alpha}\right)v^\beta}{c\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)} - \frac{\lambda^\alpha_{\beta\gamma} v^\beta v^\gamma}{c^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}. \qquad (2)$$

Действующая на частицу сила $\mathbf{f}$ есть производная от ее импульса $\mathbf{p}$ по (синхронизованному) собственному времени, определенная с помощью трехмерного ковариантного дифференциала:

$$f^\alpha = c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\frac{Dp^\alpha}{ds} = c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\,\frac{d}{ds}\frac{mv^\alpha}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + \lambda^\alpha_{\beta\gamma}\frac{mv^\beta v^\gamma}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.$$

Из (2) имеем поэтому (для удобства опускаем индекс α):

$$f_\alpha = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \left\{ -\frac{\partial}{\partial x^\alpha} \ln \sqrt{h} + \sqrt{h} \left(\frac{\partial g_\beta}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial g_\alpha}{\partial x^\beta} \right) \frac{v^\beta}{c} \right\},$$

или в обычных трехмерных векторных обозначениях [1])

$$\mathbf{f} = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \left\{ -\operatorname{grad} \ln \sqrt{h} + \sqrt{h} \left[\frac{\mathbf{v}}{c} \operatorname{rot} \mathbf{g} \right] \right\}. \tag{3}$$

Отметим, что если тело неподвижно, то действующая на него сила [первый член в (3)] имеет потенциал. При малых скоростях движения второй член в (3) имеет вид $mc\sqrt{h}\,[\mathbf{v} \operatorname{rot} \mathbf{g}]$, аналогичный силе Кориолиса, которая возникла бы (при отсутствии поля) в системе координат, вращающейся с угловой скоростью

$$\Omega = \frac{c}{2} \sqrt{h} \operatorname{rot} \mathbf{g}.$$

---

[1]) В трехмерных криволинейных координатах единичный антисимметричный тензор определяется как

$$\eta_{\alpha\beta\gamma} = \sqrt{\gamma}\, e_{\alpha\beta\gamma}, \qquad \eta^{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} e^{\alpha\beta\gamma},$$

где $e_{123} = e^{123} = 1$, а при перестановке двух индексов меняют знак [ср. (83,13—14)]. Соответственно этому вектор $\mathbf{c} = [\mathbf{ab}]$, определенный как вектор, дуальный антисимметричному тензору $c_{\beta\gamma} = a_\beta b_\gamma - a_\gamma b_\beta$, имеет компоненты:

$$c_\alpha = \frac{1}{2} \sqrt{\gamma}\, e_{\alpha\beta\gamma} c^{\beta\gamma} = \sqrt{\gamma}\, e_{\alpha\beta\gamma} a^\beta c^\gamma, \qquad c^\alpha = \frac{1}{2\sqrt{\gamma}} e^{\alpha\beta\gamma} c_{\beta\gamma} = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} e^{\alpha\beta\gamma} a_\beta c_\gamma.$$

Обратно,

$$c_{\alpha\beta} = \sqrt{\gamma}\, e_{\alpha\beta\gamma} c^\gamma, \qquad c^{\alpha\beta} = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} e^{\alpha\beta\gamma} c_\gamma.$$

В частности, $\operatorname{rot} \mathbf{a}$ надо понимать в этом же смысле как вектор, дуальный тензору $a_{\beta;\,\alpha} - a_{\alpha;\,\beta} = \frac{\partial a_\beta}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial a_\alpha}{\partial x^\beta}$, так что его контравариантные компоненты

$$(\operatorname{rot} \mathbf{a})^\alpha = \frac{1}{2\sqrt{\gamma}} e^{\alpha\beta\gamma} \left(\frac{\partial a_\gamma}{\partial x^\beta} - \frac{\partial a_\beta}{\partial x^\gamma} \right).$$

Упомянем также в этой связи, что трехмерная дивергенция вектора

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} (\sqrt{\gamma}\, a^\alpha)$$

[ср. (86,9)].

Во избежание недоразумений при сравнении с формулами, часто применяемыми для трехмерных векторных операций в ортогональных криволинейных координатах (см., например, «Электродинамика сплошных сред», приложение), укажем, что в этих формулах под компонентами вектора подразумеваются величины $\sqrt{g_{11}}\, A^1 \left(= \sqrt{A_1 A^1}\right)$, $\sqrt{g_{22}}\, A^2$, $\sqrt{g_{33}}\, A^3$.

2. Вывести принцип Ферма для распространения лучей в постоянном гравитационном поле.

Решение. Принцип Ферма (см. § 53) гласит:

$$\delta \int k_\alpha \, dx^\alpha = 0,$$

где интеграл берется вдоль луча, а подынтегральное выражение должно быть выражено через постоянную вдоль луча частоту ω_0 и дифференциалы координат. Замечая, что $k_0 = -\partial\psi/\partial x^0 = \omega_0/c$, пишем:

$$\frac{\omega_0}{c} = k_0 = g_{0i}k^i = g_{00}k^0 + g_{0\alpha}k^\alpha = h\,(k^0 - g_\alpha k^\alpha).$$

Подставляя это в соотношение $k_i k^i = g_{ik}k^i k^k = 0$, написанное в виде

$$h\,(k^0 - g_\alpha k^\alpha)^2 - \gamma_{\alpha\beta}k^\alpha k^\beta = 0,$$

получим:

$$\frac{1}{h}\left(\frac{\omega_0}{c}\right)^2 - \gamma_{\alpha\beta}k^\alpha k^\beta = 0.$$

Учитывая также, что вектор k^α должен иметь направление вектора dx^α, находим отсюда:

$$k^\alpha = \frac{\omega_0}{c\sqrt{h}} \frac{dx^\alpha}{dl},$$

где dl (84,6) есть элемент пространственного расстояния вдоль луча. Чтобы получить выражение для k_α, пишем:

$$k^\alpha = g^{\alpha i}k_i = g^{\alpha 0}k_0 + g^{\alpha\beta}k_\beta = -g^\alpha \frac{\omega_0}{c} - \gamma^{\alpha\beta}k_\beta,$$

откуда

$$k_\alpha = -\gamma_{\alpha\beta}\left(k^\beta + \frac{\omega_0}{c} g^\beta\right) = -\frac{\omega_0}{c}\left(\frac{\gamma_{\alpha\beta}}{\sqrt{h}}\frac{dx^\beta}{dl} + g_\alpha\right).$$

Наконец, умножая на dx^α, получим принцип Ферма в виде (постоянный множитель ω_0/c опускаем)

$$\delta \int \left(\frac{dl}{\sqrt{h}} + g_\alpha \, dx^\alpha\right) = 0.$$

В статическом поле имеем просто:

$$\delta \int \frac{dl}{\sqrt{h}} = 0.$$

Обращаем внимание на то, что в гравитационном поле луч распространяется не по кратчайшей линии в пространстве, так как последняя определилась бы уравнением $\delta \int dl = 0$.

§ 89. Вращение

Особым случаем стационарных гравитационных полей является поле, возникающее при переходе к равномерно вращающейся системе отсчета.

Для определения интервала ds произведем преобразование от неподвижной (инерциальной) системы к равномерно вращающейся.

В неподвижной системе координат r', φ', z', t (мы пользуемся цилиндрическими пространственными координатами) интервал имеет вид

$$ds^2 = c^2dt^2 - dr'^2 - r'^2d\varphi'^2 - dz'^2. \qquad (89,1)$$

Во вращающейся системе цилиндрические координаты пусть будут r, φ, z. Если ось вращения совпадает с осями z и z', то имеем $r' = r$, $z' = z$, $\varphi' = \varphi + \Omega t$, где Ω — угловая скорость вращения. Подставляя в (89,1), находим искомое выражение для интервала во вращающейся системе отсчета:

$$ds^2 = (c^2 - \Omega^2 r^2)\,dt^2 - 2\Omega r^2 d\varphi\,dt - dz^2 - r^2d\varphi^2 - dr^2. \qquad (89,2)$$

Необходимо отметить, что вращающейся системой отсчета можно пользоваться только до расстояний, равных c/Ω. Действительно, из (89,2) видно, что при $r > c/\Omega$ величина g_{00} становится отрицательной, что недопустимо. Неприменимость вращающейся системы отсчета на больших расстояниях связана с тем, что скорость вращения сделалась бы на них большей скорости света, и потому такая система не может быть осуществлена реальными телами.

Как и во всяком стационарном поле, на вращающемся теле часы не могут быть однозначно синхронизованы во всех точках. Производя синхронизацию вдоль некоторой замкнутой линии, мы получим, возвратясь в исходную точку, время, отличающееся от первоначального на величину [см. (88,5)]

$$\Delta t = -\frac{1}{c}\oint \frac{g_{0\alpha}}{g_{00}}\,dx^\alpha = \frac{1}{c^2}\oint \frac{\Omega r^2 d\varphi}{1 - \frac{\Omega^2 r^2}{c^2}}$$

или, предполагая, что $\Omega r/c \ll 1$ (т. е. скорость вращения мала по сравнению со скоростью света):

$$\Delta t = \frac{\Omega}{c^2}\int r^2 d\varphi = \pm\frac{2\Omega}{c^2}S, \qquad (89,3)$$

где S — площадь проекции контура на плоскость, перпендикулярную к оси вращения (знак $+$ или $-$ имеет место соответственно при обходе контура по или против направления вращения).

Предположим, что по некоторому замкнутому контуру распространяется луч света. Вычислим с точностью до членов порядка v/c время t, которое проходит между отправлением луча света и возвращением его в исходную точку. Скорость света, по определению, всегда равна c, если время синхронизуется вдоль данной замкнутой линии и в каждой точке пользуемся собственным временем. Поскольку разница между собственным и мировым временем — порядка v^2/c^2, то при вычислении искомого промежутка времени t с точностью до величин порядка v/c этой разницей можно пренебречь. Поэтому имеем:

$$t = \frac{L}{c} \pm \frac{2\Omega}{c^2}S,$$

где L — длина контура. Соответственно этому скорость света, измеренная как отношение L/t, оказывается равной

$$c \pm 2\Omega \frac{S}{L}. \tag{89,4}$$

Эту формулу, как и формулу для первого приближения эффекта Допплера, можно легко вывести и чисто классическим путем.

Задача

Определить элемент пространственного расстояния во вращающейся системе координат.

Решение. С помощью (84,6—7) находим:

$$dl^2 = dr^2 + dz^2 + \frac{r^2 d\varphi^2}{1 - \Omega^2 \frac{r^2}{c^2}},$$

чем определяется пространственная геометрия во вращающейся системе отсчета. Отметим, что отношение длины окружности в плоскости $z = \text{const}$ (с центром на оси вращения) к ее радиусу r равно

$$\frac{2\pi}{\sqrt{1 - \frac{\Omega^2 r^2}{c^2}}} > 2\pi.$$

§ 90. Уравнения электродинамики при наличии гравитационного поля

Уравнения электромагнитного поля специальной теории относительности легко обобщить так, чтобы они были применимы в любой четырехмерной криволинейной системе координат, т. е. в случае наличия гравитационного поля.

Тензор электромагнитного поля в специальной теории относительности определялся как $F_{ik} = \frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k}$. Очевидно, что теперь он должен быть соответственно определен как $F_{ik} = A_{k;\,i} - A_{i;\,k}$. Но в силу (86,12)

$$F_{ik} = A_{k;\,i} - A_{i;\,k} = \frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k}, \tag{90,1}$$

так что связь F_{ik} с потенциалом A_i не меняется. Вследствие этого первая пара уравнений Максвелла (26,5)

$$\frac{\partial F_{ik}}{\partial x^l} + \frac{\partial F_{li}}{\partial x^k} + \frac{\partial F_{kl}}{\partial x^i} = 0 \tag{90,2}$$

тоже сохраняет свой вид [1]).

---

[1]) Легко видеть, что это уравнение может быть записано также и в виде

$$F_{ik;\,l} + F_{li;\,k} + F_{kl;\,i} = 0,$$

откуда очевидна его ковариантность.

Для того чтобы написать вторую пару уравнений Максвелла, надо предварительно определить в криволинейных координатах 4-вектор тока. Это мы сделаем аналогично тому, как мы поступали в § 28. Пространственный элемент объема, построенного на элементах пространственных координат dx^1, dx^2, dx^3, есть $\sqrt{\gamma}\,dV$, где γ — определитель пространственного метрического тензора (84,7), а $dV = dx^1\,dx^2\,dx^3$ (см. примечание на стр. 300). Введем плотность зарядов ρ согласно определению $de = \rho\sqrt{\gamma}\,dV$, где de — заряд, находящийся в элементе объема $\sqrt{\gamma}\,dV$. Умножив это равенство с обеих сторон на dx^i, имеем:

$$de\,dx^i = \rho dx^i\sqrt{\gamma}\,dx^1\,dx^2\,dx^3 = \frac{\rho}{\sqrt{g_{00}}}\sqrt{-g}\,d\Omega\frac{dx^i}{dx^0}$$

[мы использовали формулу $-g = \gamma g_{00}$ (84,10)]. Произведение $\sqrt{-g}\,d\Omega$ есть инвариантный элемент 4-объема, так что 4-вектор тока определяется выражением

$$j^i = \frac{\rho c}{\sqrt{g_{00}}}\frac{dx^i}{dx^0} \tag{90,3}$$

(величины dx^i/dx^0 — скорость изменения координат со «временем», x^0 — сами не составляют 4-вектора!). Компонента j^0 4-вектора тока, умноженная на $\sqrt{g_{00}}/c$, есть пространственная плотность зарядов.

Для точечных зарядов плотность ρ выражается суммой δ-функций аналогично формуле (28,1). При этом, однако, надо уточнить определение этих функций в случае криволинейных координат. Мы будем понимать $\delta(\mathbf{r})$ по-прежнему как произведение $\delta(x^1)\,\delta(x^2)\,\delta(x^3)$ вне зависимости от геометрического смысла координат x^1, x^2, x^3; тогда равен единице интеграл по dV (а не по $\sqrt{\gamma}\,dV$): $\int\delta(\mathbf{r})\,dV = 1$. С таким определением δ-функций плотность зарядов

$$\rho = \sum_a \frac{e_a}{\sqrt{\gamma}}\,\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_a),$$

а 4-вектор тока

$$j^i = \sum_a \frac{e_a c}{\sqrt{-g}}\,\delta\,(\mathbf{r}-\mathbf{r}_a)\,\frac{dx^i}{dx^0}. \tag{90,4}$$

Сохранение заряда выражается уравнением непрерывности, которое отличается от (29,4) лишь заменой обычных производных ковариантными:

$$j^i{}_{;\,i} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{-g}\,j^i\right) = 0 \tag{90,5}$$

[использована формула (86,9)].

Аналогичным образом обобщается вторая пара уравнений Максвелла (30,2); заменяя в них обычные производные ковариантными, находим:

$$F^{ik}{}_{;k} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^k} (\sqrt{-g} F^{ik}) = -\frac{4\pi}{c} j^i \qquad (90,6)$$

[использована формула (86,10)].

Наконец, уравнения движения заряженной частицы в гравитационном и электромагнитном полях получаются заменой в (23,4) 4-ускорения du^i/ds на Du^i/ds:

$$mc \frac{Du^i}{ds} = mc \left(\frac{du^i}{ds} + \Gamma^i_{kl} u^k u^l \right) = \frac{e}{c} F^{ik} u_k. \qquad (90,7)$$

Задача

Написать уравнения Максвелла в заданном гравитационном поле в трехмерной форме (в трехмерном пространстве с метрикой $\gamma_{\alpha\beta}$), введя 3-векторы **E**, **D** и антисимметричные 3-тензоры $B_{\alpha\beta}$ и $H_{\alpha\beta}$ согласно определениям:

$$E_\alpha = F_{0\alpha}, \qquad B_{\alpha\beta} = F_{\alpha\beta},$$
$$D^\alpha = -\sqrt{g_{00}}\, F^{0\alpha}, \qquad H^{\alpha\beta} = \sqrt{g_{00}}\, F^{\alpha\beta}. \qquad (1)$$

Решение. Введенные указанным образом величины не независимы. Раскрывая равенства

$$F_{0\alpha} = g_{0l} g_{\alpha m} F^{lm}, \quad F^{\alpha\beta} = g^{\alpha l} g^{\beta m} F_{lm},$$

введя при этом трехмерный метрический тензор $\gamma_{\alpha\beta} = -g_{\alpha\beta} + h g_\alpha g_\beta$ [g и h — из (88,11)] и воспользовавшись формулами (84,9) и (84,12), получим:

$$D_\alpha = \frac{E_\alpha}{\sqrt{h}} + g^\beta H_{\alpha\beta}, \quad B^{\alpha\beta} = \frac{H^{\alpha\beta}}{\sqrt{h}} + g^\beta E^\alpha - g^\alpha E^\beta. \qquad (2)$$

Введем векторы **B**, **H**, дуальные тензорам $B_{\alpha\beta}$ и $H_{\alpha\beta}$, согласно определению:

$$B^\alpha = -\frac{1}{2\sqrt{\gamma}} e^{\alpha\beta\gamma} B_{\beta\gamma}, \quad H_\alpha = -\frac{1}{2} \sqrt{\gamma}\, e_{\alpha\beta\gamma} H^{\beta\gamma} \qquad (3)$$

(ср. примечание на стр. 325; знак минус введен для того, чтобы в галилеевых координатах векторы **H** и **B** совпадали с обычной напряженностью магнитного поля). Тогда (2) можно записать в виде:

$$\mathbf{D} = \frac{\mathbf{E}}{\sqrt{h}} + [\mathbf{Hg}], \qquad \mathbf{B} = \frac{\mathbf{H}}{\sqrt{h}} + [\mathbf{gE}]. \qquad (4)$$

Вводя определения (1) в (90,2), получим уравнения:

$$\frac{\partial B_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma} + \frac{\partial B_{\gamma\alpha}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial B_{\beta\gamma}}{\partial x^\alpha} = 0,$$
$$\frac{\partial B_{\alpha\beta}}{\partial x^0} + \frac{\partial E_\alpha}{\partial x^\beta} - \frac{\partial E_\beta}{\partial x^\alpha} = 0$$

или, перейдя к дуальным величинам (3):

$$\operatorname{div}\mathbf{B}=0,\quad \operatorname{rot}\mathbf{E}=-\frac{1}{c\sqrt{\gamma}}\frac{\partial}{\partial t}(\sqrt{\gamma}\,\mathbf{B}) \tag{5}$$

($x^0=ct$; определение операций rot и div — в примечании на стр. 325). Аналогичным образом из (90,6) находим уравнения

$$\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\frac{\partial}{\partial x^\alpha}(\sqrt{\gamma}\,D^\alpha)=4\pi\rho,$$

$$\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\frac{\partial}{\partial x^\beta}(\sqrt{\gamma}\,H^{\alpha\beta})+\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\frac{\partial}{\partial x^0}(\sqrt{\gamma}\,D^\alpha)=-4\pi\rho\frac{dx^\alpha}{dx^0},$$

или в трехмерных векторных обозначениях:

$$\operatorname{div}\mathbf{D}=4\pi\rho,\qquad \operatorname{rot}\mathbf{H}=\frac{1}{c\sqrt{\gamma}}\frac{\partial}{\partial t}(\sqrt{\gamma}\,\mathbf{D})+\frac{4\pi}{c}\mathbf{s}, \tag{6}$$

где $\mathbf{s}$ — вектор с компонентами $s^\alpha=\rho\,dx^\alpha/dt$.

Выпишем для полноты также и уравнение непрерывности (90,5) в трехмерной форме:

$$\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\frac{\partial}{\partial t}(\sqrt{\gamma}\,\rho)+\operatorname{div}\mathbf{s}=0. \tag{7}$$

Обратим внимание на аналогию (конечно, чисто формальную) уравнений (5), (6) с уравнениями Максвелла для электромагнитного поля в материальных средах. В частности, в статическом гравитационном поле в членах с производными по времени выпадает $\sqrt{\gamma}$, а связь (4) сводится к $\mathbf{D}=\mathbf{E}/\sqrt{h}$, $\mathbf{B}=\mathbf{H}\sqrt{h}$. Можно сказать, что в отношении своего воздействия на электромагнитное поле статическое гравитационное поле играет роль среды с электрической и магнитной проницаемостями $\varepsilon=\mu=1/\sqrt{h}$.

ГЛАВА XI

УРАВНЕНИЯ ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ

§ 91. Тензор кривизны

Вернемся снова к понятию о параллельном переносе вектора. Как было указано в § 85, в общем случае кривого 4-пространства бесконечно малый параллельный перенос вектора определяется как перенос, при котором компоненты вектора не меняются в системе координат, галилеевой в данном бесконечно малом элементе объема.

Если $x^i = x^i(s)$ есть параметрическое уравнение некоторой кривой (s — длина дуги, отсчитываемая от некоторой точки), то вектор $u^i = dx^i/ds$ есть единичный вектор, касательный к кривой. Если рассматриваемая кривая является геодезической, то вдоль нее $Du^i = 0$. Это значит, что если вектор u^i подвергнуть параллельному переносу из точки x^i на геодезической линии в точку $x^i + dx^i$ на той же линии, то он совпадет с вектором $u^i + du^i$, касательным к линии в точке $x^i + dx^i$. Таким образом, при передвижении вдоль геодезической линии вектор касательной переносится параллельно самому себе.

С другой стороны, при параллельном переносе двух векторов «угол» между ними остается, очевидно, неизменным. Поэтому мы можем сказать, что при параллельном переносе любого вектора вдоль какой-либо геодезической линии угол между этим вектором и касательной к линии остается неизменным. Другими словами, при параллельном переносе вектора его составляющие по геодезическим линиям во всех точках пути должны быть неизменными.

Весьма существенно, что в кривом пространстве параллельный перенос вектора из одной заданной точки в другую дает разные результаты, если он совершается по разным путям. В частности, отсюда следует, что если переносить вектор параллельно самому себе по некоторому замкнутому контуру, то он, возвратившись в первоначальную точку, не совпадет с самим собой.

Для того чтобы уяснить это, рассмотрим двухмерное искривленное пространство, т. е. какую-нибудь кривую поверхность. На рис. 19

изображен кусок такой поверхности, ограниченный тремя геодезическими линиями. Подвергнем вектор **1** параллельному переносу вдоль коитура, образованного этими линиями. При передвижении вдоль линии AB вектор **1**, сохраняя все время одинаковый угол с этой линией, перейдет в вектор **2**. При передвижении вдоль BC он таким же образом перейдет в **3**. Наконец, при движении из C в A вдоль кривой CA, сохраняя постоянный угол с этой кривой, рассматриваемый вектор перейдет в **1'**, не совпадающий с вектором **1**.

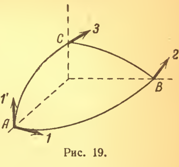


Рис. 19.

Выведем общую формулу, определяющую изменение вектора при параллельном переносе вдоль бесконечно малого замкнутого контура. Это изменение ΔA_k можно записать в виде $\oint \delta A_k$, где интеграл берется по данному контуру. Подставляя вместо δA_k выражение (85,5), имеем:

$$\Delta A_k = \oint \Gamma^i_{kl} A_i dx^l; \tag{91,1}$$

стоящий под интегралом вектор A_i меняется по мере его переноса вдоль контура.

Для дальнейшего преобразования этого интеграла необходимо заметить следующее. Значения вектора A_i в точках внутри контура неоднозначны — они зависят от пути, по которому мы приходим в данную точку. Мы увидим, однако, из получаемого ниже результата, что эта неоднозначность — второго порядка малости. Поэтому с достаточной для преобразования точностью до величин первого порядка можно считать компоненты вектора A_i в точках внутри бесконечно малого контура однозначно определяющимися их значениями на самом контуре по формулам $\delta A_i = \Gamma^n_{il} A_n dx^l$, т. е. по производным

$$\frac{\partial A_i}{\partial x^l} = \Gamma^n_{il} A_n. \tag{91,2}$$

Применяя теперь к интегралу (91,1) теорему Стокса (6,19) и учитывая, что площадь огибаемой рассматриваемым контуром поверхности есть бесконечно малая величина Δf^{lm}, получим:

$$\Delta A_k = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial(\Gamma^i_{km}A_i)}{\partial x^l} - \frac{\partial(\Gamma^i_{kl}A_i)}{\partial x^m}\right]\Delta f^{lm} =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\partial \Gamma^i_{km}}{\partial x^l} A_i - \frac{\partial \Gamma^i_{kl}}{\partial x^m} A_i + \Gamma^i_{km}\frac{\partial A_i}{\partial x^l} - \Gamma^i_{kl}\frac{\partial A_i}{\partial x^m}\right]\Delta f^{lm}.$$

Подставляя сюда значения производных из (91,2), находим окончательно:

$$\Delta A_k = \frac{1}{2} R^i_{klm} A_i \Delta f^{lm}, \tag{91,3}$$

где R^i_{klm} — тензор 4-го ранга:

$$R^i_{klm} = \frac{\partial \Gamma^i_{km}}{\partial x^l} - \frac{\partial \Gamma^i_{kl}}{\partial x^m} + \Gamma^i_{nl}\Gamma^n_{km} - \Gamma^i_{nm}\Gamma^n_{kl}. \tag{91,4}$$

Тензорный характер R^i_{klm} виден из того, что в (91,3) слева стоит вектор — разность ΔA_k значений вектора в одной и той же точке. Тензор R^i_{klm} называется *тензором кривизны* или *тензором Римана.*

Легко получить аналогичную формулу для контравариантного вектора A^k. Для этого заметим, что поскольку при параллельном переносе скаляры не меняются, то $\Delta(A^k B_k) = 0$, где B_k — любой ковариантный вектор. С помощью (91,3) имеем отсюда:

$$\Delta (A^k B_k) = A^k \Delta B_k + B_k \Delta A^k = \frac{1}{2} A^k B_i R^i_{klm} \Delta f^{lm} + B_k \Delta A^k =$$
$$= B_k \left(\Delta A^k + \frac{1}{2} A^i R^k_{ilm} \Delta f^{lm} \right) = 0,$$

или, ввиду произвольности вектора B_k:

$$\Delta A^k = -\frac{1}{2} R^k_{ilm} A^i \Delta f^{lm}. \tag{91,5}$$

Если дважды ковариантно продифференцировать вектор A_i по x^k и по x^l, то результат зависит, вообще говоря, от порядка дифференцирования, в противоположность тому, что имеет место для обычных производных. Оказывается, что разность $A_{i;k;l} - A_{i;l;k}$ определяется тем же тензором кривизны, который мы ввели выше. Именно, имеет место формула

$$A_{i;k;l} - A_{i;l;k} = A_m R^m_{ikl}, \tag{91,6}$$

которую легко проверить непосредственным вычислением в локально-геодезической системе координат. Аналогично, для контравариантного вектора [1])

$$A^i{}_{;k;l} - A^i{}_{;l;k} = -A^m R^i_{mkl}. \tag{91,7}$$

Наконец, легко получить аналогичные формулы для вторых производных от тензоров [это проще всего сделать, рассматривая, например, тензор вида $A_i B_k$ и пользуясь при этом формулами (91,6—7); полученные таким образом формулы в силу их линейности имеют

[1]) Формулу (91,7) можно получить также и непосредственно из (91,6) путем поднятия индекса i и использования свойств симметрии тензора R_{iklm} (§ 92).

место для любого тензора A_{ik}]. Так,

$$A_{ik;l;m}-A_{ik;m;l}=A_{in}R^{n}_{klm}+A_{nk}R^{n}_{ilm}. \qquad (91,8)$$

Очевидно, что в плоском 4-пространстве тензор кривизны равен нулю. Действительно, в плоском пространстве можно выбрать координаты, в которых везде все $\Gamma^{l}_{kl}=0$, а потому и $R^{l}_{klm}=0$. В силу тензорного характера R^{l}_{klm} эти величины равны тогда нулю и в любой другой системе координат. Это соответствует тому, что в плоском пространстве параллельный перенос вектора из одной точки в другую есть однозначная операция, а при обходе замкнутого контура вектор не меняется.

Имеет место и обратная теорема: если $R^{l}_{klm}=0$, то 4-пространство плоское. Действительно, во всяком пространстве можно выбрать систему координат, галилееву в данном бесконечно малом участке. При $R^{i}_{klm}=0$ параллельный перенос есть однозначная операция, и перенося таким образом галилееву систему из данного малого участка во все остальные, можно построить галилееву систему во всем пространстве, чем и доказывается сделанное утверждение.

Таким образом, равенство или неравенство нулю тензора кривизны является критерием, позволяющим определить, является ли 4-пространство плоским или искривленным.

Заметим, что хотя в кривом пространстве и можно выбрать локально-геодезическую (для данной точки) систему координат, но при этом тензор кривизны в этой точке не обращается в нуль (так как производные от Γ^{l}_{kl} не обращаются в нуль вместе с самими Γ^{i}_{kl}).

§ 92. Свойства тензора кривизны

Из выражения (91,4) следует, что тензор кривизны антисимметричен по индексам l, m:

$$R^{l}_{klm}=-R^{l}_{kml}. \qquad (92,1)$$

Легко также проверить, что справедливо тождество

$$R^{l}_{klm}+R^{i}_{mkl}+R^{l}_{lmk}=0. \qquad (92,2)$$

Наряду со смешанным тензором R^{i}_{klm} пользуются также ковариантным тензором[1])

$$R_{iklm}=g_{in}R^{n}_{klm}. \qquad (92,3)$$

[1]) В этой связи более правильным было бы обозначение смешанного тензора как $R^{i}{}_{klm}$, где явно указано место поднимаемого индекса.

Простыми преобразованиями легко получить для него следующее выражение:

$$R_{iklm}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{im}}{\partial x^k\,\partial x^l}+\frac{\partial^2 g_{kl}}{\partial x^i\,\partial x^m}-\frac{\partial^2 g_{il}}{\partial x^k\,\partial x^m}-\frac{\partial^2 g_{km}}{\partial x^i\,\partial x^l}\right)+$$
$$+g_{np}\left(\Gamma^n_{kl}\Gamma^p_{im}-\Gamma^n_{km}\Gamma^p_{il}\right) \quad (92,4)$$

[для фактического вычисления последний член обычно удобнее представить в виде $g^{np}(\Gamma_{n,\,kl}\Gamma_{p,\,im}-\Gamma_{n,\,km}\Gamma_{p,\,il})$].

Из этого выражения очевидны следующие свойства симметрии:

$$R_{iklm}=-R_{kilm}=-R_{ikml}, \quad (92,5)$$
$$R_{iklm}=R_{lmik}, \quad (92,6)$$

т. е. тензор антисимметричен по каждой из пар индексов ik и lm и симметричен по отношению к перестановке этих двух пар друг с другом. Отсюда следует, в частности, что все компоненты R_{iklm}, у которых $i=k$ или $l=m$, равны нулю.

Для R_{iklm}, как и для $R^i{}_{klm}$, имеет место тождество (92,2)

$$R_{iklm}+R_{imkl}+R_{ilmk}=0. \quad (92,7)$$

Более того, в силу соотношений (92,5—6) отсюда следует, что равна нулю циклическая сумма по любым трем индексам в R_{iklm}.

Наконец, докажем следующее *тождество Бианки:*

$$R^n_{ikl;\,m}+R^n_{imk;\,l}+R^n_{ilm;\,k}=0. \quad (92,8)$$

Его удобно проверить, воспользовавшись локально-геодезической системой координат. В силу тензорного характера соотношение (92,8) будет тем самым справедливым и в любой другой системе. Дифференцируя выражение (91,4) и полагая затем в нем $\Gamma^i_{kl}=0$, находим в рассматриваемой точке:

$$R^n_{ikl;\,m}=\frac{\partial R^n_{ikl}}{\partial x^m}=\frac{\partial^2\Gamma^n_{il}}{\partial x^m\,\partial x^k}-\frac{\partial^2\Gamma^n_{ik}}{\partial x^m\,\partial x^l}.$$

С помощью этого выражения легко убедиться в том, что (92,8) действительно имеет место.

Из тензора кривизны можно путем упрощения построить тензор второго ранга. Такое упрощение можно произвести только одним способом: упрощение тензора R_{iklm} по индексам i и k или l и m дает нуль в силу антисимметричности по ним, а упрощение по любым другим парам дает, с точностью до знака, одинаковый результат. Мы определим тензор R_{ik} (его называют *тензором Риччи*) как[1])

$$R_{ik}=g^{lm}R_{limk}=R^l_{ilk}. \quad (92,9)$$

[1]) В литературе используется также и другое определение тензора R_{ik}—с упрощением R_{iklm} по первому и последнему индексам. Такое определение отличается знаком от принятого нами определения.

Согласно (91,4) имеем:

$$R_{ik}=\frac{\partial\Gamma^l_{ik}}{\partial x^l}-\frac{\partial\Gamma^l_{il}}{\partial x^k}+\Gamma^l_{ik}\Gamma^m_{lm}-\Gamma^m_{il}\Gamma^l_{km}. \qquad (92,10)$$

Этот тензор, очевидно, симметричен:

$$R_{ik}=R_{ki}. \qquad (92,11)$$

Наконец, упрощая R_{ik}, получим инвариант

$$R=g^{ik}R_{ik}=g^{il}g^{km}R_{iklm}, \qquad (92,12)$$

называемый *скалярной кривизной* пространства.

Компоненты тензора R_{ik} удовлетворяют дифференциальному тождеству, получающемуся упрощением тождества Бианки (92,8) по парам индексов ik и ln:

$$R^l_{m;\,l}=\frac{1}{2}\frac{\partial R}{\partial x^m}. \qquad (92,13)$$

В силу соотношений (92,5—7) не все компоненты тензора кривизны независимы. Определим число независимых компонент.

Определение тензора кривизны, даваемое написанными выше формулами, относится к пространству любого числа измерений. Рассмотрим сначала случай пространства двух измерений, т. е. обычную поверхность; обозначим в этом случае (в отличие от четырехмерных величин) тензор кривизны через P_{abcd}, а метрический тензор — через γ_{ab}, где индексы a, b, ... пробегают значения 1, 2. Поскольку в каждой из пар ab и cd два индекса должны иметь различные значения, то очевидно, что все отличные от нуля компоненты тензора кривизны либо совпадают друг с другом, либо отличаются знаком. Таким образом, в этом случае имеется лишь одна независимая компонента, например P_{1212}. Легко найти, что скалярная кривизна при этом равна

$$P=\frac{2P_{1212}}{\gamma}, \qquad \gamma\equiv|\gamma_{ab}|=\gamma_{11}\gamma_{22}-(\gamma_{12})^2. \qquad (92,14)$$

Величина $P/2$ совпадает с так называемой гауссовой кривизной поверхности K:

$$\frac{P}{2}=K=\frac{1}{\rho_1\rho_2}, \qquad (92,15)$$

где ρ_1, ρ_2 — главные радиусы кривизны поверхности в данной ее точке (напомним, что ρ_1 и ρ_2 считаются имеющими одинаковые знаки, если соответствующие им центры кривизны расположены по одну сторону от поверхности, и имеющими разные знаки, если центры

кривизны лежат по разные стороны от поверхности; в первом случае $K > 0$, а во втором $K < 0$) [1]).

Перейдем к тензору кривизны трехмерного пространства; обозначим его через $P_{\alpha\beta\gamma\delta}$, а метрический тензор через $\gamma_{\alpha\beta}$, где индексы α, β, ... пробегают значения 1, 2, 3. Пары индексов $\alpha\beta$ и $\gamma\delta$ пробегают всего три существенно различных набора значений: 23, 31, 12 (перестановка индексов в паре меняет лишь знак компоненты тензора). Поскольку тензор $P_{\alpha\beta\gamma\delta}$ симметричен по отношению к перестановке этих пар, то имеется всего $3\cdot 2/2 = 3$ независимых компоненты с различными парами индексов, а также 3 компоненты с одинаковыми парами. Тождество (92,7) не прибавляет ничего нового к этим ограничениям. Таким образом, в трехмерном пространстве тензор кривизны имеет шесть независимых компонент. Столько же компонент имеет симметричный тензор $P_{\alpha\beta}$. Поэтому из линейных соотношений $P_{\alpha\beta} = g^{\gamma\delta}P_{\gamma\alpha\delta\beta}$ все компоненты тензора $P_{\alpha\beta\gamma\delta}$ могут быть выражены через $P_{\alpha\beta}$ и метрический тензор $\gamma_{\alpha\beta}$ (см. задачу 1). Если выбрать систему координат, декартову в данной точке, то надлежащим ее поворотом можно привести тензор $P_{\alpha\beta}$ к главным осям [2]). Таким образом, кривизна трехмерного пространства в каждой точке определяется тремя величинами [3]).

Наконец, перейдем к четырехмерному пространству. Пары индексов ik и lm пробегают в этом случае 6 различных наборов значений: 01, 02, 03, 23, 31, 12. Поэтому имеется 6 компонент R_{iklm} с одинаковыми и $6\cdot 5/2 = 15$ компонент с различными парами индексов. Последние, однако, еще не все независимы друг от друга:

---

[1]) Формулу (92,15) легко получить, написав уравнение поверхности вблизи заданной точки ($x = y = 0$) в виде $z = \frac{x^2}{2\rho_1} + \frac{y^2}{2\rho_2}$. Тогда квадрат элемента длины на ней:

$$dl^2 = \left(1 + \frac{x^2}{\rho_1^2}\right)dx^2 + \left(1 + \frac{y^2}{\rho_2^2}\right)dy^2 + 2\frac{xy}{\rho_1\rho_2}\,dx\,dy.$$

Вычисление P_{1212} в точке $x = y = 0$ по формуле (92,4) (в которой нужны лишь члены со вторыми производными от $\gamma_{\alpha\beta}$) приводит к (92,15).

[2]) Для фактического вычисления главных значений тензора $P_{\alpha\beta}$ нет необходимости производить преобразование к системе координат, декартовой в данной точке. Эти значения можно определить как корни λ уравнения $|P_{\alpha\beta} - \lambda\gamma_{\alpha\beta}| = 0$.

[3]) Знание тензора $P_{\alpha\beta\gamma\delta}$ позволяет определить гауссову кривизну K любой поверхности в пространстве. Укажем здесь лишь, что если x^1, x^2, x^3 — ортогональная система координат, то

$$K = \frac{P_{1212}}{\gamma_{11}\gamma_{22} - (\gamma_{12})^2}$$

есть гауссова кривизна для «плоскости», перпендикулярной (в данной ее точке) к оси x^3; под «плоскостью» понимается поверхность, образованная геодезическими линиями.

три компоненты, у которых все четыре индекса различны, связаны в силу (92,7) одним тождеством:

$$R_{0123}+R_{0312}+R_{0231}=0. \qquad (92,16)$$

Таким образом, в 4-пространстве тензор кривизны имеет всего 20 независимых компонент.

Выбирая систему координат, галилееву в данной точке, и рассматривая преобразования, поворачивающие эту систему (так что значения g_{ik} в данной точке не меняются), можно добиться обращения в нуль шести компонент тензора кривизны (шесть есть число независимых поворотов 4-системы координат). Таким образом, в общем случае кривизна 4-пространства определяется в каждой точке 14 величинами.

Если $R_{ik}=0$ [1]), то в произвольной системе координат тензор кривизны имеет всего 10 независимых компонент. Надлежащим преобразованием координат можно тогда привести тензор R_{iklm} (в заданной точке 4-пространства) к «каноническому» виду, в котором его компоненты выражаются в общем случае через 4 независимые величины; в особых случаях это число может оказаться даже меньшим (классификация возможных канонических типов тензора R_{iklm} найдена *А. З. Петровым* (1950); см. задачу 3).

Если же $R_{ik}\neq 0$, то та же классификация будет относиться к тензору кривизны после выделения из него определенной части, выражающейся через компоненты R_{ik}. Именно, построим тензор [2])

$$C_{iklm}=R_{iklm}-\frac{1}{2}R_{il}g_{km}+\frac{1}{2}R_{im}g_{kl}+\frac{1}{2}R_{kl}g_{im}-\frac{1}{2}R_{km}g_{il}+\frac{1}{6}R(g_{il}g_{km}-g_{im}g_{kl}). \qquad (92,17)$$

Легко видеть, что этот тензор обладает всеми свойствами симметрии тензора R_{iklm}, а при свертывании по паре индексов (*il* или *km*) дает нуль.

[1]) Мы увидим ниже (§ 95), что этим свойством обладает тензор кривизны для гравитационного поля в пустоте.

[2]) Это громоздкое выражение можно записать более компактно в виде:

$$C_{iklm}=R_{iklm}-R_{l[i}g_{k]m}+R_{m[i}g_{k]l}+\frac{1}{3}Rg_{l[i}g_{k]m},$$

где квадратные скобки означают антисимметризацию по заключенным в них индексам:

$$A_{[ik]}=\frac{1}{2}(A_{ik}-A_{ki}).$$

Задачи

1. Выразить тензор кривизны $P_{\alpha\beta\gamma\delta}$ трехмерного пространства через тензор 2-го ранга $P_{\alpha\beta}$.

Решение. Ищем $P_{\alpha\beta\gamma\delta}$ в виде

$$P_{\alpha\beta\gamma\delta}=A_{\alpha\gamma}\gamma_{\beta\delta}-A_{\alpha\delta}\gamma_{\beta\gamma}+A_{\beta\delta}\gamma_{\alpha\gamma}-A_{\beta\gamma}\gamma_{\alpha\delta},$$

удовлетворяющем условиям симметрии; здесь $A_{\alpha\beta}$ — некоторый симметричный тензор, связь которого с $P_{\alpha\beta}$ определяется путем упрощения написанного выражения по индексам α и γ. Таким путем находим;

$$P_{\alpha\beta}=A\gamma_{\alpha\beta}+A_{\alpha\beta}, \qquad A_{\alpha\beta}=P_{\alpha\beta}-\frac{1}{4}P\gamma_{\alpha\beta},$$

и окончательно

$$P_{\alpha\beta\gamma\delta}=P_{\alpha\gamma}\gamma_{\beta\delta}-P_{\alpha\delta}\gamma_{\beta\gamma}+P_{\beta\delta}\gamma_{\alpha\gamma}-P_{\beta\gamma}\gamma_{\alpha\delta}+\frac{P}{2}(\gamma_{\alpha\delta}\gamma_{\beta\gamma}-\gamma_{\alpha\gamma}\gamma_{\beta\delta}).$$

2. Вычислить компоненты тензоров R_{iklm} и R_{ik} для метрики, в которой тензор g_{ik} диагонален (*Б. Гаррисон*, 1960).

Решение. Представим отличные от нуля компоненты метрического тензора в виде

$$g_{ii}=e_i e^{2F_i}, \qquad e_0=1, \qquad e_\alpha=-1.$$

Вычисление по формуле (92,4) приводит к следующим выражениям для отличных от нуля компонент тензора кривизны:

$$R_{ilik}=e_l e^{2F_l}(F_{l,k}F_{k,i}+F_{i,k}F_{l,i}-F_{l,i}F_{l,k}-F_{l,i,k}), \qquad i\neq k\neq l,$$

$$R_{ilil}=e_l e^{2F_l}(F_{i,i}F_{l,i}-F_{l,i}^2-F_{l,i,i})+e_i e^{2F_i}(F_{l,l}F_{i,l}-F_{i,l}^2-F_{i,l,l})-$$
$$-e_l e^{2F_l}\sum_{m\neq i,l}e_i e_m e^{2(F_i-F_m)}F_{i,m}F_{l,m}, \qquad i\neq l$$

(по повторяющимся индексам нет суммирования!). Индексы после запятой означают простое дифференцирование по соответствующей координате.

Упрощая тензор по двум индексам, получим:

$$R_{ik}=\sum_{l\neq i,k}(F_{l,k}F_{k,i}+F_{i,k}F_{l,i}-F_{l,i}F_{l,k}-F_{l,i,k}), \qquad i\neq k,$$

$$R_{ii}=\sum_{l\neq i}\Big[F_{i,i}F_{l,i}-F_{l,i}^2-F_{l,i,i}+$$
$$+e_i e_l e^{2(F_i-F_l)}\Big(F_{l,l}F_{i,l}-F_{i,l}^2-F_{i,l,l}-F_{i,l}\sum_{m\neq i,l}F_{m,l}\Big)\Big].$$

3. Рассмотреть возможные типы канонической формы тензора кривизны при $R_{ik}=0$.

Решение. Будем считать, что метрика в данной точке 4-пространства приведена к галилеевому виду. Совокупность 20 независимых компонент тензора R_{iklm} представим как совокупность трех трехмерных тензоров, определенных следующим образом:

$$A_{\alpha\beta}=R_{0\alpha0\beta}, \qquad C_{\alpha\beta}=\frac{1}{4}e_{\alpha\gamma\delta}e_{\beta\lambda\mu}R_{\gamma\delta\lambda\mu}, \qquad B_{\alpha\beta}=\frac{1}{2}e_{\alpha\gamma\delta}R_{0\beta\gamma\delta} \qquad (1)$$

($e_{\alpha\beta\gamma}$ — единичный антисимметричный тензор; поскольку трехмерная метрика декартова, нет необходимости делать при суммировании различие между верхними и нижними индексами). Тензоры $A_{\alpha\beta}$ и $C_{\alpha\beta}$ по определению симметричны; тензор $B_{\alpha\beta}$ асимметричен, а его след равен нулю в силу (92,16). Согласно определениям (1) имеем, например,

$$B_{11}=R_{0123}, \qquad B_{12}=R_{0131}, \qquad B_{13}=R_{0112}, \qquad C_{11}=R_{2323}, \ \ldots$$

Легко видеть, что условия $R_{km}=g^{il}R_{iklm}=0$ эквивалентны следующим соотношениям между компонентами тензоров (1):

$$A_{\alpha\alpha}=0, \qquad B_{\alpha\beta}=B_{\beta\alpha}, \qquad A_{\alpha\beta}=-C_{\alpha\beta}. \tag{2}$$

Далее, введем симметричный комплексный тензор

$$D_{\alpha\beta}=\frac{1}{2}\left(A_{\alpha\beta}+2iB_{\alpha\beta}-C_{\alpha\beta}\right)=A_{\alpha\beta}+iB_{\alpha\beta}. \tag{3}$$

Такое объединение двух вещественных трехмерных тензоров $A_{\alpha\beta}$ и $B_{\alpha\beta}$ в один комплексный тензор как раз соответствует объединению (в § 25) двух векторов **E** и **H** в комплексный вектор **F**, а возникающая в результате связь между $D_{\alpha\beta}$ и 4-тензором R_{iklm} соответствует связи между **F** и 4-тензором F_{ik}. Отсюда следует, что четырехмерные преобразования тензора R_{iklm} эквивалентны трехмерным комплексным поворотам, производимым над тензором $D_{\alpha\beta}$.

По отношению к этим поворотам могут быть определены собственные значения $\lambda=\lambda'+i\lambda''$ и собственные векторы n_α (вообще говоря, комплексные) как решения системы уравнений

$$D_{\alpha\beta}n_\beta=\lambda n_\alpha. \tag{4}$$

Величины λ являются инвариантами тензора кривизны. Поскольку след $D_{\alpha\alpha}=0$, то равна нулю также и сумма корней уравнения (4)

$$\lambda^{(1)}+\lambda^{(2)}+\lambda^{(3)}=0.$$

В зависимости от числа независимых собственных векторов n_α мы приходим к следующей классификации возможных случаев приведения тензора кривизны к *каноническим типам Петрова* I—III.

I) Имеются три независимых собственных вектора. При этом их квадраты $n_\alpha n^\alpha$ отличны от нуля и соответствующим поворотом тензор $D_{\alpha\beta}$, а с ним и $A_{\alpha\beta}$, $B_{\alpha\beta}$ приводятся к диагональному виду

$$A_{\alpha\beta}=\begin{pmatrix}\lambda^{(1)\prime} & 0 & 0\\ 0 & \lambda^{(2)\prime} & 0\\ 0 & 0 & -\lambda^{(1)\prime}-\lambda^{(2)\prime}\end{pmatrix}, \quad B_{\alpha\beta}=\begin{pmatrix}\lambda^{(1)\prime\prime} & 0 & 0\\ 0 & \lambda^{(2)\prime\prime} & 0\\ 0 & 0 & -\lambda^{(1)\prime\prime}-\lambda^{(2)\prime\prime}\end{pmatrix}. \tag{I}$$

В этом случае тензор кривизны имеет 4 независимых инварианта [1]).

Комплексные инварианты $\lambda^{(1)}$, $\lambda^{(2)}$ выражаются алгебраически через комплексные скаляры

$$I_1=\frac{1}{48}\left(R_{iklm}R^{iklm}-iR_{iklm}\overset{*}{R}{}^{iklm}\right),$$

$$I_2=\frac{1}{96}\left(R_{iklm}R^{lmpr}R_{pr}{}^{ik}+iR_{iklm}R^{lmpr}\overset{*}{R}{}_{pr}{}^{ik}\right),$$

[1]) Вырожденный случай, когда $\lambda^{(1)\prime}=\lambda^{(2)\prime}$, $\lambda^{(1)\prime\prime}=\lambda^{(2)\prime\prime}$, называют в литературе типом D.

где звездочка над буквой означает дуальный тензор:

$$\overset{*}{R}_{iklm}=\frac{1}{2}E_{ikpr}R^{pr}{}_{lm}.$$

Вычислив I_1, I_2 с помощью (I), получим:

$$I_1=\frac{1}{3}(\lambda^{(1)2}+\lambda^{(2)2}+\lambda^{(1)}\lambda^{(2)}),\qquad I_2=\frac{1}{2}\lambda^{(1)}\lambda^{(2)}(\lambda^{(1)}+\lambda^{(2)}). \tag{5}$$

Эти формулы позволяют вычислить $\lambda^{(1)}$, $\lambda^{(2)}$, исходя из значений R_{iklm} в любой системе отсчета.

II) Имеются два независимых собственных вектора. Квадрат одного из них при этом равен нулю, в связи с чем он не может быть принят за направление координатной оси. Можно, однако, принять его лежащим в плоскости x^1, x^2; тогда $n_2=in_1$, $n_3=0$. Соответствующие уравнения (4) дают:

$$D_{11}+iD_{12}=\lambda,\quad D_{22}-iD_{12}=\lambda,$$

откуда

$$D_{11}=\lambda-i\mu,\quad D_{22}=\lambda+i\mu,\quad D_{12}=\mu.$$

Комплексная величина $\lambda=\lambda'+i\lambda''$ является скаляром и не может быть изменена. Величине же μ путем различных комплексных поворотов может быть придано любое (отличное от нуля) значение; можно поэтому без ограничения общности считать ее вещественной. В результате получим следующий канонический тип вещественных тензоров $A_{\alpha\beta}$, $B_{\alpha\beta}$:

$$A_{\alpha\beta}=\begin{pmatrix}\lambda' & \mu & 0\\ \mu & \lambda' & 0\\ 0 & 0 & -2\lambda'\end{pmatrix},\quad B_{\alpha\beta}=\begin{pmatrix}\lambda''-\mu & 0 & 0\\ 0 & \lambda''+\mu & 0\\ 0 & 0 & -2\lambda''\end{pmatrix}. \tag{II}$$

В этом случае имеется всего два инварианта λ' и λ''. При этом согласно (5): $I_1=\lambda^2$, $I_2=\lambda^3$, так что $I_1^3=I_2^2$.

III) Имеется всего один собственный вектор с равным нулю квадратом. Все собственные значения λ при этом одинаковы, а потому равны нулю. Решения уравнения (4) могут быть приведены к виду $D_{11}=D_{22}=D_{12}=0$, $D_{13}=\mu$, $D_{23}=i\mu$, так что

$$A_{\alpha\beta}=\begin{pmatrix}0 & 0 & \mu\\ 0 & 0 & 0\\ \mu & 0 & 0\end{pmatrix},\quad B_{\alpha\beta}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \mu\\ 0 & \mu & 0\end{pmatrix}. \tag{III}$$

В этом случае тензор кривизны вовсе не имеет инвариантов, и мы имеем дело со своеобразной ситуацией: 4-пространство искривлено, но не существует инвариантов, которые могли бы являться мерой его кривизны[1]).

§ 93. Действие для гравитационного поля

Для нахождения уравнений, определяющих гравитационное поле, необходимо предварительно определить действие S_g этого поля. Искомые уравнения получаются тогда путем варьирования суммы действий поля и материальных частиц.

[1]) Такая же ситуация имеет место в вырожденном случае (II) при $\lambda'=\lambda''=0$ (его называют типом N).

Действие S_g, как и действие для электромагнитного поля, должно быть выражено в виде некоторого скалярного интеграла $\int G\sqrt{-g}d\Omega$, взятого по всему пространству и по временной координате x^0 между двумя заданными ее значениями. При этом мы будем исходить из того, что уравнения гравитационного поля должны содержать производные от «потенциалов» поля не выше второго порядка (подобно тому, как это имеет место для уравнений электромагнитного поля). Поскольку уравнения поля получаются путем варьирования действия, то для этого необходимо, чтобы подынтегральное выражение G содержало производные от g_{ik} не выше первого порядка; таким образом, G должно содержать только тензор g_{ik} и величины Γ^i_{kl}.

Однако из одних только величин g_{ik} и Γ^i_{kl} невозможно построить скаляр. Это видно уже из того, что посредством соответствующего выбора системы координат можно всегда обратить все величины Γ^i_{kl} в данной точке в нуль. Существует, однако, скаляр R—кривизна 4-пространства,—который хотя и содержит наряду с тензором g_{ik} и его первыми производными еще и вторые производные от g_{ik}, но последние входят только линейно. Благодаря этой линейности инвариантный интеграл $\int R\sqrt{-g}d\Omega$ можно преобразовать с помощью теоремы Гаусса в интеграл от выражения, не содержащего вторых производных. Именно, можно представить его в виде

$$\int R\sqrt{-g}d\Omega = \int G\sqrt{-g}d\Omega + \int \frac{\partial(\sqrt{-g}\,w^i)}{\partial x^i}d\Omega,$$

где G содержит только тензор g_{ik} и его первые производные, а подынтегральное выражение во втором интеграле имеет вид дивергенции некоторой величины w^i (подробное вычисление произведено в конце настоящего параграфа). Согласно теореме Гаусса этот второй интеграл можно преобразовать в интеграл по гиперповерхности, охватывающей 4-объем, по которому производится интегрирование в двух других интегралах. При варьировании действия вариация второго члена справа, следовательно, исчезает, так как по смыслу принципа наименьшего действия на границах области интегрирования вариация поля равна нулю. Следовательно, мы можем написать:

$$\delta\int R\sqrt{-g}d\Omega = \delta\int G\sqrt{-g}d\Omega.$$

Слева стоит скаляр; поэтому скаляром является и стоящее справа выражение (сама же величина G скаляром, конечно, не является).

Величина G удовлетворяет поставленному выше требованию, так как содержит только g_{ik} и его производные. Таким образом, мы можем написать:

$$\delta S_g = -\frac{c^3}{16\pi k}\delta\int G\sqrt{-g}d\Omega = -\frac{c^3}{16\pi k}\delta\int R\sqrt{-g}d\Omega, \quad (93,1)$$

где k — новая универсальная постоянная. Аналогично тому, как это было сделано в § 27 для действия электромагнитного поля, можно видеть, что постоянная k должна быть положительна (см. конец этого параграфа).

Постоянная k называется *гравитационной постоянной*. Размерность k следует непосредственно из (93,1). Действие имеет размерность $г \cdot см^2 \cdot сек^{-1}$; все координаты можно считать имеющими размерность *см*, а g_{ik} — безразмерными, и, следовательно, R имеет размерность $см^{-2}$. В результате находим, что k имеет размерность $см^3 \cdot г^{-1} \cdot сек^{-2}$. Ее численное значение равно

$$k = 6{,}67 \cdot 10^{-8}\, см^3 \cdot г^{-1} \cdot сек^{-2}. \qquad (93,2)$$

Заметим, что мы могли бы положить k равной единице (или другому произвольному безразмерному числу). При этом, однако, определился бы выбор единицы для измерения массы [1]).

Вычислим, наконец, величину G в (93,1). Из выражения (92,10) для R_{ik} имеем:

$$\sqrt{-g}R = \sqrt{-g}g^{ik}R_{ik} = \\ = \sqrt{-g}\left\{g^{ik}\frac{\partial\Gamma^l_{ik}}{\partial x^l} - g^{ik}\frac{\partial\Gamma^l_{il}}{\partial x^k} + g^{ik}\Gamma^l_{ik}\Gamma^m_{lm} - g^{ik}\Gamma^m_{il}\Gamma^l_{km}\right\}.$$

В первых двух членах справа имеем:

$$\sqrt{-g}g^{ik}\frac{\partial\Gamma^l_{ik}}{\partial x^l} = \frac{\partial}{\partial x^l}(\sqrt{-g}g^{ik}\Gamma^l_{ik}) - \Gamma^l_{ik}\frac{\partial}{\partial x^l}(\sqrt{-g}g^{ik}),$$

$$\sqrt{-g}g^{ik}\frac{\partial\Gamma^l_{il}}{\partial x^k} = \frac{\partial}{\partial x^k}(\sqrt{-g}g^{ik}\Gamma^l_{il}) - \Gamma^l_{il}\frac{\partial}{\partial x^k}(\sqrt{-g}g^{ik}).$$

Опуская полные производные, находим:

$$\sqrt{-g}\,G = \Gamma^m_{im}\frac{\partial}{\partial x^k}(\sqrt{-g}g^{ik}) - \Gamma^l_{ik}\frac{\partial}{\partial x^l}(\sqrt{-g}g^{ik}) - \\ - (\Gamma^m_{il}\Gamma^l_{km} - \Gamma^l_{ik}\Gamma^m_{lm})g^{ik}\sqrt{-g}.$$

---

1) Если положить $k = c^2$, то масса будет измеряться в сантиметрах, причем $1\, см = 1{,}35 \cdot 10^{28}\, г$.

Иногда пользуются вместо k величиной

$$\varkappa = \frac{8\pi k}{c^2} = 1{,}86 \cdot 10^{-27}\, см \cdot г^{-1},$$

которую называют эйнштейновой гравитационной постоянной.

С помощью формул (86,5—8) находим, что первые два члена справа равны $\sqrt{-g}$, помноженному на

$$2\Gamma^l_{ik}\Gamma^i_{lm}g^{mk}-\Gamma^m_{lm}\Gamma^l_{kl}g^{kl}-\Gamma^l_{ik}\Gamma^m_{lm}g^{ik}=$$
$$=g^{ik}\left(2\Gamma^l_{mk}\Gamma^m_{li}-\Gamma^m_{lm}\Gamma^l_{ik}-\Gamma^l_{ik}\Gamma^m_{lm}\right)=2g^{ik}\left(\Gamma^m_{il}\Gamma^l_{km}-\Gamma^l_{ik}\Gamma^m_{lm}\right).$$

Окончательно имеем:

$$G=g^{ik}\left(\Gamma^m_{il}\Gamma^l_{km}-\Gamma^l_{ik}\Gamma^m_{lm}\right). \qquad (93,3)$$

Величинами, определяющими гравитационное поле, являются компоненты метрического тензора. Поэтому в принципе наименьшего действия для гравитационного поля варьированию подлежат именно величины g_{ik}. Здесь необходимо, однако, сделать следующую существенную оговорку. Именно, мы не можем теперь утверждать, что в реально осуществляющемся поле интеграл действия имеет минимум (а не просто экстремум) по отношению ко всем возможным вариациям g_{ik}. Это связано с тем, что не всякое изменение g_{ik} соответствует изменению метрики пространства-времени, т. е. реальному изменению гравитационного поля. Компоненты g_{ik} меняются уже и при простом преобразовании координат, связанном лишь с переходом от одной системы к другой в одном и том же пространстве-времени. Каждое такое преобразование координат представляет собой, вообще говоря, совокупность четырех (по числу координат) независимых преобразований. Для того чтобы исключить такие не связанные с изменением метрики изменения g_{ik}, можно наложить на них четыре дополнительных условия и потребовать выполнения этих условий при варьировании. Таким образом, в применении к гравитационному полю принцип наименьшего действия утверждает лишь, что можно наложить на g_{ik} такие дополнительные условия, при соблюдении которых действие имеет минимум по отношению к варьированию g_{ik} [1]).

Имея в виду эти замечания, покажем теперь, что гравитационная постоянная должна быть положительной. В качестве указанных четырех дополнительных условий потребуем обращения в нуль трех компонент $g_{0\alpha}$ и постоянства определителя $|g_{\alpha\beta}|$, составленного из компонент $g_{\alpha\beta}$:

$$g_{0\alpha}=0,\quad |g_{\alpha\beta}|=\text{const};$$

[1]) Подчеркнем, однако, что все сказанное не влияет на вывод уравнений поля из принципа наименьшего действия (§ 95). Эти уравнения получаются уже в результате требования экстремума действия (т. е. исчезновения его первой вариации), а не обязательно минимума. Поэтому при их выводе можно подвергать варьированию все компоненты g_{ik} независимо.

в силу последнего из этих условий будем иметь:

$$g^{\alpha\beta}\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^0}=\frac{\partial}{\partial x^0}\left|g_{\alpha\beta}\right|=0.$$

Нас интересуют здесь те члены в подынтегральном выражении в действии, которые содержат производные от g_{ik} по x^0 (ср. стр. 96). Простое вычисление с помощью (93,3) показывает, что такими членами в G являются

$$-\frac{1}{4}g^{00}g^{\alpha\beta}g^{\gamma\delta}\frac{\partial g_{\alpha\gamma}}{\partial x^0}\frac{\partial g_{\beta\delta}}{\partial x^0}.$$

Легко видеть, что эта величина существенно-отрицательна. Действительно, выбирая пространственную систему координат, которая была бы декартовой в данной точке пространства в данный момент времени (так что $g_{\alpha\beta}=g^{\alpha\beta}=\delta_{\alpha\beta}$), получим:

$$-\frac{1}{4}g^{00}\left(\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^0}\right)^2,$$

и поскольку $g^{00}=1/g_{00}>0$, то знак этой величины очевиден.

Достаточно быстрым изменением компонент $g_{\alpha\beta}$ со временем x^0 (в промежутке между двумя пределами интегрирования по dx^0) можно, следовательно, сделать величину $-G$ сколь угодно большой. Если бы постоянная k была отрицательной, то действие при этом неограниченно уменьшалось бы (принимая сколь угодно большие по абсолютной величине отрицательные значения), т. е. не могло бы иметь минимума.

§ 94. Тензор энергии-импульса

В § 32 было получено общее правило для вычисления тензора энергии-импульса любой физической системы, действие которой представлено в виде интеграла (32,1) по 4-пространству. В криволинейных координатах этот интеграл должен быть написан в виде

$$S=\frac{1}{c}\int\Lambda\sqrt{-g}\,d\Omega \tag{94,1}$$

(в галилеевых координатах $g=-1$ и S переходит в $\int\Lambda\,dV\,dt$). Интегрирование производится по всему (трехмерному) пространству и по времени между двумя заданными моментами, т. е. по бесконечной области 4-пространства, заключенной между двумя гиперповерхностями.

Как уже было указано в § 32, тензор энергии-импульса, определенный по формуле (32,5), не является, вообще говоря, симметричным, каким он должен быть. Для того чтобы сделать его симметричным, необходимо было прибавить к выражению (32,5)

надлежащим образом подобранный член вида $\frac{\partial}{\partial x^l}\psi_{ikl}$, причем $\psi_{ikl}=-\psi_{ilk}$.

Мы дадим теперь другой способ вычисления тензора энергии-импульса, обладающий тем преимуществом, что он сразу приводит к правильному выражению.

Произведем в (94,1) преобразование от координат x^i к координатам $x'^i=x^i+\xi^i$, где ξ^i — малые величины. При этом преобразовании компоненты g^{ik} преобразуются согласно формулам:

$$g'^{ik}(x'^l)=g^{lm}(x^l)\frac{\partial x'^i}{\partial x^l}\frac{\partial x'^k}{\partial x^m}=g^{lm}\left(\delta_l^i+\frac{\partial \xi^i}{\partial x^l}\right)\left(\delta_m^k+\frac{\partial \xi^k}{\partial x^m}\right)\approx$$

$$\approx g^{ik}(x^l)+g^{im}\frac{\partial \xi^k}{\partial x^m}+g^{kl}\frac{\partial \xi^i}{\partial x^l}.$$

Тензор g'^{ik} является здесь функцией от x'^l, а тензор g^{ik} — функцией прежних координат x^l. Для того чтобы представить все члены в виде функций от одних и тех же переменных, разложим $g'^{ik}(x^l+\xi^l)$ по степеням ξ^l. Далее, пренебрегая членами высшего порядка по ξ^l, мы можем в членах, содержащих ξ^l, написать g^{ik} вместо g'^{ik}. Таким образом, находим:

$$g'^{ik}(x^l)=g^{ik}(x^l)-\xi^l\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l}+g^{il}\frac{\partial \xi^k}{\partial x^l}+g^{kl}\frac{\partial \xi^i}{\partial x^l}.$$

Легко убедиться путем непосредственной проверки, что последние три члена справа могут быть написаны в виде суммы $\xi^{i;k}+\xi^{k;i}$ контравариантных производных от ξ^i. Таким образом, находим окончательно преобразование g^{ik} в виде

$$g'^{ik}=g^{ik}+\delta g^{ik},\quad \delta g^{ik}=\xi^{i;k}+\xi^{k;i}. \tag{94,2}$$

Для ковариантных компонент имеем при этом:

$$g'_{ik}=g_{ik}+\delta g_{ik},\quad \delta g_{ik}=-\xi_{i;k}-\xi_{k;i} \tag{94,3}$$

(так, чтобы с точностью до величин первого порядка малости соблюдалось условие $g_{il}g'^{kl}=\delta_i^k$) [1]).

Поскольку действие S есть скаляр, то при преобразовании координат оно не меняется. С другой стороны, изменение δS действия при преобразовании координат можно написать в следующем виде.

---

[1]) Отметим, что уравнения

$$\xi_{i;k}+\xi_{k;i}=0$$

определяют те инфинитезимальные преобразования координат, которые не меняют данной метрики. В литературе их часто называют уравнениями Киллинга.

Пусть, как и в § 32, q обозначают величины, определяющие ту физическую систему, к которой относится действие S. При преобразовании координат величины q меняются на δq. При вычислении δS можно, однако, не писать членов, связанных с изменениями q. Все эти члены все равно взаимно сокращаются в силу «уравнений движения» физической системы, поскольку эти уравнения как раз и получаются путем приравнивания нулю вариации S по величинам q. Поэтому достаточно писать только члены, связанные с изменением g_{ik}. Воспользовавшись, как обычно, теоремой Гаусса и полагая на границах интегрирования $\delta g^{ik}=0$, находим δS в виде[1])

$$\delta S=\frac{1}{c}\int\left\{\frac{\partial\sqrt{-g}\,\Lambda}{\partial g^{ik}}\delta g^{ik}+\frac{\partial\sqrt{-g}\,\Lambda}{\partial\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l}}\delta\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l}\right\}d\Omega=$$

$$=\frac{1}{c}\int\left\{\frac{\partial\sqrt{-g}\Lambda}{\partial g^{ik}}-\frac{\partial}{\partial x^l}\frac{\partial\sqrt{-g}\Lambda}{\partial\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l}}\right\}\delta g^{ik}\,d\Omega.$$

Введем теперь обозначение

$$\frac{1}{2}\sqrt{-g}T_{ik}=\frac{\partial\sqrt{-g}\,\Lambda}{\partial g^{ik}}-\frac{\partial}{\partial x^l}\frac{\partial\sqrt{-g}\,\Lambda}{\partial\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l}};\tag{94,4}$$

тогда δS примет вид[2])

$$\delta S=\frac{1}{2c}\int T_{ik}\delta g^{ik}\sqrt{-g}\,d\Omega=-\frac{1}{2c}\int T^{ik}\delta g_{ik}\sqrt{-g}\,d\Omega\tag{94,5}$$

(замечаем, что $g^{ik}\delta g_{lk}=-g_{lk}\delta g^{ik}$ и потому $T^{ik}\delta g_{ik}=-T_{ik}\delta g^{ik}$). Подставляя сюда для δg^{ik} выражение (94,2), имеем, воспользовавшись симметрией тензора T_{ik}:

$$\delta S=\frac{1}{2c}\int T_{ik}(\xi^{i;k}+\xi^{k;i})\sqrt{-g}\,d\Omega=\frac{1}{c}\int T_{ik}\xi^{i;k}\sqrt{-g}\,d\Omega.$$

---

[1]) Необходимо подчеркнуть, что введенное здесь обозначение производных по компонентам симметричного тензора g_{ik} имеет, в некотором смысле, символический характер. Именно, производные $\partial F/\partial g_{ik}$ (F — некоторая функция от g_{ik}) имеют, по существу, смысл лишь как выражающие тот факт, что $dF=\frac{\partial F}{\partial g_{ik}}dg_{ik}$. Но в сумму $\frac{\partial F}{\partial g_{ik}}dg_{ik}$ члены с дифференциалами dg_{ik} каждой из компонент с $i\neq k$ входят дважды. Поэтому при дифференцировании конкретного выражения F по какой-либо определенной компоненте g_{ik} с $i\neq k$ мы получили бы величину, вдвое большую, чем то, что мы обозначаем посредством $\partial F/\partial g_{ik}$. Это замечание необходимо иметь в виду, если придавать определенные значения индексам i, k в формулах, в которые входят производные по g_{ik}.

[2]) В рассматриваемом случае десять величин δg_{ik} не независимы, так как являются результатом преобразования координат, которых имеется всего четыре. Поэтому из равенства δS нулю отнюдь не следует, что $T_{ik}=0$!

Далее, преобразуем это выражение следующим образом:

$$\delta S = \frac{1}{c}\int (T_i^k \xi^i)_{;k}\sqrt{-g}\,d\Omega - \frac{1}{c}\,T^k_{i;k}\xi^i\sqrt{-g}\,d\Omega. \qquad (94,6)$$

Первый интеграл с помощью (86,9) может быть написан в виде

$$\frac{1}{c}\int \frac{\partial}{\partial x^k}\left(\sqrt{-g}\,T_i^k \xi^i\right) d\Omega$$

и преобразован в интеграл на гиперповерхности. Поскольку на границах интегрирования ξ^i обращаются в нуль, то этот интеграл исчезает.

Таким образом, приравнивая δS нулю, находим:

$$\delta S = -\frac{1}{c}\int T^k_{i;k}\xi^i\sqrt{-g}\,d\Omega = 0.$$

Ввиду произвольности ξ^i отсюда следует, что

$$T^k_{i;k} = 0. \qquad (94,7)$$

Сравнивая это уравнение с уравнением (32,4) $\partial T_{ik}/\partial x^k = 0$, имевшим место в галилеевых координатах, мы видим, что тензор T_{ik}, определяемый формулой (94,4), должен быть отождествлен с тензором энергии-импульса, — по крайней мере с точностью до постоянного множителя. Что этот множитель равен единице, легко проверить, производя, например, вычисление по формуле (94,4) для случая электромагнитного поля, когда

$$\Lambda = -\frac{1}{16\pi}F_{ik}F^{ik} = -\frac{1}{16\pi}F_{ik}F_{lm}g^{il}g^{km}.$$

Таким образом, формула (94,4) дает возможность вычислить тензор энергии-импульса путем дифференцирования Λ по компонентам метрического тензора (и их производным). При этом тензор T_{ik} получается сразу в явно симметричном виде. Формула (94,4) удобна для вычисления тензора энергии-импульса не только в случае наличия гравитационного поля, но и при его отсутствии, когда метрический тензор не имеет самостоятельного смысла и переход к криволинейным координатам производится формально как промежуточный этап при вычислении T_{ik}.

Выражение (33,1) для тензора энергии-импульса электромагнитного поля должно быть написано в криволинейных координатах в виде

$$T_{ik} = \frac{1}{4\pi}\left(-F_{il}F_k{}^l + \frac{1}{4}F_{lm}F^{lm}g_{ik}\right). \qquad (94,8)$$

Для макроскопических же тел тензор энергии-импульса равен [ср. (35,2)]:

$$T_{ik}=(p+\varepsilon)\,u_i u_k - p g_{ik}. \tag{94,9}$$

Отметим, что компонента T_{00} всегда положительна[1]):

$$T_{00}\geqslant 0 \tag{94,10}$$

(смешанная же компонента T_0^0 не имеет, вообще говоря, определенного знака).

Задача

Рассмотреть возможные типы приведения к каноническому виду симметричного тензора второго ранга.

Решение. Приведение симметричного тензора A_{ik} к главным осям означает нахождение таких «собственных векторов» n^i, для которых

$$A_{ik}n^k=\lambda n_i. \tag{1}$$

Соответствующие главные значения λ получаются как корни уравнения 4-й степени

$$|A_{ik}-\lambda g_{ik}|=0 \tag{2}$$

и являются инвариантами тензора. Как величины λ, так и соответствующие им собственные векторы могут оказаться комплексными. (Компоненты же самого тензора A_{ik} предполагаются, разумеется, вещественными.)

Из уравнений (1) легко показать обычным путем, что два вектора $n_i^{(1)}$ и $n_i^{(2)}$, соответствующих двум различным главным значениям $\lambda^{(1)}$ и $\lambda^{(2)}$, взаимно ортогональны:

$$n_i^{(1)}n^{(2)i}=0. \tag{3}$$

В частности, если уравнение (2) имеет комплексно-сопряженные корни λ и λ^*, которым соответствуют комплексно-сопряженные векторы n_i и n_i^*, то должно быть

$$n_i n^{i*}=0. \tag{4}$$

Тензор A_{ik} выражается через свои главные значения и соответствующие собственные векторы формулой

$$A_{ik}=\sum\lambda\frac{n_i n_k}{n_l n^l} \tag{5}$$

(если только какое-либо из $n_l n^l$ не равно нулю — см. ниже).

---

[1]) Действительно, имеем $T_{00}=\varepsilon u_0^2+p\left(u_0^2-g_{00}\right)$. Первый член, очевидно, положителен. Во втором же члене пишем:

$$u_0=g_{00}u^0+g_{0\alpha}u^\alpha=\frac{g_{00}dx^0+g_{0\alpha}dx^\alpha}{ds}$$

и после простого преобразования получим $g_{00}p\,(dl/ds)^2$, где dl — элемент пространственного расстояния (84,6); отсюда видно, что и второй член в T_{00} положителен. В том же самом легко убедиться и для тензора (94,8).

В зависимости от характера корней уравнения (2) могут иметь место следующие три различных случая.

I) Все четыре главных значения λ вещественны. При этом вещественны также и векторы n^i, а поскольку все они взаимно ортогональны, то три из них должны иметь пространственное, а одни — временное направление (их можно нормировать соответственно условиями $n_i n^i = -1$ и $n_i n^i = 1$). Выбрав направления осей координат вдоль этих векторов, приведем тензор к виду

$$A_{ik} = \begin{pmatrix} \lambda^{(0)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda^{(3)} \end{pmatrix}. \tag{6}$$

II) Уравнение (2) имеет два вещественных ($\lambda^{(2)}$, $\lambda^{(3)}$) и два комплексно-сопряженных ($\lambda' \pm i\lambda''$) корня. Комплексно-сопряженные векторы n_i, n_i^*, соответствующие двум последним корням, напишем в виде $a_i \pm ib_i$; поскольку они определены лишь с точностью до произвольного комплексного множителя, можно нормировать их условием $n_i n^i = n_i^* n^{i*} = 1$. Учитывая также (4), найдем для вещественных векторов a_i, b_i условия:

$$a_i a^i + b_i b^i = 0, \quad a_i b^i = 0, \quad a_i a^i - b_i b^i = 1,$$

откуда $a_i a^i = 1/2$, $b_i b^i = -1/2$, т. е. один из этих векторов имеет временное а другой — пространственное направление[1]). Выбрав координатные оси вдоль векторов a^i, b^i, $n^{(2)i}$, $n^{(3)i}$, приведем [согласно (5)] тензор к виду

$$A_{ik} = \begin{pmatrix} \lambda' & \lambda'' & 0 & 0 \\ \lambda'' & -\lambda' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda^{(3)} \end{pmatrix}. \tag{7}$$

III) Если квадрат одного из векторов n^i равен нулю ($n_i n^i = 0$), то этот вектор не может быть выбран в качестве направления координатной оси. Можно, однако, выбрать одну из плоскостей $x^0 x^\alpha$ так, чтобы вектор n^i лежал в ней. Пусть это будет плоскость $x^0 x^1$. Тогда из $n_i n^i = 0$ следует, что $n^0 = n^1$ и из уравнений (1) имеем:

$$A_{00} + A_{01} = \lambda, \quad A_{10} + A_{11} = -\lambda,$$

откуда

$$A_{00} = \lambda + \mu, \quad A_{11} = -\lambda + \mu, \quad A_{01} = -\mu,$$

где μ — неинвариантная величина, меняющаяся при поворотах в плоскости $x^0 x^1$; должным поворотом она всегда может быть сделана вещественной. Выбирая оси $x^2 x^3$ по двум другим (пространственным) векторам $n^{(2)i}$, $n^{(3)i}$, приведем тензор к виду

$$A_{ik} = \begin{pmatrix} \lambda + \mu & -\mu & 0 & 0 \\ -\mu & -\lambda + \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda^{(3)} \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Этот случай соответствует равенству двух корней ($\lambda^{(0)}$, $\lambda^{(1)}$) уравнения (2).

[1]) Поскольку временное направление должен иметь лишь один из векторов, отсюда следует, что уравнение (2) не может иметь двух пар комплексно-сопряженных корней.

Отметим, что для физического тензора энергии-импульса T_{ik} вещества, движущегося со скоростями, меньшими скорости света, может иметь место лишь первый случай; это связано с тем, что всегда должна существовать такая система отсчета, в которой поток энергии вещества, т. е. компоненты $T_{\alpha 0}$, равен нулю. Для тензора же энергии-импульса электромагнитных волн имеет место третий случай с $\lambda = \lambda^{(2)} = \lambda^{(3)} = 0$ (ср. стр. 113); можно показать, что в противном случае существовала бы система отсчета, в которой поток энергии превышал умноженную на c ее плотность.

§ 95. Уравнения гравитационного поля

Мы можем теперь перейти к выводу уравнений гравитационного поля. Эти уравнения получаются из принципа наименьшего действия $\delta(S_m + S_g) = 0$, где S_g и S_m — действия соответственно для гравитационного поля и материи. Варьированию подвергается теперь гравитационное поле, т. е. величины g_{ik}.

Вычислим вариацию δS_g. Имеем:

$$\delta \int R \sqrt{-g}\, d\Omega = \delta \int g^{ik} R_{ik} \sqrt{-g}\, d\Omega =$$
$$= \int \left(R_{ik} \sqrt{-g}\, \delta g^{ik} + R_{ik} g^{ik} \delta \sqrt{-g} + g^{ik} \sqrt{-g}\, \delta R_{ik} \right) d\Omega.$$

Подставляя сюда, согласно (86,4),

$$\delta \sqrt{-g} = -\frac{1}{2\sqrt{-g}} \delta g = -\frac{1}{2} \sqrt{-g}\, g_{ik}\, \delta g^{ik},$$

находим:

$$\delta \int R \sqrt{-g}\, d\Omega =$$
$$= \int \left(R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R \right) \delta g^{ik} \sqrt{-g}\, d\Omega + \int g^{ik} \delta R_{ik} \sqrt{-g}\, d\Omega. \qquad (95,1)$$

Для вычисления δR_{ik} заметим, что хотя величины Γ^i_{kl} и не составляют тензора, но их вариации $\delta \Gamma^i_{kl}$ образуют тензор. Действительно, $\Gamma^k_{il} A_k dx^l$ есть изменение вектора при параллельном переносе [см. (85,5)] из некоторой точки P в бесконечно близкую к ней P'. Поэтому $\delta \Gamma^k_{il} A_k dx^l$ есть разность двух векторов, получающихся соответственно при двух параллельных переносах (с неварьированными и варьированными Γ^i_{kl}) из точки P в одну и ту же точку P'. Разность же двух векторов в одной и той же точке является вектором, а потому $\delta \Gamma^i_{kl}$ есть тензор.

Воспользуемся локально-геодезической системой координат. Тогда в данной точке все $\Gamma^i_{kl} = 0$. С помощью выражения (92,10) для R_{ik} имеем (помня, что первые производные от g^{ik} равны теперь нулю):

$$g^{ik} \delta R_{ik} = g^{ik} \left\{ \frac{\partial}{\partial x^l} \delta \Gamma^l_{ik} - \frac{\partial}{\partial x^k} \delta \Gamma^l_{il} \right\} = g^{ik} \frac{\partial}{\partial x^l} \delta \Gamma^l_{ik} - g^{il} \frac{\partial}{\partial x^l} \delta \Gamma^k_{ik} = \frac{\partial w^l}{\partial x^l},$$

где

$$w^l = g^{ik}\,\delta\Gamma^l_{ik} - g^{il}\,\delta\Gamma^k_{ik}.$$

Поскольку w^l есть вектор, то мы можем написать полученное соотношение в произвольной системе координат в виде

$$g^{ik}\,\delta R_{ik} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^l}\left(\sqrt{-g}\,w^l\right)$$

[заменяя $\partial w^l/\partial x^l$ на $w^l_{;l}$ и пользуясь (86,9)]. Следовательно, второй интеграл справа в (95,1) равен

$$\int g^{ik}\,\delta R_{ik}\sqrt{-g}\,d\Omega = \int \frac{\partial\sqrt{-g}\,w^l}{\partial x^l}\,d\Omega$$

и по теореме Гаусса может быть преобразован в интеграл от w^l по гиперповерхности, охватывающей весь 4-объем. Поскольку на пределах интегрирования вариация поля равна нулю, то этот член исчезает. Таким образом, вариация δS_g равна[1])

$$\delta S_g = -\frac{c^3}{16\pi k}\int\left(R_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}R\right)\delta g^{ik}\sqrt{-g}\,d\Omega. \qquad (95,2)$$

Заметим, что если бы мы исходили из выражения

$$S_g = -\frac{c^3}{16\pi k}\int G\sqrt{-g}\,d\Omega$$

для действия поля, то мы получили бы, как легко убедиться,

$$\delta S_g = -\frac{c^3}{16\pi k}\int\left\{\frac{\partial(G\sqrt{-g})}{\partial g^{ik}} - \frac{\partial}{\partial x^l}\frac{\partial(G\sqrt{-g})}{\partial\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l}}\right\}\delta g^{ik}\,d\Omega.$$

Сравнивая это с (95,2), находим следующее соотношение:

$$R_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}R = \frac{1}{\sqrt{-g}}\left\{\frac{\partial(G\sqrt{-g})}{\partial g^{ik}} - \frac{\partial}{\partial x^l}\frac{\partial(G\sqrt{-g})}{\partial\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l}}\right\}. \qquad (95,3)$$

Для вариации действия материи мы можем написать согласно (94,5)

$$\delta S_m = \frac{1}{2c}\int T_{ik}\delta g^{ik}\sqrt{-g}\,d\Omega, \qquad (95,4)$$

---

[1]) Отметим здесь следующее любопытное обстоятельство. Если вычислять вариацию $\delta\int R\sqrt{-g}\,d\Omega$ [с R_{ik} из (92,10)], рассматривая Γ^i_{kl} как независимые переменные, а g_{ik} — как постоянные, после чего воспользоваться выражениями (86,3) для Γ^i_{kl}, то мы получили бы, как легко убедиться, тождественно нуль. Обратно, можно было бы определить связь между Γ^i_{kl} и метрическим тензором, если потребовать обращения указанной вариации в нуль.

где T_{ik} — тензор энергии-импульса материи (включая электромагнитное поле). Гравитационное взаимодействие играет роль только для тел с достаточно большой массой (благодаря малости гравитационной постоянной). Поэтому при исследовании гравитационного поля нам приходится обычно иметь дело с макроскопическими телами. Соответственно этому для T_{ik} надо обычно писать выражение (94,9).

Таким образом, из принципа наименьшего действия $\delta S_m + \delta S_g = 0$ мы находим:

$$-\frac{c^3}{16\pi k}\int\left(R_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}R - \frac{8\pi k}{c^4}T_{ik}\right)\delta g^{ik}\sqrt{-g}\,d\Omega = 0,$$

откуда ввиду произвольности δg^{ik}:

$$R_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}R = \frac{8\pi k}{c^4}T_{ik}, \qquad (95,5)$$

или в смешанных компонентах

$$R_i^k - \frac{1}{2}\delta_i^k R = \frac{8\pi k}{c^4}T_i^k. \qquad (95,6)$$

Это и есть искомые *уравнения гравитационного поля* — основные уравнения общей теории относительности. Их называют *уравнениями Эйнштейна*.

Упрощая (95,6) по индексам i и k, находим

$$R = -\frac{8\pi k}{c^4}T \qquad (95,7)$$

$(T = T_i^i)$. Поэтому уравнения поля можно написать также в виде

$$R_{ik} = \frac{8\pi k}{c^4}\left(T_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}T\right). \qquad (95,8)$$

Уравнения гравитационного поля нелинейны. Поэтому для гравитационных полей несправедлив принцип суперпозиции, в отличие от того, что имеет место для электромагнитного поля в специальной теории относительности.

Надо, впрочем, иметь в виду, что обычно приходится иметь дело со слабыми гравитационными полями, для которых уравнения поля в первом приближении линейны (см. следующий параграф); для таких полей в том же приближении справедлив и принцип суперпозиции.

В пустом пространстве $T_{ik} = 0$ и уравнения гравитационного поля сводятся к уравнениям

$$R_{ik} = 0. \qquad (95,9)$$

Напомним, что это отнюдь не значит, что пустое пространство-время является плоским, — для этого требовалось бы выполнение более сильных условий $R^i_{klm} = 0$.

Тензор энергии-импульса электромагнитного поля обладает тем свойством, что $T_i^i=0$ [см. (33,2)]. Ввиду (95,7) отсюда следует, что при наличии одного только электромагнитного поля без каких-либо масс скалярная кривизна пространства-времени равна нулю.

Как мы знаем, дивергенция тензора энергии-импульса равна нулю:

$$T_{i;k}^{k}=0. \qquad (95,10)$$

Поэтому должна быть равна нулю также и дивергенция левой части уравнения (95,6). Это действительно так в силу тождества (92,13).

Таким образом, уравнения (95,10) по существу содержатся в уравнениях поля (95,6). С другой стороны, уравнения (95,10), выражая собой законы сохранения энергии и импульса, содержат в себе уравнения движения той физической системы, к которой относится рассматриваемый тензор энергии-импульса (т. е. уравнения движения материальных частиц или вторую пару уравнений Максвелла). Таким образом, уравнения гравитационного поля содержат в себе также и уравнения для самой материи, которая создает это поле. Поэтому распределение и движение материи, создающей гравитационное поле, отнюдь не могут быть заданы произвольным образом. Напротив, они должны быть определены (посредством решения уравнений поля при заданных начальных условиях) одновременно с самим создаваемым этой материей полем.

Обратим внимание на принципиальное отличие этой ситуации от того, что мы имели в случае электромагнитного поля. Уравнения этого поля (уравнения Максвелла) содержат в себе только уравнение сохранения полного заряда (уравнение непрерывности), но не уравнения движения самих зарядов. Поэтому распределение и движение зарядов могут быть заданы произвольным образом, лишь бы полный заряд был постоянным. Заданием этого распределения зарядов определяется тогда посредством уравнений Максвелла создаваемое ими электромагнитное поле.

Надо, однако, уточнить, что для полного определения распределения и движения материи в случае гравитационного поля к уравнениям Эйнштейна надо присоединить еще (не содержащееся, конечно, в них) уравнение состояния вещества, т. е. уравнение, связывающее между собой давление и плотность. Это уравнение должно быть задано наряду с уравнениями поля[1]).

[1]) Уравнение состояния связывает между собой в действительности не две, а три термодинамические величины, например давление, плотность и температуру вещества. В применениях в теории тяготения это обстоятельство, однако, обычно несущественно, так как используемые здесь приближенные уравнения состояния фактически не зависят от температуры (таковы, например, уравнения $p=0$ для разреженного вещества, предельное крайне релятивистское уравнение $p=\varepsilon/3$ для сильно сжатого вещества и т. п.).

Четыре координаты x^i могут быть подвергнуты произвольному преобразованию. Посредством этого преобразования можно произвольным образом выбрать четыре из десяти компонент тензора g_{ik}. Поэтому независимыми неизвестными функциями являются только шесть из величин g_{ik}. Далее, четыре компоненты входящей в тензор энергии-импульса материи 4-скорости u^i связаны друг с другом соотношением $u_i u^i = 1$, так что независимыми являются только три из них. Таким образом, мы имеем, как и следовало, десять уравнений поля (95,5) для десяти неизвестных величин: шести из компонент g_{ik}, трех из компонент u^i и плотности материи ε/c^2 (или ее давления p). Для гравитационного поля в пустоте остается всего шесть неизвестных величин (компонент g_{ik}) и соответственно понижается число независимых уравнений поля: десять уравнений $R_{ik}=0$ связаны четырьмя тождествами (92,13).

Отметим некоторые особенности структуры уравнений Эйнштейна. Они представляют собой систему дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка. Однако в уравнения входят производные по времени не от всех 10 компонент g_{ik}. Действительно, из выражения (92,4) видно, что вторые производные по времени содержатся только в компонентах $R_{0\alpha0\beta}$ тензора кривизны, куда они входят в виде члена $-\frac{1}{2}\ddot{g}_{\alpha\beta}$ (точкой обозначаем дифференцирование по x^0); вторые же производные от компонент $g_{0\alpha}$ и g_{00} метрического тензора вообще отсутствуют. Ясно поэтому, что и получающийся путем упрощения из тензора кривизны тензор R_{ik}, а с ним и уравнения (95,5) тоже содержат вторые производные по времени лишь от шести пространственных компонент $g_{\alpha\beta}$.

Легко также видеть, что эти производные входят лишь в $^{\beta}_{\alpha}$-уравнения (95,5), т. е. в уравнения

$$R_{\alpha}^{\beta}-\frac{1}{2}\delta_{\alpha}^{\beta}R=\frac{8\pi k}{c^4}T_{\alpha}^{\beta}. \qquad (95,11)$$

Уравнения же $^0_0$ и $^0_{\alpha}$, т. е. уравнения

$$R_0^0-\frac{1}{2}R=\frac{8\pi k}{c^4}T_0^0, \qquad R_{\alpha}^0=\frac{8\pi k}{c^4}T_{\alpha}^0, \qquad (95,12)$$

содержат производные по времени лишь первого порядка. В этом можно убедиться, проверив, что при образовании путем свертывания R_{iklm} величин R_{α}^0 и $R_0^0-\frac{1}{2}R=\frac{1}{2}(R_0^0-R_{\alpha}^{\alpha})$ компоненты вида $R_{0\alpha0\beta}$ действительно выпадают. Еще проще увидеть это из тождества (92,13), записав его в виде

$$\left(R_i^0-\frac{1}{2}\delta_i^0R\right)_{;0}=-\left(R_i^{\alpha}-\frac{1}{2}\delta_i^{\alpha}R\right)_{;\alpha} \qquad (95,13)$$

($i=0,\ 1,\ 2,\ 3$). Старшие производные по времени, входящие в правую часть этого равенства,—вторые производные (фигурирующие

в самих величинах R_i^α, R). Поскольку (95,13) — тождество, то и его левая сторона должна, следовательно, содержать производные по времени не выше второго порядка. Но одно дифференцирование по времени фигурирует уже в нем явным образом; поэтому сами выражения $R_i^0 - \frac{1}{2}\delta_i^0 R$ могут содержать производные по времени не выше первого порядка.

Более того, левые стороны уравнений (95,12) не содержат также и первых производных $\dot{g}_{0\alpha}$ и $\dot{g}_{00}$ (а лишь производные $\dot{g}_{\alpha\beta}$). Действительно, из всех $\Gamma_{i,kl}$ эти производные содержат только $\Gamma_{\alpha,00}$ и $\Gamma_{0,00}$, а эти величины в свою очередь входят только в компоненты тензора кривизны вида $R_{0\alpha0\beta}$, которые, как мы уже знаем, выпадают при образовании левых сторон уравнений (95,12).

Если интересоваться решением уравнений Эйнштейна при заданных начальных (по времени) условиях, то возникает вопрос о том, для скольких величин могут быть произвольно заданы начальные пространственные распределения.

Начальные условия для уравнений второго порядка должны включать начальные распределения как самих дифференцируемых величин, так и их первых производных по времени. Однако поскольку в данном случае уравнения содержат вторые производные лишь от шести $g_{\alpha\beta}$, то в начальных условиях не могут быть произвольно заданы все g_{ik} и $\dot{g}_{ik}$. Так, можно задать (наряду со скоростью и плотностью материи) начальные значения функций $g_{\alpha\beta}$ и $\dot{g}_{\alpha\beta}$, после чего из 4 уравнений (95,12) определятся допустимые начальные значения $g_{0\alpha}$ и g_{00}; в уравнениях же (95,11) останутся еще произвольными начальные значения $\dot{g}_{0\alpha}$.

В число задаваемых таким образом начальных условий входят, однако, также и функции, произвольность которых связана просто с произволом в выборе 4-системы координат. Между тем реальным физическим смыслом обладает лишь число «физически различных» произвольных функций, которое уже не может быть уменьшено никаким выбором системы отсчета. Из физических соображений легко видеть, что это число равно 8: начальные условия должны задавать распределение плотности материи и трех компонент ее скорости, а также еще четырех величин, характеризующих свободное (не связанное с материей) гравитационное поле (см. ниже § 102); для свободного гравитационного поля в пустоте начальными условиями должны задаваться лишь последние четыре величины.

Задача

Написать уравнения постоянного гравитационного поля, выразив все операции дифференцирования по пространственным координатам в виде ковариантных производных в пространстве с метрикой $\gamma_{\alpha\beta}$ (84,7).

Решение. Вводим обозначения $g_{00}=h$, $g_{0\alpha}=-hg_\alpha$ (88,11) и трехмерную скорость v^α (89,10). Ниже все операции поднимания и опускания индексов и ковариантного дифференцирования производятся в трехмерном пространстве с метрикой $\gamma_{\alpha\beta}$ над трехмерными векторами g_α, v^α и трехмерным скаляром h.

Искомые уравнения должны быть инвариантны по отношению к преобразованию

$$x^\alpha \to x^\alpha, \quad x^0 \to x^0 + f(x^\alpha), \tag{1}$$

не меняющему стационарности поля. Но при таком преобразовании, как легко убедиться (см. примечание на стр. 319), $g_\alpha \to g_\alpha - \partial f/\partial x^\alpha$, а скаляр h и тензор $\gamma_{\alpha\beta}=-g_{\alpha\beta}+hg_\alpha g_\beta$ не меняются. Ясно поэтому, что искомые уравнения, будучи выражены через $\gamma_{\alpha\beta}$, h и g_α, могут содержать g_α лишь в виде комбинации производных, составляющих трехмерный антисимметричный тензор

$$f_{\alpha\beta}=g_{\beta;\,\alpha}-g_{\alpha;\,\beta}=\frac{\partial g_\beta}{\partial x^\alpha}-\frac{\partial g_\alpha}{\partial x^\beta}, \tag{2}$$

инвариантный относительно указанного преобразования. Учитывая это обстоятельство, можно существенно упростить вычисления, полагая (после вычисления всех входящих в R_{ik} производных) $g_\alpha=0$ и $g_{\alpha;\,\beta}+g_{\beta;\,\alpha}=0$[1]).

Символы Кристоффеля:

$$\Gamma^0_{00}=\frac{1}{2}g^\alpha h_{;\alpha}, \quad \Gamma^\alpha_{00}=\frac{1}{2}h^{;\alpha},$$

$$\Gamma^0_{\alpha 0}=\frac{1}{2h}h_{;\alpha}+\frac{h}{2}g^\beta f_{\alpha\beta}+\ldots, \quad \Gamma^\alpha_{0\beta}=\frac{h}{2}f_\beta{}^\alpha-\frac{1}{2}g_\beta h^{;\alpha},$$

$$\Gamma^0_{\alpha\beta}=-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_\alpha}{\partial x^\beta}+\frac{\partial g_\beta}{\partial x^\alpha}\right)-\frac{1}{2h}(g_\alpha h_{;\beta}+g_\beta h_{;\alpha})+g_\gamma\lambda^\gamma_{\alpha\beta}+\ldots,$$

$$\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}=\lambda^\alpha_{\beta\gamma}-\frac{h}{2}\left(g_\beta f_\gamma{}^\alpha+g_\gamma f_\beta{}^\alpha\right)+\ldots$$

Опущенные здесь члены (вместо которых стоят многоточия) квадратичны по компонентам вектора g_α: эти члены заведомо пропадут, когда мы положим $g_\alpha=0$ после проведения дифференцирований в R_{ik} (92,10). При вычислениях использованы формулы (84,9), (84,12—13); $\lambda^\alpha_{\beta\gamma}$ — трехмерные символы Кристоффеля, построенные по метрике $\gamma_{\alpha\beta}$.

Тензор T_{ik} вычисляется по формуле (94,9) с u^i из (88,14) (причем тоже полагаем $g_\alpha=0$).

---

[1]) Во избежание недоразумений подчеркнем, что изложенный упрощенный способ проведения вычислений, давая правильные уравнения поля, был бы непригоден для вычисления любых компонент R_{ik} самих по себе, поскольку они не инвариантны относительно преобразования (1). В уравнениях (3)—(5) слева указаны те компоненты тензора Риччи, которым в действительности равны написанные выражения. Эти компоненты инвариантны по отношению к преобразованию (1).

В результате вычислений из (95,8) получаются следующие уравнения:

$$\frac{1}{h}R_{00}=\frac{1}{\sqrt{h}}(\sqrt{h})_{;\alpha}^{;\alpha}+\frac{h}{4}f_{\alpha\beta}f^{\alpha\beta}=\frac{8\pi k}{c^4}\left(\frac{\varepsilon+p}{1-\frac{v^2}{c^2}}-\frac{\varepsilon-p}{2}\right), \tag{3}$$

$$\frac{1}{\sqrt{h}}R_0^{\alpha}=-\frac{\sqrt{h}}{2}f^{\alpha\beta}{}_{;\beta}-\frac{3}{2}f^{\alpha\beta}(\sqrt{h})_{;\beta}=\frac{8\pi k}{c^4}\frac{p+\varepsilon}{1-\frac{v^2}{c^2}}\frac{v^{\alpha}}{c}, \tag{4}$$

$$R^{\alpha\beta}=P^{\alpha\beta}+\frac{h}{2}f^{\alpha\gamma}f^{\beta}{}_{\gamma}-\frac{1}{\sqrt{h}}(\sqrt{h})^{;\alpha;\beta}=$$

$$=\frac{8\pi k}{c^4}\left[\frac{(p+\varepsilon)v^{\alpha}v^{\beta}}{c^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}+\frac{\varepsilon-p}{2}\gamma^{\alpha\beta}\right]. \tag{5}$$

Здесь $P^{\alpha\beta}$ — трехмерный тензор, построенный из $\gamma_{\alpha\beta}$ так, как R^{ik} строится из g_{ik} [1]).

§ 96. Закон Ньютона

Произведем в уравнениях Эйнштейна предельный переход к нерелятивистской механике. Как было указано в § 87, предположение о малости скоростей всех частиц требует одновременно, чтобы само гравитационное поле было слабым.

Выражение для компоненты g_{00} метрического тензора (единственной, которая нам понадобится) в рассматриваемом предельном случае было найдено в § 87:

$$g_{00}=1+\frac{2\varphi}{c^2}.$$

Далее, для компонент тензора энергии-импульса мы можем воспользоваться выражением (35,4) $T_i^k=\mu c^2 u_i u^k$, где μ — плотность массы тела (сумма масс покоя частиц в единице объема; индекс 0 у μ для краткости опускаем). Что касается 4-скорости u^i, то поскольку макроскопическое движение тоже, конечно, считается медленным, то мы должны пренебречь всеми ее пространственными компонентами, оставив только временную, т. е. должны положить $u^{\alpha}=0$, $u^0=u_0=1$. Из всех компонент T_i^k остается, таким образом, только

$$T_0^0=\mu c^2. \tag{96,1}$$

Скаляр $T=T_i^i$ будет равен той же величине μc^2.

[1]) Аналогичным образом уравнения Эйнштейна могут быть расписаны и в общем случае зависящей от времени метрики. Наряду с пространственными производными в них будут входить также и производные по времени от величин $\gamma_{\alpha\beta}$, g_{α}, h. См. *А. Л. Зельманов*, ДАН СССР 107, 815 (1956).

Уравнения поля мы напишем в форме (95,8):

$$R_i^k = \frac{8\pi k}{c^4}\left(T_i^k - \frac{1}{2}\delta_i^k T\right);$$

при $i = k = 0$

$$R_0^0 = \frac{4\pi k}{c^2}\mu.$$

Все остальные уравнения, как легко убедиться, в рассматриваемом приближении тождественно обращаются в нуль.

При вычислении R_0^0 по общей формуле (92,10) замечаем, что члены, содержащие произведения величин Γ_{kl}^i, во всяком случае являются величинами второго порядка малости. Члены же, содержащие производные по $x^0 = ct$, являются малыми (по сравнению с членами с производными по координатам x^α) как содержащие лишние степени от $1/c$. В результате остается $R_0^0 = R_{00} = \partial\Gamma_{00}^\alpha/\partial x^\alpha$. Подставляя

$$\Gamma_{00}^\alpha \approx -\frac{1}{2} g^{\alpha\alpha}\frac{\partial g_{00}}{\partial x^\alpha} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial x^\alpha},$$

находим:

$$R_0^0 = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^{\alpha 2}} \equiv \frac{1}{c^2}\Delta\varphi.$$

Таким образом, уравнения поля дают

$$\Delta\varphi = 4\pi k\mu. \tag{96,2}$$

Это и есть уравнение гравитационного поля в нерелятивистской механике. По своей форме оно полностью аналогично уравнению Пуассона (36,4) для электрического потенциала, в котором теперь вместо плотности заряда стоит плотность массы, умноженная на $-k$. Поэтому мы можем сразу написать общее решение уравнения (96,2) по аналогии с (36,8) в виде

$$\varphi = -k\int\frac{\mu dV}{R}. \tag{96,3}$$

Эта формула определяет в нерелятивистском приближении потенциал гравитационного поля любого распределения масс.

В частности, для потенциала поля одной частицы с массой m имеем:

$$\varphi = -\frac{km}{R} \tag{96,4}$$

и, следовательно, сила $F = -m'\frac{\partial\varphi}{\partial R}$, действующая в этом поле на другую частицу (массы m'), равна

$$F = -\frac{kmm'}{R^2}. \tag{96,5}$$

Это — известный *закон тяготения Ньютона*.

Потенциальная энергия частицы в гравитационном поле равна ее массе, умноженной на потенциал поля, аналогично тому, что потенциальная энергия в электрическом поле равна произведению заряда на потенциал этого поля. Поэтому мы можем написать по аналогии с (37,1) для потенциальной энергии любого распределения масс выражение

$$U=\frac{1}{2}\int\mu\varphi\,dV. \qquad (96,6)$$

Для ньютоновского потенциала постоянного гравитационного поля вдали от создающих его масс можно написать разложение, аналогичное тому, которое было получено в §§ 40—41 для электростатического поля. Выберем начало координат в центре инерции масс. Тогда интеграл $\int\mu\mathbf{r}\,dV$, аналогичный дипольному моменту системы зарядов, тождественно обратится в нуль. Таким образом, в отличие от электрического поля, в гравитационном поле всегда можно исключить «дипольный член». Разложение потенциала φ имеет, следовательно, вид

$$\varphi=-k\left(\frac{M}{R_0}+\frac{1}{6}D_{\alpha\beta}\frac{\partial^2}{\partial X_\alpha\partial X_\beta}\frac{1}{R_0}+\ldots\right), \qquad (96,7)$$

где $M=\int\mu\,dV$ — полная масса системы, а величины

$$D_{\alpha\beta}=\int\mu\,(3x_\alpha x_\beta-r^2\delta_{\alpha\beta})\,dV \qquad (96,8)$$

можно назвать тензором квадрупольного момента масс[1]. Они связаны с обычным тензором моментов инерции

$$J_{\alpha\beta}=\int\mu\,(r^2\delta_{\alpha\beta}-x_\alpha x_\beta)\,dV$$

очевидными соотношениями

$$D_{\alpha\beta}=J_{\gamma\gamma}\delta_{\alpha\beta}-3J_{\alpha\beta}. \qquad (96,9)$$

Определение ньютоновского потенциала по заданному распределению масс представляет собой предмет одного из разделов математической физики; изложение соответствующих методов не входит в задачу этой книги. Мы приведем здесь для справочных целей лишь формулы для потенциала гравитационного поля, создаваемого однородным эллипсоидальным телом[2].

---

[1]) Мы пишем здесь все индексы α, β внизу, не делая различия между ко- и контравариантными компонентами, соответственно тому, что подразумеваются операции в обычном ньютоновском (евклидовом) пространстве.

[2]) Вывод этих формул можно найти в книге *Л. Н. Сретенского* «Теория ньютоновского потенциала», Гостехиздат, 1946.

Пусть поверхность эллипсоида задается уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, \qquad a>b>c. \tag{96,10}$$

Тогда потенциал поля в произвольной точке x, y, z вне тела дается следующей формулой:

$$\varphi=-\pi\mu abck\int\limits_{\xi}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{a^2+s}-\frac{y^2}{b^2+s}-\frac{z^2}{c^2+s}\right)\frac{ds}{R_s} \tag{96,11}$$

$$R_s=\sqrt{(a^2+s)(b^2+s)(c^2+s)},$$

где ξ — положительный корень уравнения

$$\frac{x^2}{a^2+\xi}+\frac{y^2}{b^2+\xi}+\frac{z^2}{c^2+\xi}=1. \tag{96,12}$$

Потенциал поля внутри эллипсоида определяется формулой

$$\varphi=-\pi\mu abck\int\limits_{0}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{a^2+s}-\frac{y^2}{b^2+s}-\frac{z^2}{c^2+s}\right)\frac{ds}{R_s}, \tag{96,13}$$

отличающейся от (96,11) заменой нижнего предела нулем; отметим, что это выражение является квадратичной функцией координат x, y, z.

Гравитационная энергия тела получается, согласно (96,6), интегрированием выражения (96,13) по объему эллипсоида. Оно производится элементарно[1]) и дает:

$$U=\frac{3km^2}{8}\int\limits_{0}^{\infty}\left[\frac{1}{5}\left(\frac{a^2}{a^2+s}+\frac{b^2}{b^2+s}+\frac{c^2}{c^2+s}\right)-1\right]\frac{ds}{R_s}=$$

$$=\frac{3km^2}{8}\int\limits_{0}^{\infty}\left[\frac{2}{5}sd\left(\frac{1}{R_s}\right)-\frac{2}{5}\frac{ds}{R_s}\right] \tag{96,14}$$

($m=\frac{4\pi}{3}abc\mu$ — полная масса тела); интегрируя первый член по частям, окончательно получим:

$$U=-\frac{3km^2}{10}\int\limits_{0}^{\infty}\frac{ds}{R_s}. \tag{96,15}$$

Все интегралы, входящие в формулы (96,11—14), приводятся к эллиптическим интегралам первого и второго рода. Для эллипсоидов вращения эти интегралы выражаются через элементарные функции. В частности, гравитационная энергия сплюснутого эллипсоида

---

[1]) Интегрирование квадратов x^2, y^2, z^2 проще всего производится путем подстановки $x=ax'$, $y=by'$, $z=cz'$, сводящей интеграл по объему эллипсоида к интегралу по объему шара единичного радиуса.

вращения ($a = b > c$),

$$U = -\frac{3km^2}{5\sqrt{a^2-c^2}} \arccos\frac{c}{a}, \tag{96,16}$$

а для вытянутого эллипсоида вращения ($a > b = c$):

$$U = -\frac{3km^2}{5\sqrt{a^2-c^2}} \operatorname{Arch}\frac{a}{c}. \tag{96,17}$$

Для шара ($a = c$) обе формулы дают значение $U = -3km^2/5a$, которое, разумеется, можно получить и элементарным путем[1]).

Задача

Определить равновесную форму равномерно вращающейся как целое однородной гравитирующей массы жидкостн.

Решение. Условне равновесия заключается в условии постоянства вдоль поверхности тела суммы гравитационного потенциала и потенциала центробежных сил:

$$\varphi - \frac{\Omega^2}{2}(x^2+y^2) = \text{const}$$

(Ω — угловая скорость вращения; ось вращения — ось z). Искомвя форма представляет собой сплюснутый эллнпсоид вращения. Для определения его параметров подставляем (96,13) в условие равновесия и исключаем z^2 с помощью уравнения (96,10); это дает:

$$(x^2+y^2)\left[\int\limits_0^\infty \frac{ds}{(a^2+s)^2\sqrt{c^2+s}} - \frac{\Omega^2}{2\pi\mu k a^2 c} - \frac{c^2}{a^2}\int\limits_0^\infty \frac{ds}{(a^2+s)(c^2+s)^{3/2}}\right] = \text{const},$$

откуда следует, что выражение в квадратных скобках должно обращаться в нуль. Произведя интегрирование, получим в результате уравнение

$$\frac{(a^2+2c^2)\,c}{(a^2-c^2)^{3/2}} \arccos\frac{c}{a} - \frac{3c^2}{a^2-c^2} = \frac{\Omega^2}{2\pi k\mu} = \frac{25}{6}\left(\frac{4\pi}{3}\right)^{1/3} \frac{M^2\mu^{1/3}}{m^{10/3}k}\left(\frac{c}{a}\right)^{4/3}$$

($M = \frac{2}{5} m a^2 \Omega$ — момент импульса тела относительно оси z), определяющее отношение полуосей c/a по заданному Ω илн M. Зависимость отношения c/a от M — однозначная; c/a монотонно убывает с увеличением M.

Оказывается, однако, что найденная симметричная форма устойчива (по отношению к малым возмущениям) лишь при не слишком больших значениях M[2]). Именно, она теряет устойчнвость при $M = 2{,}89 k^{1/2} m^{5/3} \mu^{-1/6}$ (причем $c/a = 0{,}58$). При дальнейшем увеличении M равновесной стаиовнтся форма трехосного эллипсоида с постепенно убывающими (соответственно от 1 и от 0,58) значениями b/a и c/a. Эта форма в свою очередь становится неустойчивой при $M = 3{,}84 k^{1/2} m^{5/3} \mu^{-1/6}$ (причем $a:b:c = 1:0{,}43:0{,}34$).

---

[1]) Потенциал поля внутрн однородного шара радиуса a

$$\varphi = -2\pi k\mu\left(a^2 - \frac{r^2}{3}\right).$$

[2]) Указання по литературе, посвященной этим вопросам, можно найти в книге: *Г. Ламб*, «Гидродинамика», Гостехиздат, 1947, гл. XII.

§ 97. Центрально-симметрическое гравитационное поле

Рассмотрим гравитационное поле, обладающее центральной симметрией. Такое поле может создаваться любым центрально-симметрическим распределением вещества; при этом, конечно, центрально-симметрическим должно быть не только распределение, но и движение вещества, т. е. скорость в каждой точке должна быть направлена по радиусу.

Центральная симметрия поля означает, что метрика пространства-времени, т. е. выражение для интервала ds, должна быть одинакова во всех точках, находящихся на одинаковом расстоянии от центра. В евклидовом пространстве это расстояние равно радиус-вектору; в неевклидовом же пространстве, каким оно является при наличии гравитационного поля, нет величины, которая обладала бы всеми свойствами евклидова радиус-вектора (одновременно равного расстоянию до центра и деленной на 2π длине окружности). Поэтому выбор «радиус-вектора» является теперь произвольным.

Если пользоваться «сферическими» пространственными координатами r, θ, φ, то наиболее общим центрально-симметрическим выражением для ds^2 является

$$ds^2 = h(r,\ t)\,dr^2 + k(r,\ t)\,(\sin^2\theta \cdot d\varphi^2 + d\theta^2) + \\ + l(r,\ t)\,dt^2 + a(r,\ t)\,dr\,dt, \qquad (97,1)$$

где a, h, k, l — некоторые функции от «радиус-вектора» r и «времени» t. Но, ввиду произвольности в выборе системы отсчета в общей теории относительности, мы можем еще подвергнуть координаты любому преобразованию, не нарушающему центральной симметрии ds^2; это значит, что мы можем преобразовать координаты r и t посредством формул

$$r = f_1(r',\ t'), \quad t = f_2(r',\ t'),$$

где f_1, f_2 — любые функции от новых координат r', t'.

Воспользовавшись этой возможностью, мы выберем координату r и время t таким образом, чтобы, во-первых, коэффициент $a(r,\ t)$ при $dr\,dt$ в выражении для ds^2 обратился в нуль и, во-вторых, коэффициент $k(r,\ t)$ был равен просто $-r^2$ [1]). Последнее означает, что радиус-вектор r определен таким образом, чтобы длина окружности с центром в начале координат была равна $2\pi r$ (элемент дуги окружности в плоскости $\theta = \pi/2$ равен $dl = r d\varphi$). Величины h и l нам будет удобно писать в экспоненциальном виде, соответственно как $-e^{\lambda}$ и $c^2 e^{\nu}$, где λ и ν — некоторые функции от r и t. Таким

[1]) Эти условия не определяют еще выбора временной координаты однозначным образом. Именно, она может еще быть подвергнута любому преобразованию вида $t = f(t')$, не содержащему r.

образом, получим для ds^2 следующее выражение:

$$ds^2 = e^{\nu}c^2dt^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta \cdot d\varphi^2) - e^{\lambda}dr^2. \qquad (97,2)$$

Подразумевая под x^0, x^1, x^2, x^3 соответственно координаты ct, r, θ, φ, мы имеем, следовательно, для отличных от нуля компонент метрического тензора выражения

$$g_{00} = e^{\nu},\ g_{11} = -e^{\lambda},\ g_{22} = -r^2,\ g_{33} = -r^2\sin^2\theta.$$

Очевидно, что

$$g^{00} = e^{-\nu},\ g^{11} = -e^{-\lambda},\ g^{22} = -r^{-2},\ g^{33} = -r^{-2}\sin^{-2}\theta.$$

С помощью этих значений легко вычислить по формуле (86,3) величины Γ^i_{kl}. Вычисление приводит к следующим выражениям (штрих означает дифференцирование по r, а точка над буквой — дифференцирование по ct):

$$\begin{aligned}
&\Gamma^1_{11} = \frac{\lambda'}{2},\quad \Gamma^0_{10} = \frac{\nu'}{2},\quad \Gamma^2_{33} = -\sin\theta\cos\theta,\\
&\Gamma^0_{11} = \frac{\dot\lambda}{2}e^{\lambda-\nu},\quad \Gamma^1_{22} = -re^{-\lambda},\quad \Gamma^1_{00} = \frac{\nu'}{2}e^{\nu-\lambda},\\
&\Gamma^2_{12} = \Gamma^3_{13} = \frac{1}{r},\quad \Gamma^3_{23} = \operatorname{ctg}\theta,\quad \Gamma^0_{00} = \frac{\dot\nu}{2},\\
&\Gamma^1_{10} = \frac{\dot\lambda}{2},\quad \Gamma^1_{33} = -r\sin^2\theta e^{-\lambda}.
\end{aligned} \qquad (97,3)$$

Все остальные компоненты Γ^i_{kl} (кроме тех, которые отличаются от написанных перестановкой индексов k и l) равны нулю.

Для составления уравнений надо вычислить по формуле (92,10) компоненты тензора R^i_k. Простые вычисления приводят в результате к следующим уравнениям:

$$\frac{8\pi k}{c^4}T^1_1 = -e^{-\lambda}\left(\frac{\nu'}{r} + \frac{1}{r^2}\right) + \frac{1}{r^2}, \qquad (97,4)$$

$$\frac{8\pi k}{c^4}T^2_2 = \frac{8\pi k}{c^4}T^3_3 = -\frac{1}{2}e^{-\lambda}\left(\nu'' + \frac{\nu'^2}{2} + \frac{\nu' - \lambda'}{r} - \frac{\nu'\lambda'}{2}\right) + \frac{1}{2}e^{-\nu}\left(\ddot\lambda + \frac{\dot\lambda^2}{2} - \frac{\dot\lambda\dot\nu}{2}\right), \qquad (97,5)$$

$$\frac{8\pi k}{c^4}T^0_0 = -e^{-\lambda}\left(\frac{1}{r^2} - \frac{\lambda'}{r}\right) + \frac{1}{r^2}, \qquad (97,6)$$

$$\frac{8\pi k}{c^4}T^1_0 = -e^{-\lambda}\frac{\dot\lambda}{r} \qquad (97,7)$$

(остальные компоненты уравнения (95,6) тождественно обращаются в нуль). Компоненты тензора энергии-импульса могут быть выражены с помощью формулы (94,9) через плотность энергии материи ε, ее давление p и радиальную скорость v.

Уравнения (97,4—7) могут быть проинтегрированы до конца в очень важном случае центрально-симметрического поля в пустоте, т. е. вне создающих его масс. Полагая тензор энергии-импульса равным нулю, получим следующие уравнения:

$$e^{-\lambda}\left(\frac{\nu'}{r}+\frac{1}{r^2}\right)-\frac{1}{r^2}=0, \qquad (97,8)$$

$$e^{-\lambda}\left(\frac{\lambda'}{r}-\frac{1}{r^2}\right)+\frac{1}{r^2}=0, \qquad (97,9)$$

$$\dot{\lambda}=0 \qquad (97,10)$$

[четвертое уравнение, т. е. уравнение (97,5), можно не выписывать, так как оно является следствием трех остальных уравнений].

Из (97,10) мы видим, что λ не зависит от времени. Далее, складывая уравнения (97,8—9), находим $\lambda'+\nu'=0$, т. е.

$$\lambda+\nu=f(t), \qquad (97,11)$$

где $f(t)$—функция только от времени. Но, выбрав интервал ds^2 в виде (97,2), мы оставили за собой еще возможность произвольного преобразования времени вида $t=f(t')$. Такое преобразование эквивалентно прибавлению к ν произвольной функции времени, и с его помощью можно всегда обратить $f(t)$ в (97,11) в нуль. Итак, не ограничивая общности, мы можем считать, что $\lambda+\nu=0$. Отметим, что центрально-симметрическое гравитационное поле в пустоте автоматически оказывается статическим.

Уравнение (97,9) легко интегрируется и дает:

$$e^{-\lambda}=e^{\nu}=1+\frac{\text{const}}{r}. \qquad (97,12)$$

Как и следовало, на бесконечности ($r\to\infty$) $e^{-\lambda}=e^{\nu}=1$, т. е. вдали от гравитирующих тел, метрика автоматически оказывается галилеевой. Постоянную const легко выразить через массу тела, потребовав, чтобы на больших расстояниях, где поле слабо, имел место закон Ньютона [1]). Именно, мы должны иметь $g_{00}=1+\frac{2\varphi}{c^2}$, где потенциал φ равен своему ньютоновскому выражению (96,4): $\varphi=-km/r$ (m—полная масса создающего поле тела). Отсюда видно, что $\text{const}=-2km/c^2$. Эта величина имеет размерность длины; ее называют *гравитационным радиусом* тела r_g:

$$r_g=\frac{2km}{c^2}. \qquad (97,13)$$

[1]) Для поля внутри сферической плоскости в центрально-симметрическом распределении вещества должно быть const = 0, так как в противном случае метрика имела бы особенность при $r=0$. Таким образом, метрика внутри такой полости автоматически оказывается галилеевой, т. е. гравитационное поле в полости отсутствует (как и в ньютоновской теории).

Таким образом, окончательно находим пространственно-временную метрику в виде:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) c^2 dt^2 - r^2 (\sin^2\theta \, d\varphi^2 + d\theta^2) - \frac{dr^2}{1 - \frac{r_g}{r}}. \quad (97,14)$$

Это решение уравнений Эйнштейна было найдено *К. Шварцшильдом* (1916). Им полностью определяется гравитационное поле в пустоте, создаваемое любым центрально-симметрическим распределением масс. Подчеркнем, что это решение справедливо не только для покоящихся, но и для движущихся масс, если только движение тоже обладает должной симметрией (скажем, центрально-симметрические пульсации). Отметим, что метрика (97,14) зависит только от полной массы гравитирующего тела, как и в аналогичной задаче ньютоновской теории.

Пространственная метрика определяется выражением для элемента пространственного расстояния:

$$dl^2 = \frac{dr^2}{1 - \frac{r_g}{r}} + r^2 (\sin^2\theta \, d\varphi^2 + d\theta^2). \quad (97,15)$$

Геометрический смысл координаты r определяется тем, что в метрике (97,15) длина окружности с центром в центре поля равна $2\pi r$. Расстояние же между двумя точками r_1 и r_2 на одном и том же радиусе дается интегралом

$$\int\limits_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{\sqrt{1 - \frac{r_g}{r}}} > r_2 - r_1. \quad (97,16)$$

Далее, мы видим, что $g_{00} \leqslant 1$. В связи с формулой (84,1) $d\tau = \sqrt{g_{00}}\, dt$, определяющей истинное время, отсюда следует, что

$$d\tau \leqslant dt. \quad (97,17)$$

Знак равенства имеет место на бесконечности, где t совпадает с истинным временем. Таким образом, на конечных расстояниях от масс происходит «замедление» времени по сравнению со временем на бесконечности.

Наконец, приведем еще приближенное выражение для ds^2 на больших расстояниях от начала координат:

$$ds^2 = ds_0^2 - \frac{2km}{c^2 r} (dr^2 + c^2 dt^2). \quad (97,18)$$

Второй член представляет собой малую поправку к галилеевской метрике ds_0^2. На больших расстояниях от создающих поле масс

всякое поле является центрально-симметрическим. Поэтому (97,18) определяет метрику на больших расстояниях от любой системы тел.

Некоторые общие соображения можно высказать и по поводу центрально-симметрического гравитационного поля внутри гравитирующих масс. Из уравнения (97,6) видно, что при $r \to 0$ λ должно тоже обращаться в нуль, по крайней мере как r^2; в противном случае правая часть уравнения обратилась бы при $r \to 0$ в бесконечность, т. е. T_0^0 имело бы в $r=0$ особую точку, что физически нелепо. Интегрируя формально уравнение (97,6) с граничным условием $\lambda|_{r=0}=0$, получим:

$$\lambda = -\ln\left(1 - \frac{8\pi k}{c^4 r}\int_0^r T_0^0 r^2\,dr\right). \qquad (97,19)$$

Поскольку в силу (94,10) $T_0^0 = e^{-\nu}T_{00} \geqslant 0$, то отсюда видно, что $\lambda \geqslant 0$, т. е.

$$e^\lambda \geqslant 1. \qquad (97,20)$$

Далее, вычитая уравнение (97,6) почленно из уравнения (97,4), получим:

$$\frac{e^{-\lambda}}{r}(\nu' + \lambda') = \frac{8\pi k}{c^4}(T_0^0 - T_1^1) = \frac{(\varepsilon + p)\left(1 + \frac{v^2}{c^2}\right)}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \geqslant 0,$$

т. е. $\nu' + \lambda' \geqslant 0$. Но при $r \to \infty$ (вдали от масс) метрика переходит в галилееву, т. е. $\nu \to 0$, $\lambda \to 0$. Поэтому из $\nu' + \lambda' \geqslant 0$ следует, что во всем пространстве

$$\nu + \lambda \leqslant 0. \qquad (97,21)$$

Поскольку $\lambda \geqslant 0$, то отсюда следует, что $\nu \leqslant 0$, т. е.

$$e^\nu \leqslant 1. \qquad (97,22)$$

Полученные неравенства показывают, что указанные выше свойства (97,16—17) пространственной метрики и хода часов в центрально-симметрическом поле в пустоте относятся в той же мере и к полю внутри гравитирующих масс.

Если гравитационное поле создается сферическим телом «радиуса» a, то при $r > a$ имеем $T_0^0 = 0$. Для точек с $r > a$ формула (97,19) поэтому дает:

$$\lambda = -\ln\left(1 - \frac{8\pi k}{c^4 r}\int_0^a T_0^0 r^2\,dr\right).$$

С другой стороны, здесь можно применить относящееся к пустоте выражение (97,14), согласно которому

$$\lambda = -\ln\left(1 - \frac{2km}{c^2 r}\right).$$

Сравнивая оба выражения, найдем формулу

$$m = \frac{4\pi}{c^2}\int_0^a T_0^0 r^2 dr, \tag{97,23}$$

определяющую полную массу тела по его тензору энергии-импульса.

Задачи

1. Определить пространственную кривизну в центрально-симметрическом гравитационном поле в пустоте.

Решение. Компоненты пространственного тензора кривизны $P_{\alpha\beta\gamma\delta}$ могут быть выражены через компоненты тензора $P_{\alpha\beta}$ (и тензора $\gamma_{\alpha\beta}$), так что достаточно вычислить только $P_{\alpha\beta}$ (см. задачу 1 § 92). Тензор $P_{\alpha\beta}$ выражается через $\gamma_{\alpha\beta}$ так же, как R_{ik} выражается через g_{ik}. Со значениями $\gamma_{\alpha\beta}$ из (97,15) получим после вычисления:

$$P_\theta^\theta = P_\varphi^\varphi = \frac{r_g}{2r^3}, \quad P_r^r = -\frac{r_g}{r^3}$$

и $P_\alpha^\beta = 0$ при $\alpha \neq \beta$. Отметим, что P_θ^θ, $P_\varphi^\varphi > 0$, $P_r^r < 0$, а $P \equiv P_\alpha^\alpha = 0$.

По формуле, полученной в задаче 1 § 92, найдем:

$$P_{r\theta r\theta} = (P_r^r + P_\theta^\theta)\,\gamma_{rr}\gamma_{\theta\theta} = -P_\varphi^\varphi\gamma_{rr}\gamma_{\theta\theta},$$

$$P_{r\varphi r\varphi} = -P_\theta^\theta\gamma_{rr}\gamma_{\varphi\varphi}, \quad P_{\theta\varphi\theta\varphi} = -P_r^r\gamma_{\theta\theta}\gamma_{\varphi\varphi}.$$

Отсюда следует (см. примечание на стр. 338), что для «плоскостей», перпендикулярных к радиусам, гауссова кривизна

$$K = \frac{P_{\theta\varphi\theta\varphi}}{\gamma_{\theta\theta}\gamma_{\varphi\varphi}} = -P_r^r > 0$$

(это значит, что для небольших треугольников, проведенных на участке «плоскости» вблизи ее пересечения с перпендикулярным к ней радиусом, сумма углов больше чем π). Для «плоскостей» же, проходящих через центр, гауссова кривизна $K < 0$; это значит, что сумма углов, проведенных в «плоскости» небольших треугольников, меньше чем π (подчеркнем, однако, что последнее свойство не относится к треугольникам, охватывающим центр,— сумма углов в таком треугольнике больше чем π).

2. Определить форму поверхности вращения, на которой геометрия была бы такой же, как на проходящей через начало координат «плоскости» в центрально-симметрическом гравитационном поле в пустоте.

Решение. Геометрия на поверхности вращения $z = z(r)$ (в цилиндрических координатах) определяется элементом длины:

$$dl^2 = dr^2 + dz^2 + r^2 d\varphi^2 = dr^2(1 + z'^2) + r^2 d\varphi^2.$$

Сравнивая с элементом длины (97,15) в «плоскости» $\theta=\pi/2$

$$dl^2=r^2d\varphi^2+\frac{dr^2}{1-\frac{r_g}{r}},$$

находим:

$$1+z'^2=\left(1-\frac{r_g}{r}\right)^{-1},$$

откуда

$$z=2\sqrt{r_g(r-r_g)}.$$

При $r=r_g$ эта функция имеет особенность — точку разветвления. Это обстоятельство связано с тем, что пространственная метрика (97,15) в противоположность пространственно-временной метрике (97,14) действительно имеет особенность при $r=r_g$.

Указанные в предыдущей задаче общие свойства геометрии на проходящих через центр «плоскостях» можно найти также и путем рассмотрения кривизны полученной здесь наглядной модели.

3. Преобразовать интервал (97,14) к координатам, в которых пространственная метрика имела бы конформно-евклидов вид (т. е. dl^2 пропорционально своему евклидову выражению).

Решение. Полагая

$$r=\rho\left(1+\frac{r_g}{4\rho}\right)^2,$$

получим из (97,14):

$$ds^2=\left[\frac{1-\frac{r_g}{4\rho}}{1+\frac{r_g}{4\rho}}\right]^2c^2dt^2-\left(1+\frac{r_g}{4\rho}\right)^4(d\rho^2+\rho^2d\theta^2+\sin^2\theta\,d\varphi^2).$$

Координаты ρ, θ, φ называют изотропными сферическими координатами; вместо них можно ввести также и изотропные декартовы координаты x, y, z. В частности, на больших расстояниях ($\rho\gg r_g$) имеем приближенно:

$$ds^2=\left(1-\frac{r_g}{r}\right)c^2dt^2-\left(1+\frac{r_g}{r}\right)(dx^2+dy^2+dz^2).$$

§ 98. Движение в центрально-симметрическом гравитационном поле

Рассмотрим движение тела в центрально-симметрическом гравитационном поле. Как и во всяком центральном поле, движение будет происходить в одной «плоскости», проходящей через начало координат; выберем эту плоскость в качестве плоскости $\theta=\pi/2$.

Для определения траектории тела (с массой m) воспользуемся уравнением Гамильтона—Якоби:

$$g^{ik}\frac{\partial S}{\partial x^i}\frac{\partial S}{\partial x^k}+m^2c^2=0.$$

С помощью g^{ik} из (97,14) находим следующее уравнение:

$$e^{-\nu}\left(\frac{\partial S}{c\partial t}\right)^2-e^{\nu}\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2-\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial S}{\partial\varphi}\right)^2-m^2c^2=0, \qquad (98,1)$$

где

$$e^{\nu}=1-\frac{r_g}{r} \qquad (98,2)$$

(m' — масса тела, создающего поле; $r_g=2km'/c^2$ — его гравитационный радиус). По общим правилам решения уравнения Гамильтона — Якоби, ищем S в виде

$$S=-\mathscr{E}_0t+M\varphi+S_r(r) \qquad (98,3)$$

с постоянными энергией $\mathscr{E}_0$ и моментом импульса M. Подставляя это в (98,1), находим уравнение

$$e^{-\nu}\frac{\mathscr{E}_0^2}{c^2}-\frac{M^2}{r^2}-e^{\nu}\left(\frac{\partial S_r}{\partial r}\right)^2=m^2c^2,$$

откуда

$$S_r=\int\sqrt{\frac{\mathscr{E}_0^2}{c^2}e^{-2\nu}-\left(m^2c^2+\frac{M^2}{r^2}\right)e^{-\nu}}\cdot dr=$$

$$=\int\left[\frac{r^2(\mathscr{E}_0^2-m^2c^4)+m^2c^4rr_g}{c^2(r-r_g)^2}-\frac{M^2}{r(r-r_g)}\right]^{1/2}dr. \qquad (98,4)$$

Траектория определяется, как известно (см. I § 47) уравнением $\partial S/\partial M=\text{const}$, откуда

$$\varphi=\int\frac{M\,dr}{r^2\sqrt{\frac{\mathscr{E}_0^2}{c^2}-\left(m^2c^2+\frac{M^2}{r^2}\right)\left(1-\frac{r_g}{r}\right)}}. \qquad (98,5)$$

Этот интеграл приводится к эллиптическому.

Для движения планет в поле тяготения Солнца релятивистская теория приводит лишь к незначительным поправкам по сравнению с теорией Ньютона, поскольку скорости планет очень малы по сравнению со скоростью света. В подынтегральном выражении в уравнении траектории (98,5) этому соответствует малость отношения r_g/r, где r_g — гравитационный радиус Солнца[1]).

Для исследования релятивистских поправок в траектории удобно исходить из выражения (98,4) радиальной части действия до его дифференцирования по M.

[1]) Для Солнца $r_g=3$ *км*; для Земли $r_g=0{,}44$ *см*.

Произведем преобразование переменной интегрирования, заменив

$$r(r-r_g)=r'^2, \quad \text{т. е. } r-\frac{r_g}{2}\approx r',$$

в результате чего второй член под корнем приобретает вид M^2/r'^2. В первом же члене производим разложение по степеням r_g/r' и получаем, с требуемой точностью:

$$S_r=\int\left[\left(2\mathscr{E}'m+\frac{\mathscr{E}'^2}{c^2}\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{r}\left(2m^2m'k+4\mathscr{E}'mr_g\right)-\frac{1}{r^2}\left(M^2-\frac{3m^2c^2r_g^2}{2}\right)\right]^{1/2}dr, \quad (98,6)$$

где мы для краткости опустили штрих у r' и ввели нерелятивистскую энергию $\mathscr{E}'$ (без энергии покоя).

Поправочные члены в коэффициентах в первых двух членах под корнем отражаются только на не представляющем особого интереса изменении связи между энергией и моментом частицы и параметрами ее ньютоновской орбиты (эллипса). Изменение же коэффициента при $1/r^2$ приводит к более существенному эффекту — к систематическому («вековому») смещению перигелия орбиты.

Поскольку траектория определяется уравнением $\varphi+\frac{\partial S_r}{\partial M}=\text{const}$, то изменение угла φ за время одного оборота планеты по орбите есть

$$\Delta\varphi=-\frac{\partial}{\partial M}\Delta S_r,$$

где ΔS_r — соответствующее изменение S_r. Разлагая S_r по степеням малой поправки в коэффициенте при $1/r^2$, получим:

$$\Delta S_r=\Delta S_r^{(0)}-\frac{3m^2c^2r_g^2}{4M}\frac{\partial\Delta S_r^{(0)}}{\partial M},$$

где $\Delta S_r^{(0)}$ соответствует движению по несмещающемуся замкнутому эллипсу. Дифференцируя это соотношение по M и учитывая, что

$$-\frac{\partial}{\partial M}\Delta S_r^{(0)}=\Delta\varphi^{(0)}=2\pi,$$

найдем:

$$\Delta\varphi=2\pi+\frac{3\pi m^2c^2r_g^2}{2M^2}=2\pi+\frac{6\pi k^2m^2m'^2}{c^2M^2}.$$

Второй член и представляет собой искомое угловое перемещение $\delta\varphi$ ньютоновского эллипса за время одного оборота, т. е. смещение перигелия орбиты. Выражая его через длину большой полуоси a и

эксцентриситет эллипса e с помощью известной формулы $M^2/km'm^2 = a(1-e^2)$, получим [1]):

$$\delta\varphi = \frac{6\pi km'}{c^2 a(1-e^2)}. \qquad (98,7)$$

Далее рассмотрим путь светового луча в центрально-симметрическом гравитационном поле. Этот путь определяется уравнением эйконала (87,9)

$$g^{ik}\frac{\partial\psi}{\partial x^i}\frac{\partial\psi}{\partial x^k} = 0,$$

отличающимся от уравнения Гамильтона—Якоби только тем, что в последнем надо положить $m = 0$. Поэтому траекторию луча можно получить непосредственно из формулы (98,5), положив в ней $m = 0$; при этом вместо энергии частицы $\mathscr{E}_0 = -\partial S/\partial t$ надо писать частоту света $\omega_0 = -\partial\psi/\partial t$. Введя также вместо постоянной M постоянную ρ, согласно $\rho = cM/\omega_0$, получим:

$$\varphi = \int \frac{dr}{r^2\sqrt{\frac{1}{\rho^2} - \frac{1}{r^2}\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)}}. \qquad (98,8)$$

При пренебрежении релятивистскими поправками ($r_g \to 0$) это уравнение дает $r = \rho/\cos\varphi$, т. е. прямую, проходящую на расстоянии ρ от начала координат. Для исследования же релятивистских поправок поступим аналогично тому, как было сделано в предыдущем случае.

Для радиальной части эйконала имеем [ср. (98,4)]:

$$\psi_r(r) = \frac{\omega_0}{c}\int\sqrt{\frac{r^2}{(r-r_g)^2} - \frac{\rho^2}{r(r-r_g)}}\,dr.$$

Производя такие же преобразования, которые служили для перехода от (98,4) к (98,6), получим:

$$\psi_r(r) = \frac{\omega_0}{c}\int\sqrt{1 + \frac{2r_g}{r} - \frac{\rho^2}{r^2}}\,dr.$$

Разлагая теперь подынтегральное выражение по степеням r_g/r, имеем:

$$\psi_r = \psi_r^{(0)} + \frac{r_g\omega_0}{c}\int\frac{dr}{\sqrt{r^2-\rho^2}} = \psi_r^{(0)} + \frac{r_g\omega_0}{c}\operatorname{Arch}\frac{r}{\rho},$$

где $\psi_r^{(0)}$ отвечает классическому прямолинейному лучу.

Полное изменение ψ_r при распространении луча от некоторого очень большого расстояния R до ближайшей к центру точки $r = \rho$

---

[1]) Численные значения смещения, определяемого формулой (98,7), для Меркурия и Земли равны соответственно 43,0″ и 3,8″ в сто лет. Астрономические измерения дают значения 43,1″ ± 0,4″ и 5,0″ ± 1,2″ в прекрасном согласии с теорией.

и затем снова на расстояние R есть

$$\Delta\psi_r = \Delta\psi_r^{(0)} + 2\frac{r_g\omega_0}{c}\operatorname{Arch}\frac{R}{\rho}.$$

Соответствующее же изменение полярного угла φ вдоль луча получается дифференцированием по $M = \rho\omega_0/c$:

$$\Delta\varphi = -\frac{\partial\Delta\psi_r}{\partial M} = -\frac{\partial\Delta\psi_r^{(0)}}{\partial M} + \frac{2r_gR}{\rho\sqrt{R^2-\rho^2}}.$$

Наконец, переходя к пределу $R \to \infty$ и замечая, что прямолинейному лучу соответствует $\Delta\varphi = \pi$, получим:

$$\Delta\varphi = \pi + \frac{2r_g}{\rho}.$$

Это значит, что под влиянием поля тяготения световой луч искривляется: его траектория представляет собой кривую, обращенную вогнутостью к центру (луч «притягивается» к центру), так что угол между ее двумя асимптотами отличается от π на

$$\delta\varphi = \frac{2r_g}{\rho} = \frac{4km'}{c^2\rho}; \qquad (98,9)$$

другими словами, луч света, проходящий на расстоянии ρ от центра поля, отклоняется на угол $\delta\varphi$ [1]).

§ 99. Синхронная система отсчета

Как мы знаем из § 84, условие, допускающее синхронизацию хода часов в различных точках пространства, заключается в равенстве нулю компонент $g_{0\alpha}$ метрического тензора. Если, кроме того, $g_{00} = 1$, то временная координата $x^0 = t$ представляет собой собственное время в каждой точке пространства [2]). Систему отсчета, удовлетворяющую условиям

$$g_{00} = 1, \quad g_{0\alpha} = 0, \qquad (99,1)$$

назовем *синхронной*. Элемент интервала в такой системе дается выражением

$$ds^2 = dt^2 - \gamma_{\alpha\beta}\,dx^\alpha\,dx^\beta, \qquad (92,2)$$

причем компоненты тензора пространственной метрики совпадают (с точностью до знака) с компонентами $g_{\alpha\beta}$:

$$\gamma_{\alpha\beta} = -g_{\alpha\beta}. \qquad (99,3)$$

---

[1]) Для луча, проходящего мимо края Солнца, $\delta\varphi = 1{,}75''$.

[2]) В этом параграфе полагаем $c = 1$.

В синхронной системе отсчета линии времени являются геодезическими линиями в 4-пространстве. Действительно, 4-вектор $u^i = dx^i/ds$ касательной к мировой линии x^1, x^2, $x^3 = \text{const}$ имеет составляющие $u^\alpha = 0$, $u^0 = 1$ и автоматически удовлетворяет геодезическим уравнениям:

$$\frac{du^i}{ds} + \Gamma^i_{kl} u^k u^l = \Gamma^i_{00} = 0,$$

поскольку при условиях (99,1) символы Кристоффеля Γ^α_{00}, Γ^0_{00} равны нулю тождественно.

Легко также видеть, что эти линии нормальны к гиперповерхностям $t = \text{const}$. Действительно, 4-вектор нормали к такой гиперповерхности $n_i = \partial t/\partial x^i$ имеет ковариантные составляющие $n_\alpha = 0$, $n_0 = 1$. Соответствующие контравариантные компоненты при условиях (99,1) тоже равны $n^\alpha = 0$, $n^0 = 1$, т. е. совпадают с компонентами 4-вектора u^i касательных к линиям времени.

Обратно, этими свойствами можно воспользоваться для геометрического построения синхронной системы отсчета в любом пространстве-времени. Для этого выбираем в качестве исходной какую-либо пространственноподобную гиперповерхность, т. е. гиперповерхность, нормаль к которой в каждой ее точке имеет времени́бе направление (лежит внутри светового конуса с вершиной в этой же точке); все элементы интервала на такой гиперповерхности пространственноподобны. Затем строим семейство нормальных к этой гиперповерхности геодезических линий. Если теперь выбрать эти линии в качестве координатных линий времени, причем определить временну́ю координату t как длину s геодезической линии, отсчитываемую от исходной гиперповерхности, мы получим синхронную систему отсчета.

Ясно, что такое построение, а тем самым и выбор синхронной системы отсчета в принципе возможны всегда.

Более того, этот выбор еще и не однозначен. Метрика вида (99,2) допускает любые преобразования пространственных координат, не затрагивающие времени, и, кроме того, преобразование, соответствующее произволу в выборе исходной гиперповерхности в указанном геометрическом построении.

Аналитически преобразование к синхронной системе отсчета можно, в принципе, произвести при помощи уравнения Гамильтона — Якоби. Основание этого способа состоит в том, что траектории частицы в гравитационном поле как раз и являются геодезическими линиями.

Уравнение Гамильтона — Якоби для частицы (массу которой положим равной единице) в гравитационном поле есть

$$g^{ik} \frac{\partial \tau}{\partial x^i} \frac{\partial \tau}{\partial x^k} = 1 \qquad (99,4)$$

(мы обозначили здесь действие посредством τ). Его полный интеграл имеет вид

$$\tau = f(\xi^\alpha, x^i) + A(\xi^\alpha), \tag{99,5}$$

где f — функция четырех координат x^i и трех параметров ξ^α; четвертую постоянную A рассматриваем как произвольную функцию трех ξ^α. При таком представлении τ уравнения траектории частицы можно получить приравниванием производных $\partial\tau/\partial\xi^\alpha$ нулю, т. е.

$$\frac{\partial f}{\partial x^\alpha} = -\frac{\partial A}{\partial \xi^\alpha}. \tag{99,6}$$

Для каждых заданных значений параметров ξ^α правые стороны уравнений (99,6) имеют определенные постоянные значения и определяемая этими уравнениями мировая линия является одной из возможных траекторий частицы. Выбрав постоянные вдоль траекторий величины ξ^α в качестве новых пространственных координат, а величину τ — в качестве новой временно́й координаты, мы и получим синхронную систему отсчета, причем уравнениями (99,5—6) определится искомое преобразование от старых координат к новым. Действительно, геодезичность линий времени при таком преобразовании обеспечивается автоматически, причем эти линии будут нормальны к гиперповерхностям $\tau = \text{const}$. Последнее очевидно из механической аналогии: 4-вектор нормали к гиперповерхности, $-\partial\tau/\partial x^i$, совпадает в механике с 4-импульсом частицы и потому совпадает по направлению с ее 4-скоростью u^i, т. е. с 4-вектором касательной к траектории. Наконец, выполнение условия $g_{00} = 1$ очевидно из того, что производная $-d\tau/ds$ действия вдоль траектории есть масса частицы, которую мы приняли равной 1; поэтому $|d\tau/ds| = 1$.

Напишем уравнения Эйнштейна в синхронной системе отсчета, отделив в них операции пространственных и временного дифференцирований.

Введем обозначение

$$\varkappa_{\alpha\beta} = \frac{\partial \gamma_{\alpha\beta}}{\partial t} \tag{99,7}$$

для производных по времени от трехмерного метрического тензора; эти величины сами составляют трехмерный тензор. Все операции перемещения индексов у трехмерного тензора $\varkappa_{\alpha\beta}$ и его ковариантные дифференцирования производятся в дальнейшем в трехмерном пространстве с метрикой $\gamma_{\alpha\beta}$ [1]). Отметим, что сумма $\varkappa_\alpha^\alpha$ есть

[1]) Но это не относится, конечно, к операциям перемещения индексов у пространственных компонент 4-тензоров R_{ik}, T_{ik} (ср. примечание на стр. 323). Так, T_α^β надо понимать по-прежнему как $g^{\beta\gamma}T_{\gamma\alpha} + g^{\beta 0}T_{0\alpha}$, что сводится в данном случае к $g^{\beta\gamma}T_{\gamma\alpha}$ и отличается знаком от $\gamma^{\beta\gamma}T_{\gamma\alpha}$.

логарифмическая производная определителя $\gamma \equiv |\gamma_{\alpha\beta}| = -g$:

$$\varkappa_\alpha^\alpha = \gamma^{\alpha\beta} \frac{\partial \gamma_{\alpha\beta}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \ln \gamma. \qquad (99,8)$$

Для символов Кристоффеля находим выражения:

$$\Gamma_{00}^0 = \Gamma_{00}^\alpha = \Gamma_{0\alpha}^0 = 0,$$

$$\Gamma_{\alpha\beta}^0 = \frac{1}{2} \varkappa_{\alpha\beta}, \quad \Gamma_{0\beta}^\alpha = \frac{1}{2} \varkappa_\beta^\alpha, \quad \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha = \lambda_{\beta\gamma}^\alpha, \qquad (99,9)$$

где $\lambda_{\beta\gamma}^\alpha$ — трехмерные символы Кристоффеля, образованные из тензора $\gamma_{\alpha\beta}$. Вычисление по формуле (92,10) приводит к следующим выражениям для компонент R_{ik}:

$$R_{00} = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \varkappa_\alpha^\alpha - \frac{1}{4} \varkappa_\alpha^\beta \varkappa_\beta^\alpha, \quad R_{0\alpha} = \frac{1}{2} \left(\varkappa_{\alpha;\,\beta}^\beta - \varkappa_{\beta;\,\alpha}^\beta\right),$$

$$R_{\alpha\beta} = P_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \varkappa_{\alpha\beta} + \frac{1}{4} \left(\varkappa_{\alpha\beta} \varkappa_\gamma^\gamma - 2\varkappa_\alpha^\gamma \varkappa_{\beta\gamma}\right). \qquad (99,10)$$

Здесь $P_{\alpha\beta}$ — трехмерный тензор Риччи, построенный из $\gamma_{\alpha\beta}$ так же, как P_{ik} строится из g_{ik}; поднятие его индексов производится ниже тоже с помощью трехмерной метрики $\gamma_{\alpha\beta}$.

Уравнения Эйнштейна напишем в смешанных компонентах:

$$R_0^0 = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \varkappa_\alpha^\alpha - \frac{1}{4} \varkappa_\alpha^\beta \varkappa_\beta^\alpha = 8\pi k \left(T_0^0 - \frac{1}{2} T\right), \qquad (99,11)$$

$$R_\alpha^0 = \frac{1}{2} \left(\varkappa_{\alpha;\,\beta}^\beta - \varkappa_{\beta;\,\alpha}^\beta\right) = 8\pi k T_\alpha^0, \qquad (99,12)$$

$$R_\alpha^\beta = -P_\alpha^\beta - \frac{1}{2\sqrt{\gamma}} \frac{\partial}{\partial t} \left(\sqrt{\gamma}\, \varkappa_\alpha^\beta\right) = 8\pi k \left(T_\alpha^\beta - \frac{1}{2} \delta_\alpha^\beta T\right). \qquad (99,13)$$

Характерным свойством синхронных систем отсчета является их нестационарность: в такой системе гравитационное поле не может быть постоянным. Действительно, в постоянном поле было бы $\varkappa_{\alpha\beta} = 0$. Между тем при наличии материи обращение всех $\varkappa_{\alpha\beta}$ в нуль во всяком случае противоречило бы уравнению (99,11) (с отличной от нуля правой частью). В пустом же пространстве мы нашли бы из (99,13), что все $P_{\alpha\beta}$, а тем самым и все компоненты трехмерного тензора кривизны $P_{\alpha\beta\gamma\delta}$ обращаются в нуль, т. е. поле вообще отсутствует (в синхронной системе при евклидовой пространственной метрике пространство-время — плоское).

В то же время заполняющая пространство материя не может, вообще говоря, покоиться относительно синхронной системы отсчета. Это очевидно из того, что частицы материи, в которой действуют силы давления, движутся, вообще говоря, не по геодезическим мировым линиям; мировая же линия покоящейся частицы есть линия времени и в синхронной системе является геодезической. Исключение представляет лишь случай «пылевидной» материи ($p = 0$). Не

взаимодействуя друг с другом, ее частицы движутся по геодезическим мировым линиям; в этом случае, следовательно, условие синхронности системы отсчета не противоречит условию ее «сопутствия» материи [1]).

Из уравнения (99,11) можно показать, что определитель $-g=\gamma$ метрического тензора в синхронной системе отсчета непременно должен обратиться в нуль в течение конечного времени.

Для этого заметим, что выражение в правой стороне этого уравнения при любом распределении материи положительно. Действительно, в синхронной системе отсчета для тензора энергии-импульса (94,9) имеем:

$$T_0^0-\frac{1}{2}T=\frac{1}{2}(\varepsilon+3p)+\frac{(p+\varepsilon)v^2}{1-v^2}$$

[компоненты 4-скорости — из (88,14)]; положительность этой величины очевидна. То же самое справедливо и для тензора энергии-импульса электромагнитного поля ($T=0$, T_0^0 — положительная плотность энергии поля). Таким образом, имеем из (99,11):

$$-R_0^0=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\varkappa_\alpha^\alpha+\frac{1}{4}\varkappa_\alpha^\beta\varkappa_\beta^\alpha\leqslant 0 \qquad (99,14)$$

(знак равенства достигается в пустом пространстве).

В силу алгебраического неравенства [2])

$$\varkappa_\beta^\alpha\varkappa_\alpha^\beta\geqslant\frac{1}{3}(\varkappa_\alpha^\alpha)^2$$

можно переписать (99,14) в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}\varkappa_\alpha^\alpha+\frac{1}{6}(\varkappa_\alpha^\alpha)^2\leqslant 0$$

или

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{\varkappa_\alpha^\alpha}\geqslant\frac{1}{6}. \qquad (99,15)$$

---

[1]) Но и в этом случае для возможности выбора «синхронно-сопутствующей» системы отсчета необходимо еще, чтобы материя двигалась «без вращения». В сопутствующей системе контравариантные компоненты 4-скорости $u^0=1$, $u^\alpha=0$. Если система отсчета также и синхронна, то и ковариантные компоненты $u_0=1$, $u_\alpha=0$, а потому ее 4-ротор

$$u_{i;k}-u_{k;i}\equiv\frac{\partial u_i}{\partial x^k}-\frac{\partial u_k}{\partial x^i}=0.$$

Но это тензорное равенство должно быть тогда справедливым и в любой другой системе отсчета. Так, в синхронной, но не сопутствующей системе получим отсюда условие $\operatorname{rot}\mathbf{v}=0$ для трехмерной скорости $\mathbf{v}$.

[2]) В его справедливости легко убедиться, приведя тензор $\varkappa_\alpha^\beta$ (в любой заданный момент времени) к диагональному виду.

Пусть, например, в некоторый момент времени $\varkappa_\alpha^\alpha > 0$. Тогда при уменьшении t величина $1/\varkappa_\alpha^\alpha$ убывает, имея всегда конечную (не равную нулю) производную, и потому должна обратиться в нуль (с положительной стороны) в течение конечного времени. Другими словами, $\varkappa_\alpha^\alpha$ обращается в $+\infty$, а поскольку $\varkappa_\alpha^\alpha = \partial \ln \gamma / \partial t$, то это значит, что определитель γ обращается в нуль (причем, согласно неравенству (99,15), не быстрее чем t^6). Если же в начальный момент $\varkappa_\alpha^\alpha < 0$, то то же самое получится для возрастающего времени.

Этот результат, однако, отнюдь не доказывает неизбежности существования истинной, физической особенности в метрике. Физической особенностью является лишь такая, которая свойственна пространству-времени как таковому и не связана с характером выбранной системы отсчета (такая особенность должна характеризоваться обращением в бесконечность скалярных величин — плотности материи, инвариантов тензора кривизны). Особенность же в синхронной системе отсчета, неизбежность которой мы доказали, в общем случае в действительности является фиктивной, исчезающей при переходе к другой (не синхронной) системе отсчета. Ее происхождение ясно из простых геометрических соображений.

Мы видели выше, что построение синхронной системы сводится к построению семейства геодезических линий, ортогональных к какой-либо пространственноподобной гиперповерхности. Но геодезические линии произвольного семейства, вообще говоря, пересекаются друг с другом на некоторых огибающих гиперповерхностях — четырехмерных аналогах каустических поверхностей геометрической оптики. Пересечение же координатных линий дает, разумеется, особенность в метрике в данной координатной системе. Таким образом, имеется геометрическая причина для появления особенности, связанной со специфическими свойствами синхронной системы и потому не имеющей физического характера. Произвольная метрика 4-пространства допускает, вообще говоря, существование также и непересекающихся семейств времениподобных геодезических линий. Неизбежность же обращения в нуль определителя γ в синхронной системе означает, что допускаемые уравнениями поля свойства кривизны реального (не плоского) пространства-времени (выражаемые неравенством $R_0^0 \geqslant 0$) исключают возможность существования таких семейств, так что линии времени во всякой синхронной системе отсчета непременно пересекаются друг с другом [1]).

[1]) Аналитическое построение метрики вблизи фиктивной особенности в синхронной системе отсчета см. *Е. М. Лифшиц, В. В. Судаков, И. М. Халатников*, ЖЭТФ 40, 1847 (1961).

Общий характер этой метрики ясен из геометрических соображений. Поскольку каустическая гиперповерхность во всяком случае заключает в себе времениподобные интервалы (элементы длины геодезических линий

Мы упоминали выше о том, что для пылевидной материи синхронная система отсчета может быть в то же время и сопутствующей. В таком случае плотность материи обратится на каустике в бесконечность, — просто как результат пересечения мировых траекторий частиц, совпадающих с линиями времени. Ясно, однако, что эта особенность плотности устранится уже введением сколь угодно малого, но отличного от нуля давления материи и в этом смысле тоже не имеет физического характера.

Задачи

1. Найти вид разложения решения уравнений гравитационного поля в пустоте вблизи не особой, регулярной точки по времени.

Решение. Выбрав условно рассматриваемую временную точку в качестве начала отсчета времени, будем искать $\gamma_{\alpha\beta}$ в виде:

$$\gamma_{\alpha\beta}=a_{\alpha\beta}+tb_{\alpha\beta}+t^2c_{\alpha\beta}+\ldots, \tag{1}$$

где $a_{\alpha\beta}$, $b_{\alpha\beta}$, $c_{\alpha\beta}$ — функции пространственных координат. В том же приближении обратный тензор:

$$\gamma^{\alpha\beta}=a^{\alpha\beta}-tb^{\alpha\beta}+t^2\left(b^{\alpha\gamma}b_{\gamma}^{\beta}-c^{\alpha\beta}\right),$$

где $a^{\alpha\beta}$ — тензор, обратный $a_{\alpha\beta}$, а поднятие индексов у остальных тензоров производится с помощью $a^{\alpha\beta}$. Далее имеем:

$$\varkappa_{\alpha\beta}=b_{\alpha\beta}+2tc_{\alpha\beta},\quad \varkappa_{\alpha}^{\beta}=b_{\alpha}^{\beta}+t\left(2c_{\alpha}^{\beta}-b_{\alpha\gamma}b^{\beta\gamma}\right).$$

Уравнения Эйнштейна (99,11—13) приводят к следующим соотношениям:

$$R_0^0=-c+\frac{1}{4}b_{\alpha}^{\beta}b_{\beta}^{\alpha}=0, \tag{2}$$

$$R_{\alpha}^0=\frac{1}{2}\left(b_{\alpha;\beta}^{\beta}-b_{;\alpha}\right)+t\left[-c_{;\alpha}+\frac{3}{8}\left(b_{\beta}^{\gamma}b_{\gamma}^{\beta}\right)_{;\alpha}+c_{\alpha;\beta}^{\beta}+\frac{1}{4}b_{\alpha}^{\beta}b_{;\beta}-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{2}\left(b_{\alpha}^{\gamma}b_{\gamma}^{\beta}\right)_{;\beta}\right]=0, \tag{3}$$

$$R_{\alpha}^{\beta}=-P_{\alpha}^{\beta}-\frac{1}{4}b_{\alpha}^{\beta}b+\frac{1}{2}b_{\alpha}^{\gamma}b_{\gamma}^{\beta}-c_{\alpha}^{\beta}=0 \tag{4}$$

($b\equiv b_{\alpha}^{\alpha}$, $c\equiv c_{\alpha}^{\alpha}$). Здесь операции ковариантного дифференцирования производятся в трехмерном пространстве с метрикой $a_{\alpha\beta}$; по этой же метрике определяется тензор $P_{\alpha\beta}$.

времени в точках их касания с каустикой), она не является пространственноподобной. Далее, на каустике обращается в нуль одно из главных значений метрического тензора $\gamma_{\alpha\beta}$ соответственно тому, что обращается в нуль расстояние (δ) между двумя соседними геодезическими, пересекающимися друг с другом в точке их касания с каустикой. Обращение δ в нуль происходит пропорционально первой степени расстояния (l) до точки пересечения. Поэтому главное значение метрического тензора, а с ним и определитель γ обращаются в нуль как l^2.

Из (4) коэффициенты $c_{\alpha\beta}$ полностью определяются по коэффициентам $a_{\alpha\beta}$ и $b_{\alpha\beta}$. После этого (2) дает соотношение

$$P+\frac{1}{4}b^2-\frac{1}{4}b_\alpha^\beta b_\beta^\alpha=0. \tag{5}$$

Из членов нулевого порядка в (3) имеем:

$$b^\beta_{\alpha;\beta}=b_{;\alpha}. \tag{6}$$

Члены же $\sim t$ в этом уравнении при использовании (5) и (6) $\left[\text{и тождества } P^\beta_{\alpha;\beta}=\frac{1}{2}P_{;\alpha};\ \text{ср. } (92,13)\right]$ обращаются в нуль тождественно.

Таким образом, 12 величин $a_{\alpha\beta}$, $b_{\alpha\beta}$ связаны друг с другом одним соотношением (5) и тремя соотношениями (6), так что остается восемь произвольных функций трех пространственных координат. Из них три связаны с возможностью произвольных преобразований трех пространственных координат и одна — с произволом в выборе исходной гиперповерхности при построении синхронной системы отсчета. Остается, как и следовало (см. конец § 95), четыре «физически различные» произвольные функции.

2. Вычислить компоненты тензора кривизны R_{iklm} в синхронной системе отсчета.

Решение. При помощи символов Кристоффеля (99,9) получим по формуле (92,4):

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta}=-P_{\alpha\beta\gamma\delta}+\frac{1}{4}(\varkappa_{\alpha\delta}\varkappa_{\beta\gamma}-\varkappa_{\alpha\gamma}\varkappa_{\beta\delta}),$$

$$R_{0\alpha\beta\gamma}=\frac{1}{2}(\varkappa_{\alpha\gamma;\,\beta}-\varkappa_{\alpha\beta;\,\gamma}),$$

$$R_{0\alpha0\beta}=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\varkappa_{\alpha\beta}-\frac{1}{4}\varkappa_{\alpha\gamma}\varkappa_\beta^\gamma,$$

где $P_{\alpha\beta\gamma\delta}$ — трехмерный тензор кривизны, соответствующий трехмерной пространственной метрике $\gamma_{\alpha\beta}$.

3. Найти общий вид бесконечно малого преобразования, не нарушающего синхронности системы отсчета.

Решение. Преобразование имеет вид:

$$t\longrightarrow t+\varphi(x^1,\ x^2,\ x^3),\quad x^\alpha\longrightarrow x^\alpha+\xi^\alpha(x^1,\ x^2,\ x^3,\ t),$$

где φ, ξ^α — малые величины. Соблюдение условия $g_{00}=1$ обеспечивается независимостью φ от t, а для соблюдения условия $g_{0\alpha}=0$ должны выполняться уравнения

$$\gamma_{\alpha\beta}\frac{\partial\xi^\beta}{\partial t}=\frac{\partial\varphi}{\partial x^\alpha},$$

откуда

$$\xi^\alpha=\frac{\partial\varphi}{\partial x^\beta}\int\gamma^{\alpha\beta}\,dt+f^\alpha(x^1,\ x^2,\ x^3), \tag{1}$$

где f^α — снова малые величины (образующие трехмерный вектор $\mathbf{f}$). При этом пространственный метрический тензор $\gamma_{\alpha\beta}$ заменяется на

$$\gamma_{\alpha\beta}\longrightarrow\gamma_{\alpha\beta}+\xi_{\alpha;\,\beta}+\xi_{\beta;\,\alpha}-\varphi\varkappa_{\alpha\beta} \tag{2}$$

[в чем легко убедиться с помощью формулы (94,3)].

Преобразование содержит, как и следовало, четыре произвольные (малые) функции пространственных координат φ, f^α.

§ 100. Гравитационный коллапс

В шварцшильдовской метрике (97,14) g_{00} обращается в нуль, а g_{11} — в бесконечность при $r=r_g$ (на «шварцшильдовской сфере»). Это обстоятельство могло бы дать основания к заключению о наличии особенности пространственно-временной метрики и затем к заключению о невозможности существования тел с «радиусом» (при заданной массе), меньшим гравитационного радиуса. В действительности, однако, такие заключения были бы неправильными. На это указывает уже то обстоятельство, что определитель $g=-r^4\sin^2\theta$ никакой особенности при $r=r_g$ не имеет, так что условие $g<0$ (82,3) не нарушается. Мы увидим, что фактически мы имеем дело лишь с невозможностью осуществления при $r<r_g$ соответствующей системы отсчета.

Для выяснения истинного характера пространственно-временной метрики в этой области[1]) произведем преобразование координат вида:

$$c\tau=\pm ct\pm\int\frac{f(r)\,dr}{1-\frac{r_g}{r}},\quad R=ct+\int\frac{dr}{\left(1-\frac{r_g}{r}\right)f(r)}. \qquad (100,1)$$

Тогда

$$ds^2=\frac{1-\frac{r_g}{r}}{1-f^2}\left(d\tau^2-f^2\,dR^2\right)-r^2\left(d\theta^2+\sin^2\theta\,d\varphi^2\right).$$

Мы устраним особенность при $r=r_g$, выбрав $f(r)$ так, чтобы было $f(r_g)=1$. Если положить $f(r)=\sqrt{r_g/r}$, то новая система координат будет также и синхронной ($g_{\tau\tau}=1$). Выбрав сначала для определенности верхние знаки в (100,1), будем иметь:

$$R-c\tau=\int\frac{(1-f^2)\,dr}{\left(1-\frac{r_g}{r}\right)f}=\int\sqrt{\frac{r}{r_g}}\,dr=\frac{2}{3}\frac{r^{3/2}}{r_g^{1/2}},$$

или

$$r=\left[\frac{3}{2}(R-c\tau)\right]^{2/3}r_g^{1/3} \qquad (100,2)$$

(постоянную интегрирования, зависящую от начала отсчета времени τ, полагаем равной нулю). Элемент интервала:

$$ds^2=c^2\,d\tau^2-\frac{dR^2}{\left[\frac{3}{2r_g}(R-c\tau)\right]^{2/3}}-\left[\frac{3}{2}(R-c\tau)\right]^{4/3}r_g^{2/3}\left(d\theta^2+\sin^2\theta\,d\varphi^2\right). \qquad (100,3)$$

---

[1]) Это было сделано впервые *Д. Финкельштейном* (1958) с помощью другого преобразования. Конкретная метрика (100,3) была найдена по другому поводу *Леметром* (1938), а в данной связи *Ю. Рыловым* (1961).

В этих координатах особенность на шварцшильдовской сфере [которой соответствует здесь равенство $\frac{3}{2}(R-c\tau)=r_g$] отсутствует.

Координата R является везде пространственной, а τ — временной. Метрика (100,3) нестационарна. Как во всякой синхронной системе отсчета, линии времени в ней являются геодезическими линиями. Другими словами, покоящиеся относительно системы отсчета «пробные» частицы — это частицы, свободно движущиеся в данном поле.

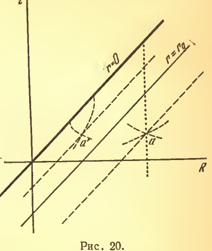


Рис. 20.

Заданным значениям r отвечают мировые линии $R-c\tau=\text{const}$ (наклонные прямые линии на диаграмме рис. 20). Мировые же линии частиц, покоящихся относительно системы отсчета, на этой диаграмме изображаются вертикальными прямыми; передвигаясь вдоль них, частицы за конечный интервал собственного времени «падают» в центр поля ($r=0$), представляющий собой точку истинной особенности метрики.

Рассмотрим распространение радиальных световых сигналов. Уравнение $ds^2=0$ (при θ, $\varphi=\text{const}$) дает для производной $d\tau/dR$ вдоль луча:

$$c\frac{d\tau}{dR}=\pm\frac{1}{\left[\frac{3}{2r_g}(R-c\tau)\right]^{1/3}}=\pm\sqrt{\frac{r_g}{r}}, \qquad (100,4)$$

два знака отвечают двум границам светового «конуса» с вершиной в заданной мировой точке. При $r>r_g$ (точка a на рис. 20) наклон этих границ $|c d\tau/dR|<1$, так что прямая $r=\text{const}$ (вдоль которой $c d\tau/dR=1$) попадает внутрь конуса. В области же $r<r_g$ (точка a') имеем $|c d\tau/dR|>1$, так что прямая $r=\text{const}$ — мировая линия неподвижной (относительно центра поля) частицы — лежит вне конуса. Обе границы конуса на конечном расстоянии пересекают линию $r=0$, подходя к ней вертикально. Поскольку никакие причинно связанные события не могут лежать на мировой линии вне светового конуса, отсюда следует, что в области $r<r_g$ никакие частицы не могут быть неподвижными. Все вообще взаимодействия и сигналы распространяются здесь по направлению к центру, достигая его за конечный промежуток времени τ.

Аналогичным образом, выбрав в преобразовании (100,1) нижние знаки, мы получили бы «расширяющуюся» систему отсчета с метрикой, отличающейся от (100,3) изменением знака перед τ. Она отвечает пространству-времени, в котором (в области $r < r_g$) попрежнему невозможен покой, но распространение всех сигналов происходит в направлении от центра.

Изложенные результаты можно применить к вопросу о поведении массивных тел в общей теории относительности[1]).

Исследование релятивистских условий равновесия сферического тела показывает, что для тела достаточно большой массы равновесного статического состояния может не существовать[2]). Заранее очевидно, что такое тело должно неограниченно сжиматься (так называемый *гравитационный коллапс*)[3]).

Вне связанной с телом, галилеевой на бесконечности системе отсчета [метрика (97,14)] радиус центрального тела не может быть меньше r_g. Это значит, что по часам t удаленного наблюдателя радиус сжимающегося тела лишь асимптотически при $t \to \infty$ стремится к гравитационному радиусу. Легко выяснить предельный закон этого приближения.

Частица на поверхности сжимающегося тела находится все время в поле тяготения постоянной массы m — полной массы тела. При $r \to r_g$ силы тяготения становятся очень большими; плотность же тела (а с нею и давление) остается конечной. Пренебрегая на этом основании силами давления, мы сведем определение зависимости $r = r(t)$ радиуса тела от времени к рассмотрению свободного падения пробной частицы в поле массы m.

Зависимость $r(t)$ для падения в шварцшильдовом поле можно найти (в методе Гамильтона-Якоби) из равенства $\partial S/\partial \mathscr{E}_0 = \text{const}$ с действием S из (98,3—4), причем для чисто радиального движения момент $M = 0$. Таким образом, получим:

$$ct = \frac{\mathscr{E}}{mc^2} \int \frac{dr}{\left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \sqrt{\left(\frac{\mathscr{E}}{mc^2}\right)^2 - 1 + \frac{r_g}{r}}} \tag{100,5}$$

(индекс у $\mathscr{E}_0$ для краткости опускаем). Этот интеграл расходится при $r \to r_g$ как $r_g \ln(r - r_g)$. Отсюда асимптотический закон приближения r к t:

$$r - r_g = \text{const}\, e^{-\frac{ct}{r_g}}. \tag{100,6}$$

[1]) Предостережем от применения к элементарным частицам: вся излагаемая в этой книге теория теряет свою применимость уже для размеров ($\sim \hbar/mc$), в огромное ($\sim 10^{40}$) число раз превышающих km/c^2.

[2]) См. «Статистическая физика», § 111.

[3]) Основные свойства этого явления были впервые выяснены *Оппенгеймером* и *Снайдером* (1939).

Хотя скорость наблюдаемого извне сжатия асимптотически стремится к нулю, скорость v падающих частиц, измеренная в их собственном времени, напротив, возрастает, стремясь к скорости света. Действительно, согласно определению (88,10):

$$v^2 = v_\alpha v^\alpha = \frac{g_{11}}{g_{00}} \left(\frac{dr}{dt}\right)^2.$$

Взяв g_{11} и g_{00} из (97,14), а dr/dt из (100,5), найдем, что $v^2 \to c^2$.

Приближение к гравитационному радиусу, требующее бесконечного времени по часам внешнего наблюдателя, занимает лишь конечный интервал собственного времени (время в сопутствующей телу системе отсчета). Это ясно уже из изложенного выше общего анализа, но в этом можно убедиться и непосредственно, вычислив собственное время τ как инвариантный интеграл $\frac{1}{c}\int ds$. Производя вычисление в шварцшильдовой системе отсчета и взяв для падающей частицы dr/dt из (100,5), получим:

$$c\tau = \int \sqrt{\left(\frac{dt}{dr}\right)^2 \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) - \frac{1}{1 - \frac{r_g}{r}}}\, dr = \int \frac{dr}{\sqrt{\frac{r_g}{r} + 1 + \left(\frac{\mathscr{E}}{mc^2}\right)^2}}.$$

Этот интеграл сходится при $r \to r_g$.

Достигнув (по собственному времени) гравитационного радиуса, тело будет продолжать сжиматься, причем все его частицы достигнут центра за конечное собственное время. Этот процесс, однако, не наблюдаем из внешней системы отсчета; мы видели, что из-под шварцшильдовской сферы не выходят (в «сжимающейся» системе отсчета) никакие сигналы.

По отношению ко внешнему наблюдателю сжатие к гравитационному радиусу сопровождается «самозамыканием» тела. Время распространения посылаемых с тела сигналов стремится к бесконечности: для светового сигнала $cdt = dr/(1 - r_g/r)$ и интеграл

$$c\tau = \int \frac{dr}{1 - r_g/r}$$

[как и интеграл (100,5)] расходится при $r \to r_g$. Интервалы собственного времени на поверхности тела сокращены по отношению к интервалам времени t удаленного наблюдателя в отношении $1 - r_g/r$; при $r \to r_g$, следовательно, все процессы на теле по отношению ко внешнему наблюдателю «застывают». Такое «застывшее» тело взаимодействует с окружающими телами лишь своим статическим гравитационным полем.

Вопрос о гравитационном коллапсе несферических тел в настоящее время еще в значительной степени не выяснен. Можно, по-

видимому, утверждать, что при малых отклонениях от сферичности коллапс приводит (по отношению к системе внешнего наблюдателя) к такому же состоянию «застывшего» тела, а в сопутствующей системе отсчета — к уходу под шварцшильдовскую сферу; дальнейшая судьба тела в сопутствующей системе, однако, не ясна [1]).

В заключение сделаем еще одно замечание методического характера. Мы видели, что для центрального поля в пустоте инерциальная на бесконечности «система внешнего наблюдателя» не полна: в ней нет места для мировых линий частиц, движущихся внутри шварцшильдовской сферы. Метрика же (100,3) применима также и внутри шварцшильдовской сферы, однако и эта система отсчета в известном смысле не полна. Действительно, рассмотрим в этой системе частицу, совершающую радиальное движение по направлению от центра. Ее мировая линия при $\tau \to \infty$ уходит в бесконечность, а при $\tau \to -\infty$ она должна асимптотически приближаться к $r = r_g$, поскольку в данной метрике внутри шварцшильдовской сферы движение может происходить лишь по направлению к центру. С другой стороны, продвижение частицы от $r = r_g$ до любой заданной точки $r > r_g$ происходит за конечный промежуток собственного времени. По собственному времени, следовательно, частица должна подойти к шварцшильдовской сфере изнутри прежде, чем начать двигаться вне ее; но эта часть истории частицы не охватывается данной системой отсчета [2]).

Подчеркнем, однако, что эта неполнота возникает только при формальном рассмотрении метрики поля, как создаваемого точечной массой. В реальной физической задаче, скажем, о коллапсе протяженного тела, неполнота не проявляется: решение, получающееся путем сшивания метрики (100,3) с решением внутри вещества, будет, разумеется, полным и будет описывать всю историю всех возможных движений частиц (мировые линии частиц, движущихся в области $r > r_g$ по направлению от центра, при этом непременно начинаются от поверхности шара еще до его сжатия под сферу Шварцшильда).

Задачи

1. Для движения частицы в поле сжавшегося до гравитационного радиуса сферического тела найти интервал расстояний, на которых возможно движение по круговым орбитам (*С. А. Каплан*, 1949).

Решение. Зависимость $r = r(t)$ для частицы, движущейся в шварцшильдовом поле с отличным от нуля моментом M, получается аналогично

---

[1]) См. *А. Г. Дорошкевич, Я. Б. Зельдович, И. Д. Новиков*, ЖЭТФ **49**, 170 (1965).

[2]) Построение системы отсчета, свободной от такой неполноты, рассмотрено в задаче 5 к этому параграфу.

(100,5); в дифференциальном виде

$$\frac{1}{1-\frac{r_g}{r}}\frac{dr}{c\,dt}=\frac{mc^2}{\mathscr{E}}\sqrt{\left(\frac{\mathscr{E}}{mc^2}\right)^2-1+\frac{r_g}{r}-\frac{M^2}{m^2c^2r^2}+\frac{M^2r_g}{m^2c^2r^3}} \qquad (1)$$

(m — масса частицы, r_g — гравитационный радиус центрального тела). Приравняв нулю подкоренное выражение в (1), мы получим функцию $\mathscr{E}(r)$, играющую здесь роль потенциальной кривой нерелятивистской теории; на рис. 21 изображены эти кривые для различных значений момента M.

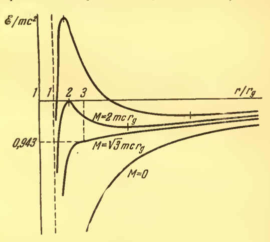


Рис. 21.

Радиусы круговых орбит и соответствующие энергии частицы определяются экстремумами кривых, причем минимумы отвечают устойчивым, а максимумы — неустойчивым орбитам. При $M > \sqrt{3}\ mcr_g$ каждая кривая имеет один минимум и один максимум. При увеличении M от $\sqrt{3}\ mcr_g$ до ∞ координаты минимумов возрастают от $3r_g$ до ∞ (а соответствующие энергии — от $\sqrt{8/9}\ mc^2$ до mc^2); координаты максимумов уменьшаются от $3r_g$ до $3r_g/2$ (а соответствующие энергии увеличиваются от $\sqrt{8/9}\ mc^2$ до ∞). При $r < 3r_g/2$ вообще нет круговых орбит.

2. Для движения в том же поле определить сечение гравитационного захвата падающих из бесконечности а) нерелятивистских, б) ультрарелятивистских частиц (*Я. Б. Зельдович*, *И. Д. Новиков*, 1964).

Решение. а) Для нерелятивистской (на бесконечности) скорости v_∞ энергия частицы: $\mathscr{E}\approx mc^2$. Из рис. 21 видно, что прямая $\mathscr{E}=mc^2$ лежит выше всех потенциальных кривых с моментами $M < 2mcr_g$, т. е. с прицельными расстояниями $\rho < 2cr_g/v_\infty$. Все частицы с такими ρ гравитационно захватываются: они достигают (асимптотически, при $t\to\infty$) шварцшильдовской сферы, не уходя снова на бесконечность. Сечение захвата:

$$\sigma=4\pi r_g^2\left(\frac{c}{v_\infty}\right)^2.$$

б) В уравнении (1) задачи 1 переход к ультрарелятивистской частице (или к лучу света) осуществляется заменой $m \to 0$. Введя также прицельное расстояние $\rho = cM/\mathscr{E}$, получим:

$$\frac{1}{1-\frac{r_g}{r}}\frac{dr}{dt} = \sqrt{1-\frac{\rho^2}{r^2}+\frac{\rho^2 r_g}{r^3}}.$$

Приравнивая нулю подкоренное выражение, получим ближайшее расстояние от центра $r_{\min}$, на котором проходит орбита. Наименьшее значение (равное $r_{\min} = 3r_g/2$) эта величина достигает при $\rho = 3\sqrt{3}\,r_g/2$; при меньших ρ частица проходит к шварцшильдовской сфере. Отсюда сечение захвата:

$$\sigma = \frac{27}{4}\pi r_g^2.$$

3. Получить уравнения центрально-симметрического гравитационного поля в веществе в сопутствующей системе отсчета.

Решение. Двумя возможными преобразованиями координат r, t в элементе интервала (97,1) воспользуемся для того, чтобы, во-первых, обратить в нуль коэффициент $a(r, t)$ при $dr dt$ и, во-вторых, обратить в каждой точке в нуль радиальную скорость вещества (остальные компоненты скорости вообще отсутствуют в силу центральной симметрии). После этого координаты r и t могут еще быть подвергнуты произвольному преобразованию вида $r = r(r')$, $t = t(t')$.

Обозначим выбранные таким образом радиальную координату и время посредством R и τ, а коэффициенты h, k, l — соответственно $-e^{\lambda}$, $-e^{\mu}$, e^{ν} (λ, μ, ν — функции R и τ). Тогда для элемента интервала имеем:

$$ds^2 = c^2 e^{\nu} d\tau^2 - e^{\lambda} dR^2 - e^{\mu}(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2). \tag{1}$$

Компоненты тензора энергии-импульса равны в сопутствующей системе отсчета:

$$T_0^0 = \varepsilon,\quad T_1^1 = T_2^2 = T_3^3 = -p.$$

Довольно длинное вычисление приводит к следующим уравнениям поля:

$$-\frac{8\pi k}{c^4}T_1^1 = \frac{8\pi k}{c^4}p = \frac{1}{2}e^{-\lambda}\left(\frac{\mu'^2}{2}+\mu'\nu'\right) - e^{-\nu}\left(\ddot{\mu}-\frac{1}{2}\dot{\mu}\dot{\nu}+\frac{3}{4}\dot{\mu}^2\right) - e^{-\mu}, \tag{2}$$

$$-\frac{8\pi k}{c^4}T_2^2 = \frac{8\pi k}{c^4}p = \frac{1}{4}e^{-\lambda}(2\nu''+\nu'^2+2\mu''+\mu'^2-\mu'\lambda'-\nu'\lambda'+\mu'\nu') + \frac{1}{4}e^{-\nu}(\dot{\lambda}\dot{\nu}+\dot{\mu}\dot{\nu}-\dot{\lambda}\dot{\mu}-2\ddot{\lambda}-\dot{\lambda}^2-2\ddot{\mu}-\dot{\mu}^2), \tag{3}$$

$$\frac{8\pi k}{c^4}T_0^0 = \frac{8\pi k}{c^4}\varepsilon = -e^{-\lambda}\left(\mu''+\frac{3}{4}\mu'^2-\frac{\mu'\lambda'}{2}\right) + \frac{1}{2}e^{-\nu}\left(\dot{\lambda}\dot{\mu}+\frac{\dot{\mu}^2}{2}\right) + e^{-\mu}, \tag{4}$$

$$\frac{8\pi k}{c^4}T_0^1 = 0 = \frac{1}{2}e^{-\lambda}(2\dot{\mu}'+\dot{\mu}\mu'-\dot{\lambda}\mu'-\nu'\dot{\mu}) \tag{5}$$

(штрих означает дифференцирование по R, а точка — по $c\tau$).

Некоторые общие соотношения для λ, μ, ν могут быть легко найдены, если исходить из содержащихся в уравнениях поля уравнений $T^k_{i;k} = 0$. Воспользовавшись формулой (86,11), получим следующие два уравнения:

$$\dot{\lambda}+2\dot{\mu} = -\frac{2\dot{\varepsilon}}{p+\varepsilon}, \qquad \nu' = -\frac{2p'}{p+\varepsilon}. \tag{6}$$

Если p известно как функция ε, то уравнения (6) интегрируются в виде:

$$\lambda+2\mu=-2\int\frac{d\varepsilon}{p+\varepsilon}+f_1(R), \qquad \nu=-2\int\frac{dp}{p+\varepsilon}+f_2(\tau), \tag{7}$$

где функции $f_1(R)$ и $f_2(\tau)$ могут быть выбраны произвольным образом ввиду указанной выше возможности произвольных преобразований вида $R=R(R')$, $\tau=\tau(\tau')$.

4. Найти общее решение уравнений центрально-симметрического гравитационного поля в сопутствующей системе отсчета для пылевидной материи, т. е. при $p=0$ (*Р. Толман*, 1934)[1]).

Решение. Из уравнений (6) видно, что при $p=0$ можно положить $\nu=0$, чем устанавливается однозначный выбор времени τ (другими словами, система отсчета может быть выбрана сопутствующей и в то же время синхронной — в соответствии с общим утверждением на стр. 377). Вместо $\mu(R, \tau)$ введем функцию

$$r(R, \tau)=e^{\frac{\mu}{2}},$$

представляющую собой «радиус», определенный так, что $2\pi r$ есть длина окружности (с центром в начале координат); тогда элемент интервала

$$ds^2=d\tau^2-e^{\lambda}dR^2-r^2(R, \tau)(d\theta^2+\sin^2\theta\, d\varphi^2).$$

Уравнение (5) принимает вид $\dot\lambda r'=2\dot r'$ и непосредственно интегрируется по времени, давая

$$e^{\lambda}=\frac{r'^2}{1+f}, \tag{8}$$

где $f(R)$ — произвольная функция, удовлетворяющая лишь условию $1+f>0$. Подставив это выражение в уравнение (2) (подстановка в (3) не дает ничего нового), получим:

$$2r\ddot r+\dot r^2-f=0.$$

Первый интеграл этого уравнения есть

$$\dot r^2=f(R)+\frac{F(R)}{r}, \tag{9}$$

где $F(R)$ — еще одна произвольная функция. Интегрируя еще раз, получим:

$$\tau_0(R)-\tau=\frac{1}{f}\sqrt{fr^2+Fr}-\frac{F}{f^{3/2}}\operatorname{Arsh}\sqrt{\frac{fr}{F}} \qquad \text{при } f>0,$$

$$\tau_0(R)-\tau=\frac{1}{f}\sqrt{fr^2+Fr}+\frac{F}{(-f)^{3/2}}\arcsin\sqrt{\frac{-fr}{F}} \quad \text{при } f<0, \tag{10}$$

$$r=\left(\frac{3}{2}\right)^{2/3}F^{1/3}(\tau_0-\tau)^{2/3} \quad \text{при } f=0.$$

В первых двух случаях зависимость $r(R, \tau)$ может быть представлена также и в параметрическом виде:

$$r=\frac{F}{2f}(\operatorname{ch}\eta-1), \qquad \tau_0-\tau=\frac{F}{2f^{3/2}}(\operatorname{sh}\eta-\eta) \qquad \text{при } f>0,$$

$$r=\frac{F}{-2f}(1-\cos\eta), \quad \tau_0-\tau=\frac{F}{2(-f)^{3/2}}(\eta-\sin\eta) \text{ при } f<0 \tag{10a}$$

[1]) В задачах 4 и 5 полагаем $c=1$.

(η — параметр). Для ε получим, подставив (8) в (4) и исключив f с помощью (9):

$$8\pi k\varepsilon=\frac{F'}{r'r^2}. \qquad (11)$$

Формулы (8—11) определяют искомое общее решение. Заметим, что оно зависит по существу не от трех, а всего от двух произвольных функций, определяющих связь между f, F, τ_0, поскольку сама координата R может еще быть подвергнута произвольному преобразованию $R=R(R')$. Это число как раз соответствует наибольшему возможному в данном случае числу «физически различных» произвольных функций (см стр. 357): начальное центрально-симметрическое распределение материи задается двумя величинами (распределения плотности и радиальной скорости), а свободного гравитационного поля с центральной симметрией вообще не существует.

Общий знак в решении (10) выбран так, чтобы сжатию шара соответствовало $\tau-\tau_0\to+0$. Полное решение задачи о коллапсе шара требует конкретного учета начальных условий и «сшивки» на границе шара с шварцшильдовским решением для пустого пространства. Но предельный характер метрики внутри шара следует непосредственно из написанных формул.

При $\tau\to\tau_0(R)$ функция $r(R,\tau)$ стремится к нулю по закону

$$r^2\approx\left(\frac{3}{2}\right)^{4/3}F^{2/3}(\tau_0-\tau)^{4/3},$$

а функция e^λ — к бесконечности как

$$e^\lambda\approx\left(\frac{2}{3}\right)^{2/3}\frac{\tau_0'^2F^{2/3}}{1+f}\,\frac{1}{(\tau_0-\tau)^{2/3}}.$$

Это значит, что все радиальные расстояния (в рассматриваемой сопутствующей системе отсчета) стремятся к бесконечности, а окружные — к нулю, причем все объемы тоже стремятся к нулю (как $\tau-\tau_0$) [1]). Соответственно этому плотность материи неограниченно возрастает:

$$8\pi k\varepsilon\approx\frac{2F'}{3F\tau_0'(\tau_0-\tau)}.$$

Таким образом, в соответствии со сказанным в тексте происходит коллапс всего распределения материи в центр [2]).

В частном случае, когда функция $\tau_0(R)=\mathrm{const}$ (т. е. все частицы шара достигают центра одновременно) метрика внутри сжимающегося

---

[1]) Геометрия на проходящей через центр «плоскости» при этом такая, которая была бы на конусообразной поверхности вращения, растягивающейся с течением времени по своим образующим и одновременно сжимающейся по всем своим окружностям.

[2]) Разумеется, при $\varepsilon\to\infty$ предположение о пылевидности вещества с физической точки зрения во всяком случае непригодно и следует пользоваться ультрарелятивистским уравнением состояния $p=\varepsilon/3$. Оказывается, что общий характер сжатия в значительной степени не зависит от уравнения состояния [см. *Е. М. Лифшиц, И. М. Халатников*, ЖЭТФ **39**, 149 (1960)].

шара имеет другой характер. В этом случае

$$r^2 \approx \left(\frac{3}{2}\right)^{4/3} F^{2/3} (\tau_0-\tau)^{4/3}, \quad e^\lambda \approx \left(\frac{2}{3}\right)^{2/3} \frac{F'^2}{4F^{4/3}(f+1)} (\tau_0-\tau)^{4/3},$$

$$8\pi k\varepsilon \approx \frac{4}{3(\tau_0-\tau)^2},$$

т. е. при $\tau \to \tau_0$ все расстояния — как окружные, так и радиальные — стремятся к нулю по одинаковому закону $[\sim(\tau_0-\tau)^{2/3}]$; плотность материи стремится к бесконечности как $(\tau_0-\tau)^{-2}$, причем в пределе ее распределение стремится к однородному.

Случай $\tau_0 = \mathrm{const}$ включает в себя, в частности, и коллапс полностью однородного шара. Положив (например, при $f > 0$) $F/2f^{3/2} = a_0$, $f = \mathrm{sh}^2 R$ (где a_0 — постоянная), получим метрику

$$ds^2 = d\tau^2 - a^2(\tau)\,[dR^2 + \mathrm{sh}^2 R\,(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2)],$$

где зависимость $a(\tau)$ дается параметрическими уравнениями

$$a = a_0(\mathrm{ch}\,\eta - 1), \quad \tau_0 - \tau = a_0(\mathrm{sh}\,\eta - \eta).$$

При этом плотность

$$8\pi k\varepsilon = \frac{6a_0}{a^3}.$$

Это решение совпадает с метрикой мира, полностью заполненного однородной материей (§ 109), — вполне естественный результат, поскольку сфера, вырезанная из однородного распределения материи, обладает центральной симметрией.

5. Подходящим выбором функций F, f, τ_0 в решении Толмана (задача 4) построить наиболее полную систему отсчета для поля точечной массы [1]).

Решение. При $F = \mathrm{const} \neq 0$ из (11) имеем $\varepsilon = 0$, так что решение относится к пустому пространству, т. е. описывает поле, создаваемое точечной массой (находящейся в центре, представляющем собой особую точку метрики). Так, положив $F = 1$, $f = 0$, $\tau_0(R) = R$, мы получим метрику (100,3)[2]).

Для достижения поставленной цели надо исходить из такого решения, в котором содержались бы как «расширяющаяся», так и «сжимающаяся» пространственно-временные области. Таковым является решение Толмана с $f < 0$; из (10a) видно, что в этом случае при монотонном изменении параметра η (от 0 до 2π) при заданном R время τ меняется монотонно, а r проходит через максимум. Положим

$$F = r_g, \quad f = -\frac{1}{\left(\frac{R}{r_g}\right)^2 + 1}, \quad \tau_0 = \frac{\pi}{2} r_g \left(\frac{R^2}{r_g^2} + 1\right)^{3/2}.$$

---

[1]) Такая система была впервые найдена *М. Крускалом* [Phys. Rev. 119, 1743 (1960)]. Приведенная ниже форма решения (в котором система отсчета синхронна) принадлежит *И. Д. Новикову* (1963).

[2]) Случай же $F = 0$ соответствует отсутствию поля; надлежащим преобразованием переменных метрика может быть приведена к галилеевой.

Тогда имеем:

$$\frac{r}{r_g}=\frac{1}{2}\left(\frac{R^2}{r_g^2}+1\right)(1-\cos\eta),$$

$$\frac{\tau}{r_g}=\frac{1}{2}\left(\frac{R^2}{r_g^2}+1\right)^{3/2}(\pi-\eta+\sin\eta)$$

(причем параметр η пробегает значения от 0 до 2π).

На рис. 22 линии ACB и $A'C'B'$ отвечают $r=0$ (им соответствуют значения параметра $\eta=2\pi$ и $\eta=0$). Линии AOA' и BOB' отвечают шварцшильдовской сфере, $r=r_g$. Между $A'C'B'$ и $A'OB'$ расположена пространственно-временная область, в которой возможно лишь движение от центра, а между ACB и AOB — область, в которой движение происходит лишь по направлению к центру.

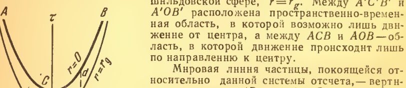


Рис. 22.

Мировая линия частицы, покоящейся относительно данной системы отсчета, — вертикальная прямая ($R=\text{const}$). Она начинается от $r=0$ (точка a), пересекает сферу Шварцшильда в точке b, достигает в момент $\tau=0$ наибольшего удаления $[r=r_g(R^2/r_g^2+1)]$, затем частица снова начинает падать к сфере Шварцшильда, пересекает ее в точке c и вновь достигает $r=0$ (точка d) в момент

$$\tau=\frac{\pi}{2}\left(\frac{R^2}{r_g^2}+1\right)^{3/2}.$$

Полученная система является полной: оба конца мировой линии всякой движущейся в поле частицы лежат либо на истинной особенности $r=0$, либо уходят на бесконечность. Метрика (100,3) охватывает собой только область правее линии AOA' (или левее BOB'), а такая же «расширяющаяся» система отсчета — область справа от BOB' (или слева от AOA'). Система с метрикой (97,14) охватывает лишь область справа от BOA' (или слева от AOB').

§ 101. Псевдотензор энергии-импульса

При отсутствии гравитационного поля закон сохранения энергии и импульса материи (вместе с электромагнитным полем) выражается уравнением

$$\partial T^{ik}/\partial x^k=0.$$

Обобщением этого уравнения на случай наличия гравитационного поля является уравнение (94,7)

$$T^k_{i;k}=\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial\left(T^k_i\sqrt{-g}\right)}{\partial x^k}-\frac{1}{2}\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i}T^{kl}=0. \qquad (101,1)$$

В таком виде, однако, это уравнение, вообще говоря, не выражает закона сохранения чего бы то ни было[1]). Это обстоятельство связано с тем, что в гравитационном поле должен сохраняться не 4-импульс одной лишь материи, а 4-импульс материи вместе с гравитационным полем; последний же не учтен в выражении для T_i^k.

Для определения сохраняющегося полного 4-импульса гравитационного поля вместе с находящейся в нем материей мы поступим следующим образом[2]). Выберем систему координат так, чтобы в некоторой заданной точке пространства-времени все первые производные от g_{ik} по координатам обратились в нуль (сами же g_{ik} при этом не должны обязательно иметь галилеевы значения). Тогда в этой точке второй член в уравнении (101,1) обратится в нуль, а в первом можно вынести $\sqrt{-g}$ из-под знака производной, так что остается

$$\frac{\partial}{\partial x^k} T_i^k = 0,$$

или в контравариантных компонентах

$$\frac{\partial}{\partial x^k} T^{ik} = 0.$$

Величины T^{ik}, тождественно удовлетворяющие этому уравнению, могут быть написаны в виде

$$T^{ik} = \frac{\partial}{\partial x^l} \eta^{ikl},$$

где η^{ikl} — величины, антисимметричные по индексам k, l:

$$\eta^{ikl} = -\eta^{ilk}.$$

---

[1]) Действительно, интеграл $\int T_i^k \sqrt{-g}\, dS_k$ сохраняется лишь при выполнении условия $\frac{\partial \sqrt{-g}\, T_i^k}{\partial x^k} = 0$, а не (101,1). В этом легко убедиться, произведя в криволинейных координатах те же вычисления, которые были проделаны в § 29 в галилеевых координатах. Достаточно, впрочем, просто заметить, что эти вычисления имеют чисто формальный характер, не связанный с тензорными свойствами соответствующих величин, как и доказательство теоремы Гаусса, имеющей в криволинейных координатах тот же вид (83,17), что и в декартовых.

[2]) Может возникнуть мысль применить к гравитационному полю формулу (94,4), подставив в нее $\Lambda = -\frac{c^4}{16\pi k} G$. Подчеркнем, однако, что эта формула относится только к физическим системам, описывающимся величинами q, отличными от g_{ik}; поэтому она неприменима к гравитационному полю, определяющемуся самими величинами g_{ik}. Заметим, кстати, что при подстановке в (94,4) G вместо Λ мы получили бы просто нуль, как это непосредственно видно из соотношения (95,3) и уравнений поля в пустоте.

Нетрудно фактически привести T^{ik} к такому виду. Для этого исходим из уравнений поля:

$$T^{ik}=\frac{c^4}{8\pi k}\left(R^{ik}-\frac{1}{2}g^{ik}R\right),$$

а для R^{ik} имеем согласно (92,4):

$$R^{ik}=\frac{1}{2}g^{im}g^{kp}g^{ln}\left\{\frac{\partial^2 g_{lp}}{\partial x^m\partial x^n}+\frac{\partial^2 g_{mn}}{\partial x^l\partial x^p}-\frac{\partial^2 g_{ln}}{\partial x^m\partial x^p}-\frac{\partial^2 g_{mp}}{\partial x^l\partial x^n}\right\}$$

(напоминаем, что в рассматриваемой точке все $\Gamma^i_{kl}=0$). После простых преобразований тензор T^{ik} может быть приведен к виду

$$T^{ik}=\frac{\partial}{\partial x^l}\left\{\frac{c^4}{16\pi k}\frac{1}{(-g)}\frac{\partial}{\partial x^m}\left[(-g)\left(g^{ik}g^{lm}-g^{il}g^{km}\right)\right]\right\}.$$

Стоящее в фигурных скобках выражение антисимметрично по индексам k, l и есть то, что мы обозначили выше как η^{ikl}. Поскольку первые производные от g_{ik} в рассматриваемой точке равны нулю, то множитель $1/(-g)$ можно вынести из-под знака производной $\partial/\partial x^l$. Вводим обозначение

$$h^{ikl}=\frac{c^4}{16\pi k}\frac{\partial}{\partial x^m}\left[(-g)\left(g^{ik}g^{lm}-g^{il}g^{km}\right)\right]; \qquad (101,2)$$

эти величины антисимметричны по индексам k, l:

$$h^{ikl}=-h^{ilk}. \qquad (101,3)$$

Тогда можно написать

$$\frac{\partial h^{ikl}}{\partial x^l}=(-g)\,T^{ik}.$$

Это соотношение, выведенное в предположении $\partial g_{ik}/\partial x^l=0$, перестает иметь место при переходе к произвольной системе координат. В общем случае разность $\frac{\partial h^{ikl}}{\partial x^l}-(-g)\,T^{ik}$ отлична от нуля; обозначим ее посредством $(-g)\,t^{ik}$. Тогда будем иметь, по определению:

$$(-g)\left(T^{ik}+t^{ik}\right)=\frac{\partial h^{ikl}}{\partial x^l}. \qquad (101,4)$$

Величины t^{ik} симметричны по индексам i, k:

$$t^{ik}=t^{ki}. \qquad (101,5)$$

Это видно непосредственно из их определения, поскольку как тензор T^{ik}, так и производные $\partial h^{ikl}/\partial x^l$, являются симметричными величинами [1]). Выражая T^{ik} через R^{ik}, согласно уравнениям Эйнштейна,

[1]) Именно для этого мы вынесли выше $(-g)$ из-под знака производной по x^l в выражении для T^{ik}. В противном случае $\partial h^{ikl}/\partial x^l$, а потому и t^{ik} оказалось бы несимметричными по i, k.

и воспользовавшись выражением (101,2) для h^{ikl}, можно получить после довольно длинного вычисления следующее выражение для t^{ik}:

$$t^{ik}=\frac{c^4}{16\pi k}\Big\{(2\Gamma^n_{lm}\Gamma^p_{np}-\Gamma^n_{lp}\Gamma^p_{mn}-\Gamma^n_{ln}\Gamma^p_{mp})(g^{il}g^{km}-g^{ik}g^{lm})+ \\ +g^{il}g^{mn}(\Gamma^k_{lp}\Gamma^p_{mn}+\Gamma^k_{mn}\Gamma^p_{lp}-\Gamma^k_{np}\Gamma^p_{lm}-\Gamma^k_{lm}\Gamma^p_{np})+ \\ +g^{kl}g^{mn}(\Gamma^i_{lp}\Gamma^p_{mn}+\Gamma^i_{mn}\Gamma^p_{lp}-\Gamma^i_{np}\Gamma^p_{lm}-\Gamma^i_{lm}\Gamma^p_{np})+ \\ +g^{lm}g^{np}(\Gamma^i_{ln}\Gamma^k_{mp}-\Gamma^i_{lm}\Gamma^k_{np})\Big\}, \quad (101,6)$$

или, непосредственно через производные от компонент метрического тензора,

$$(-g)\,t^{ik}=\frac{c^4}{16\pi k}\Big\{\mathfrak{g}^{ik}{}_{,l}\,\mathfrak{g}^{lm}{}_{,m}-\mathfrak{g}^{il}{}_{,l}\,\mathfrak{g}^{km}{}_{,m}+\frac{1}{2}g^{ik}g_{lm}\mathfrak{g}^{ln}{}_{,p}\,\mathfrak{g}^{pm}{}_{,n}- \\ -(g^{il}g_{mn}\mathfrak{g}^{kn}{}_{,p}\,\mathfrak{g}^{mp}{}_{,l}+g^{kl}g_{mn}\mathfrak{g}^{in}{}_{,p}\,\mathfrak{g}^{mp}{}_{,l})+g_{lm}g^{np}\mathfrak{g}^{il}{}_{,n}\,\mathfrak{g}^{km}{}_{,p}+ \\ +\frac{1}{8}(2g^{il}g^{km}-g^{ik}g^{lm})(2g_{np}g_{qr}-g_{pq}g_{nr})\,\mathfrak{g}^{nr}{}_{,l}\,\mathfrak{g}^{pq}{}_{,m}\Big\}, \quad (101,7)$$

где $\mathfrak{g}^{ik}=\sqrt{-g}\,g^{ik}$, а индекс $,i$ означает простое дифференцирование по x^i.

Существенным свойством величин t^{ik} является то, что они не составляют тензора; это видно уже из того, что в $\partial h^{ikl}/\partial x^l$ стоят простые, а не ковариантные производные. Однако t^{ik} выражаются через величины Γ^i_{kl}, а последние ведут себя как тензор по отношению к линейным преобразованиям координат (см. § 85); то же самое относится, следовательно и к t^{ik}.

Из определения (101,4) следует, что для суммы $T^{ik}+t^{ik}$ тождественно выполняются уравнения

$$\frac{\partial}{\partial x^k}(-g)\,(T^{ik}+t^{ik})=0. \quad (101,8)$$

Это значит, что имеет место закон сохранения величин

$$P^i=\frac{1}{c}\int(-g)\,(T^{ik}+t^{ik})\,dS_k. \quad (101,9)$$

При отсутствии гравитационного поля в галилеевых координатах $t^{ik}=0$, и написанный интеграл переходит в $\frac{1}{c}\int T^{ik}\,dS_k$, т. е. в 4-импульс материи. Поэтому величины (101,9) должны быть отождествлены с полным 4-импульсом материи вместе с гравитационным полем. Совокупность величин t^{ik} называют *псевдотензором энергии-импульса* гравитационного поля.

Интегрирование в (101,9) может производиться по любой бесконечной гиперповерхности, включающей в себя все трехмерное пространство. Если выбрать в качестве нее гиперповерхность $x^0=\text{const}$,

то P^i можно написать в виде трехмерного пространственного интеграла:

$$P^i = \frac{1}{c}\int (-g)(T^{i0}+t^{i0})\,dV. \qquad (101,10)$$

Тот факт, что полный 4-импульс материи и поля выражается в виде интегралов от симметричных по индексам i, k величин $(-g)(T^{ik}+t^{ik})$, весьма существен. Он означает, что сохраняется 4-момент импульса, определяемый как (см. § 32)[1])

$$M^{ik} = \int (x^i dP^k - x^k dP^i) = \frac{1}{c}\int [x^i(T^{kl}+t^{kl}) - x^k(T^{il}+t^{il})](-g)\,dS_l. \qquad (101,11)$$

Таким образом, и в общей теории относительности у замкнутой системы гравитирующих тел сохраняется полный момент импульса и, кроме того, по-прежнему может быть дано определение центра инерции, совершающего равномерное движение. Последнее связано с сохранением компонент $M^{0\alpha}$ (ср. § 14), выражающимся уравнением

$$x^0\int (T^{\alpha 0}+t^{\alpha 0})(-g)\,dV - \int x^\alpha (T^{00}+t^{00})(-g)\,dV = \text{const},$$

так что координаты центра инерции даются формулой

$$X^\alpha = \frac{\int x^\alpha (T^{00}+t^{00})(-g)\,dV}{\int (T^{00}+t^{00})(-g)\,dV}. \qquad (101,12)$$

Выбирая систему координат, инерциальную в данном элементе объема, можно обратить все t^{ik} в любой точке пространства-времени в нуль (так как при этом обращаются в нуль все Γ^i_{kl}). С другой стороны, можно получить отличные от нуля t^{ik} в плоском пространстве, т. е. при отсутствии гравитационного поля, если просто воспользоваться криволинейными координатами вместо декартовых. Таким образом, во всяком случае не имеет смысла говорить об определенной локализации энергии гравитационного поля в пространстве. Если тензор $T_{ik}=0$ в некоторой мировой точке, то это имеет место в любой системе отсчета, так что мы можем сказать, что в этой

[1]) Необходимо отметить, что полученное нами выражение для 4-импульса материи и поля отнюдь не является единственно возможным. Напротив, можно бесчисленными способами (см., например, задачу к этому параграфу) подобрать такие выражения, которые бы в отсутствие поля переходили в T^{ik}, а при интегрировании по dS_k давали бы сохраняющиеся величины. Однако сделанный нами выбор — единственный, при котором псевдотензор энергии-импульса поля содержит лишь первые (но не более высокие) производные от g_{ik} (условие, представляющееся вполне естественным с физической точки зрения) и при этом симметричен, так что дает возможность сформулировать закон сохранения момента.

точке нет материи или электромагнитного поля. Напротив, из равенства нулю псевдотензора в некоторой точке в одной системе отсчета отнюдь не следует того же самого для другой системы отсчета, и поэтому не имеет смысла говорить о том, имеется ли или нет гравитационная энергия в данном месте. Это вполне соответствует тому, что подходящим выбором координат можно «уничтожить» гравитационное поле в данном элементе объема, причем согласно сказанному выше одновременно исчезает и псевдотензор t^{ik} в этом элементе.

Величины же P^i — 4-импульс поля и материи — имеют вполне определенный смысл, оказываясь не зависящими от выбора системы отсчета как раз в такой степени, как это необходимо на основании физических соображений.

Выделим вокруг рассматриваемых масс область пространства, настолько большую, чтобы вне ее можно было считать гравитационное поле отсутствующим. В четырехмерном пространстве-времени эта область с течением времени прорезывает «канал». Вне этого «канала» поле отсутствует, так что 4-пространство — плоское. В связи с этим при вычислении энергии и импульса поля надо выбрать четырехмерную систему координат таким образом, чтобы вне «канала» она переходила в галилееву систему и все t^{ik} исчезали.

Этим требованием система отсчета, конечно, отнюдь не определяется однозначно,— внутри канала она может быть выбрана произвольно. В полном согласии с физическим смыслом величин P^i они оказываются, однако, совершенно не зависящими от выбора системы координат внутри «канала». Действительно, рассмотрим две системы координат, различные внутри «канала», но переходящие вне его в одну и ту же галилееву систему, и сравним значения 4-импульса P^i и P'^i в этих двух системах в определенные моменты «времени» x^0 и x'^0. Введем третью систему координат, совпадающую внутри «канала» в момент x^0 с первой системой, в момент x'^0 — со второй, а вне «канала» — с той же галилеевой. В силу закона сохранения энергии и импульса величины P^i постоянны ($dP^i/dx^0=0$). Это имеет место в третьей системе координат, как и в первых двух. Отсюда следует $P^i=P'^i$, что и требовалось доказать.

Выше было отмечено, что величины t^{ik} являются тензором по отношению к линейным преобразованиям координат. Поэтому величины P^i образуют 4-вектор по отношению к таким преобразованиям, в частности по отношению к преобразованиям Лоренца, переводящим на бесконечности одну галилееву систему отсчета в другую[1]).

[1]) Строго говоря, при определении (101,9) P^i есть 4-вектор лишь по отношению к линейным преобразованиям с равным единице определителем; сюда относятся и преобразования Лоренца, которые только и представляют физический интерес. Если допускать также и преобразования с не равным единице определителем, то в определение P^i надо ввести значение g на бесконечности, написав в левой стороне (101,9) $\sqrt{-g_\infty}\,P^i$ вместо P^i.

4-импульс P^i может быть выражен также в виде интеграла по удаленной трехмерной поверхности, охватывающей «все пространство». Подставив (101,4) в (101,9), находим:

$$P^i = \frac{1}{c}\int \frac{\partial h^{ikl}}{\partial x^l}\, dS_k.$$

Этот интеграл можно преобразовать в интеграл по обычной поверхности с помощью (6,17):

$$P^i = \frac{1}{2c}\oint h^{ikl}\, df_{kl}^{*}. \qquad (101,13)$$

Если в качестве области интегрирования в (101,9) выбирается гиперповерхность $x^0 = \text{const}$, то в (101,13) поверхность интегрирования оказывается чисто пространственной поверхностью[1]):

$$P^i = \frac{1}{c}\oint h^{i0\alpha}\, df_\alpha. \qquad (101,14)$$

Для вывода аналогичной формулы для момента импульса представим формулу (101,2) в виде

$$h^{ikl} = \frac{\partial}{\partial x^m}\lambda^{iklm}; \qquad (101,15)$$

выражение величин λ^{iklm} через компоненты метрического тензора очевидно из (101,2). Подставляя (101,4) в (101,11) и интегрируя «по частям», получим:

$$M^{ik} = \frac{1}{c}\int\left(x^i \frac{\partial^2\lambda^{klmn}}{\partial x^m \partial x^n} - x^k \frac{\partial^2\lambda^{ilmn}}{\partial x^m \partial x^n}\right) dS_l =$$
$$= \frac{1}{2c}\int\left(x^i \frac{\partial\lambda^{klmn}}{\partial x^n} - x^k \frac{\partial\lambda^{ilmn}}{\partial x^n}\right) df_{lm}^{*} -$$
$$- \frac{1}{c}\int\left(\delta^i_m \frac{\partial\lambda^{klmn}}{\partial x^n} - \delta^k_m \frac{\partial\lambda^{ilmn}}{\partial x^n}\right) dS_l =$$
$$= \frac{1}{2c}\int (x^i h^{klm} - x^k h^{ilm})\, df_{lm}^{*} - \frac{1}{c}\int \frac{\partial}{\partial x^n}(\lambda^{klin} - \lambda^{ilkn})\, dS_l.$$

Из определения величин λ^{iklm} легко видеть, что

$$\lambda^{ilkn} - \lambda^{klin} = \lambda^{ilnk}, \qquad \lambda^{inlk} = -\lambda^{ilnk}.$$

---

[1]) df_{kl}^{*} есть «нормальный» элемент поверхности, связанный «с тангенциальным» элементом df^{ik} посредством (6,11): $df_{ik}^{*} = \frac{1}{2}e_{iklm}\, df^{lm}$. На поверхности, охватывающей гиперповерхность, перпендикулярную к оси x^0, отличны от нуля только компоненты df^{lm} с $l, m = 1, 2, 3$, и следовательно, df_{ik}^{*} имеет только компоненты с одним из i или k, равным нулю. Компоненты $df_{0\alpha}^{*}$ являются не чем иным, как компонентами трехмерного элемента обычной поверхности, который мы обозначаем просто посредством df_α.

Поэтому оставшийся интеграл по dS_l равен

$$\frac{1}{c}\int\frac{\partial\lambda^{ilnk}}{\partial x^n}\,dS_l=\frac{1}{2c}\int\lambda^{ilnk}\,df^*_{ln}.$$

Наконец, снова выбирая чисто пространственную поверхность интегрирования, получим окончательно:

$$M^{ik}=\frac{1}{c}\int\left(x^i h^{k0\alpha}-x^k h^{i0\alpha}+\lambda^{i0\alpha k}\right)df_\alpha. \qquad (101,16)$$

Напомним, что при применении формул (101,14), (101,16), в соответствии со сказанным выше, система пространственных координат должна быть выбрана таким образом, чтобы на бесконечности g_{ik} стремились к постоянным галилеевым значениям. Так, для вычисления по формуле (101,14) 4-импульса изолированной системы тел, постоянно находящейся вблизи начала координат, можно воспользоваться для метрики вдали от тел выражением (97,18), перейдя в нем от сферических пространственных координат к декартовым (для чего надо заменить dr на $n_\alpha dx^\alpha$, где $\mathbf{n}$ — единичный вектор в направлении $\mathbf{r}$); соответствующий метрический тензор

$$g_{00}=1-\frac{2km}{c^2r},\quad g_{\alpha\beta}=-\delta_{\alpha\beta}-\frac{2km}{c^2}\frac{n_\alpha n_\beta}{r},\quad g_{0\alpha}=0, \qquad (101,17)$$

где m — полная масса системы. Производя вычисление нужных нам компонент h^{ikl} по формуле (101,2), получим с требуемой точностью (оставляем члены $\sim 1/r^2$):

$$h^{\alpha0\beta}=0,$$

$$h^{00\alpha}=\frac{c^4}{16\pi k}\frac{\partial}{\partial x^\beta}\left(g^{00}g^{\alpha\beta}\right)=\frac{mc^2}{8\pi}\frac{\partial}{\partial x^\beta}\left(-\frac{\delta^{\alpha\beta}}{r}+\frac{x^\alpha x^\beta}{r^3}\right)=\frac{mc^2}{4\pi}\frac{n^\alpha}{r^2}.$$

Интегрируя теперь в (101,14) по сфере радиуса r, получим окончательно:

$$P^\alpha=0,\qquad P^0=mc \qquad (101,18)$$

— результат, который естественно было ожидать. Он является выражением факта равенства, как говорят, «тяжелой» и «инертной» масс («тяжелой» называют массу, определяющую создаваемое телом гравитационное поле,— это есть та масса, которая входит в выражение для интервала в гравитационном поле или, в частности, в закон Ньютона; «инертная» же масса определяет соотношение между импульсом и энергией тела и, в частности, энергия покоя тела равна этой его массе, умноженной на c^2).

В случае постоянного гравитационного поля оказывается возможным вывести простое выражение для полной энергии материи вместе с полем в виде интеграла только по пространству, занятому материей. Получить это выражение можно, например, исходя из следующего тождества, справедливого, как легко проверить, когда все

величины не зависят от x^0 [1]):

$$R_0^0 = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} (\sqrt{-g} g^{i0} \Gamma_{0i}^\alpha).$$

Интегрируя $R_0^0 \sqrt{-g}$ по (трехмерному) пространству и применив трехмерную теорему Гаусса, получим:

$$\int R_0^0 \sqrt{-g} dV = \oint \sqrt{-g} g^{i0} \Gamma_{0i}^\alpha df_\alpha.$$

Взяв достаточно удаленную поверхность интегрирования и воспользовавшись на ней выражениями (101,17) для g_{ik}, получим после простого вычисления:

$$\int R_0^0 \sqrt{-g} dV = -\frac{4\pi k}{c^2} m = -\frac{4\pi k}{c^3} P^0.$$

Замечая также, что согласно уравнениям поля

$$R_0^0 = \frac{8\pi k}{c^4}\left(T_0^0 - \frac{1}{2} T\right) = \frac{4\pi k}{c^4} (T_0^0 - T_1^1 - T_2^2 - T_3^3),$$

получаем искомую формулу

$$P^0 = mc = \frac{1}{c} \int (T_1^1 + T_2^2 + T_3^3 - T_0^0) \sqrt{-g} dV. \qquad (101,19)$$

Эта формула выражает полную энергию материи и постоянного гравитационного поля (т. е. полную массу тела) через тензор энергии-импульса одной только материи (*Р. Толман*, 1930). Напомним, что в случае центральной симметрии поля мы имели для той же величины еще и другое выражение — формулу (97,23).

---

[1]) Из (92,10) имеем:

$$R_0^0 = g^{0i} R_{i0} = g^{0i} \left(\frac{\partial \Gamma_{i0}^l}{\partial x^l} + \Gamma_{i0}^l \Gamma_{lm}^m - \Gamma_{il}^m \Gamma_{0m}^l \right),$$

а с помощью (86,5) и (86,8) находим, что это выражение может быть написано как

$$R_0^0 = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^l} (\sqrt{-g} g^{0i} \Gamma_{i0}^l) + g^{im} \Gamma_{ml}^0 \Gamma_{i0}^l;$$

с помощью того же соотношения (86,8) легко убедиться в том, что второй член справа тождественно равен $-\frac{1}{2} \Gamma_{lm}^0 \frac{\partial g^{lm}}{\partial x^0}$, и вследствие независимости всех величин от x^0 обращается в нуль. Наконец, заменив по той же причине в первом члене суммирование по l суммированием по α, получим приведенную в тексте формулу.

Задача

Получить выражение для полного 4-импульса материи и гравитационного поля, воспользовавшись формулой (32,5).

Решение. В криволинейных координатах имеем вместо (32,1)

$$S=\int \Lambda \sqrt{-g}\, dV\, dt$$

и потому для получения сохраняющейся величины надо писать в (32,5) $\Lambda\sqrt{-g}$ вместо Λ, так что 4-импульс имеет вид

$$P_i=\frac{1}{c}\int\left[-\Lambda\sqrt{-g}\cdot\delta_i^k+\sum\frac{\partial q^{(l)}}{\partial x^i}\frac{\partial(\sqrt{-g}\,\Lambda)}{\partial\dfrac{\partial q^{(l)}}{\partial x^k}}\right]dS_k.$$

При применении этой формулы к материи, для которой величины $q^{(l)}$ отличны от g_{ik}, можно вынести $\sqrt{-g}$ из-под знака производной, и подынтегральное выражение оказывается равным $\sqrt{-g}\,T_i^k$, где T_i^k — тензор энергии-импульса материи. При применении же написанной формулы к гравитационному полю надо положить $\Lambda=-\frac{c^4}{16\pi k}G$, а величинами $q^{(l)}$ являются компоненты g_{ik} метрического тензора. Полный 4-импульс поля и материи равен, следовательно,

$$P_i=\frac{1}{c}\int T_i^k\sqrt{-g}\,dS_k+\frac{c^3}{16\pi k}\int\left[G\sqrt{-g}\,\delta_i^k-\frac{\partial g^{lm}}{\partial x^i}\frac{\partial(G\sqrt{-g})}{\partial\dfrac{\partial g^{lm}}{\partial x^k}}\right]dS_k.$$

Воспользовавшись выражением (93,3) для G, можно преобразовать эту формулу к виду

$$P_i=\frac{1}{c}\int\left\{T_i^k\sqrt{-g}+\frac{c^4}{16\pi k}\left[G\sqrt{-g}\,\delta_i^k+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\Gamma_{im}^k\frac{\partial(g^{lm}\sqrt{-g})}{\partial x^i}-\Gamma_{ml}^l\frac{\partial(g^{mk}\sqrt{-g})}{\partial x^i}\right]\right\}dS_k.$$

Второй член в фигурных скобках определяет 4-импульс гравитационного поля при отсутствии материи. Подынтегральное выражение не симметрично по индексам i, k и потому не дает возможности сформулировать закон сохранения момента импульса.

§ 102. Гравитационные волны

Рассмотрим слабое гравитационное поле в пустоте. В слабом поле метрика пространства-времени «почти галилеева», т. е. можно выбрать такую систему отсчета, в которой компоненты метрического тензора почти равны своим галилеевым значениям, которые мы обозначим посредством

$$g_{\alpha 0}^{(0)}=0,\quad g_{00}^{(0)}=1,\quad g_{\alpha\beta}^{(0)}=-\delta_{\alpha\beta}. \tag{102,1}$$

Мы можем, следовательно, написать g_{ik} в виде

$$g_{ik}=g_{ik}^{(0)}+h_{ik}, \qquad (102,2)$$

где h_{ik} — малая поправка, определяющая гравитационное поле.

При малых h_{ik} компоненты Γ^i_{kl}, выражающиеся через производные от g_{ik}, тоже малы. Пренебрегая степенями h_{ik} выше первой, мы можем оставить в тензоре R_{iklm} (92,4) только члены в первой скобке:

$$R_{iklm}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 h_{im}}{\partial x^k \partial x^l}+\frac{\partial^2 h_{kl}}{\partial x^i \partial x^m}-\frac{\partial^2 h_{km}}{\partial x^i \partial x^l}-\frac{\partial^2 h_{il}}{\partial x^k \partial x^m}\right). \qquad (102,3)$$

Для упрощенного тензора R_{ik} имеем с той же точностью:

$$R_{ik}=g^{lm}R_{limk}\approx g^{(0)lm}R_{limk},$$

или

$$R_{ik}=\frac{1}{2}\left(-g^{(0)lm}\frac{\partial^2 h_{ik}}{\partial x^l \partial x^m}+\frac{\partial^2 h^l_i}{\partial x^k \partial x^l}+\frac{\partial^2 h^l_k}{\partial x^i \partial x^l}-\frac{\partial^2 h}{\partial x^i \partial x^k}\right), \qquad (102,4)$$

где $h=h^l_l$ [1]).

Мы выбрали систему отсчета таким образом, чтобы g_{ik} мало отличались от $g_{ik}^{(0)}$. Но это условие сохраняется и при любом бесконечно малом преобразовании координат, так что мы можем наложить на h_{ik} еще четыре (по числу координат) условия, не нарушая при этом их малости. Выберем в качестве этих дополнительных условий уравнения

$$\frac{\partial \psi^k_i}{\partial x^k}=0, \quad \psi^k_i=h^k_i-\frac{1}{2}\delta^k_i h. \qquad (102,5)$$

Следует заметить, что этими условиями выбор координат все еще не определяется однозначным образом; выясним, какие преобразования еще допускаются ими. При преобразовании $x'^i=x^i+\xi^i$, где ξ^i — малые величины, тензор g_{ik} переходит в

$$g'_{ik}=g_{ik}-\frac{\partial \xi_i}{\partial x^k}-\frac{\partial \xi_k}{\partial x^i},$$

---

[1]) В соответствии с принятым приближением все операции поднимания и опускания индексов у малых тензоров и векторов производятся здесь и ниже с помощью «невозмущенного» метрического тензора $g_{ik}^{(0)}$. Так, $h^k_i=g^{(0)kl}h_{il}$ и т. п.

При этом для контравариантных составляющих g^{ik} имеем:

$$g^{ik}=g^{(0)ik}-h^{ik} \qquad (102,2а)$$

(так, чтобы с точностью до членов первого порядка соблюдалось условие $g_{il}g^{lk}=\delta^k_i$). Определитель метрического тензора:

$$g=g^{(0)}(1+g^{(0)ik}h_{ik})=g^{(0)}(1+h). \qquad (102,2б)$$

т. е.

$$h'_{ik}=h_{ik}-\frac{\partial\xi_i}{\partial x^k}-\frac{\partial\xi_k}{\partial x^i} \qquad (102,6)$$

[см. формулу (94,3), в которой ковариантное дифференцирование сводится в данном случае ввиду постоянства $g_{ik}^{(0)}$ к обычному дифференцированию]. Отсюда легко убедиться, что если h_{ik} удовлетворяют условию (102,5), то и h'_{ik} будут удовлетворять тому же условию, если ξ_i являются решениями уравнения

$$\Box\xi_i=0, \qquad (102,7)$$

где $\Box$ обозначает оператор д'Аламбера

$$\Box=-g^{(0)\,lm}\frac{\partial^2}{\partial x^l\partial x^m}=\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}.$$

В силу условий (102,5) последние три члена в выражении (102,4) для R_{ik} взаимно сокращаются, и мы находим:

$$R_{ik}=\frac{1}{2}\Box h_{ik}.$$

Таким образом, уравнения гравитационного поля в пустоте принимают вид

$$\Box h_i^k=0. \qquad (102,8)$$

Это обычное волновое уравнение. Следовательно, гравитационные поля, как и электромагнитные, распространяются в пустоте со скоростью света.

Рассмотрим плоскую гравитационную волну. В такой волне поле меняется только вдоль одного направления в пространстве; в качестве этого направления выберем ось $x^1=x$. Уравнения (102,8) тогда превращаются в

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)h_i^k=0, \qquad (102,9)$$

решением которых является любая функция от $t\pm x/c$ (§ 47).

Пусть волна распространяется в положительном направлении оси x. Все величины h_i^k в ней являются функциями от $t-x/c$. Дополнительные условия (102,5) дают в этом случае $\dot\psi_i^1-\dot\psi_i^0=0$, где точка над буквой означает дифференцирование по t. Эти равенства можно проинтегрировать, просто вычеркнув знак дифференцирования; постоянные интегрирования можно положить равными нулю, так как мы интересуемся здесь (как и в случае электромагнитных волн) только переменной частью поля. Таким образом, между отдельными компонентами ψ_i^k имеются соотношения:

$$\psi_1^1=\psi_1^0,\quad \psi_2^1=\psi_2^0,\quad \psi_3^1=\psi_3^0,\quad \psi_0^1=\psi_0^0. \qquad (102,10)$$

Как было указано, условия (102,5) еще не определяют однозначно системы отсчета; мы можем подвергнуть координаты преобразованию вида $x'^i = x^i + \xi^i(t - x/c)$. Этим преобразованием можно воспользоваться для того, чтобы обратить в нуль четыре величины: ψ_1^0, ψ_2^0, ψ_3^0, $\psi_2^2 + \psi_3^3$. Из равенств (102,10) следует, что при этом обратятся в нуль также и компоненты ψ_1^1, ψ_2^1, ψ_3^1, ψ_0^0. Что же касается остающихся величин ψ_2^3, $\psi_2^2 - \psi_3^3$, то их нельзя обратить в нуль никаким выбором системы отсчета, поскольку, как это видно из (102,6), при $\xi_i = \xi_i(t - x/c)$ эти компоненты вообще не меняются. Заметим, что обращается в нуль и $\psi = \psi_i^i$, а потому $\psi_i^k = h_i^k$.

Таким образом, плоская гравитационная волна определяется двумя величинами: h_{23}, $h_{22} = -h_{33}$. Другими словами, гравитационные волны являются поперечными волнами, поляризация которых определяется симметричным тензором 2-го ранга в плоскости yz и сумма диагональных членов которого $h_{22} + h_{33}$ равна нулю.

Вычислим поток энергии в плоской гравитационной волне. Поток энергии гравитационного поля определяется величинами $-cgt^{0\alpha} \approx \approx ct^{0\alpha}$. В волне, распространяющейся вдоль оси x^1, отлична от нуля только компонента t^{10}.

Псевдотензор t^{ik} — величина второго порядка малости; мы должны вычислить t^{10} только с этой точностью. Вычисление с помощью общей формулы (101,6) с использованием того, что в плоской волне отличны от нуля лишь компоненты h_{23}, $h_{22} = -h_{33}$ тензора h_{ik}, приводит к результату

$$t^{01} = -\frac{c^3}{32\pi k}\left(\frac{\partial h_{22}}{\partial x}\frac{\partial h_{22}}{\partial t} + \frac{\partial h_{33}}{\partial x}\frac{\partial h_{33}}{\partial t} + 2\frac{\partial h_{23}}{\partial x}\frac{\partial h_{23}}{\partial t}\right).$$

Если все величины являются функциями только от $t - x/c$, то отсюда окончательно получаем:

$$t^{01} = \frac{c^2}{16\pi k}\left[\dot{h}_{23}^2 + \frac{1}{4}\left(\dot{h}_{22} - \dot{h}_{33}\right)^2\right]. \qquad (102,11)$$

Обладая определенной энергией, гравитационная волна сама создает вокруг себя некоторое дополнительное гравитационное поле. Это поле — более высокого (второго) порядка малости по сравнению с полем самой волны, поскольку создающая ее энергия — второго порядка малости.

Начальные условия для произвольного поля гравитационных волн должны задаваться четырьмя произвольными функциями координат: в силу поперечности волн имеется всего две независимые компоненты $h_{\alpha\beta}$, вместе с которыми должны быть заданы также и их первые производные по времени. Хотя этот подсчет мы произвели здесь исходя из свойства слабого гравитационного поля, но ясно,

что его результат — число 4 — не может быть связан с этим предположением и относится к любому свободному, т. е. не связанному с гравитирующими массами, гравитационному полю.

Задачи

1. Определить тензор кривизны в слабой плоской гравитационной волне.

Решение. Вычисляя R_{iklm} по формуле (92,4) в линейном по h_{ik} приближении, найдем следующие отличные от нуля компоненты:

$$-R_{0202}=R_{0303}=-R_{1212}=R_{0212}=R_{0331}=R_{3131}=\sigma,$$
$$R_{0203}=-R_{1231}=-R_{0312}=R_{0231}=\mu,$$

где обозначено: $\sigma=-\frac{1}{2}\ddot{h}_{33}=\frac{1}{2}\ddot{h}_{22}$, $\mu=-\frac{1}{2}\ddot{h}_{23}$. В терминах введенных в задаче 3 § 92 трехмерных тензоров $A_{\alpha\beta}$ и $B_{\alpha\beta}$ имеем:

$$A_{\alpha\beta}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & -\sigma & \mu\\ 0 & \mu & \sigma\end{pmatrix},\qquad B_{\alpha\beta}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & \mu & \sigma\\ 0 & \sigma & -\mu\end{pmatrix}.$$

Надлежащим поворотом осей x^2, x^3 можно обратить (в заданной точке 4-пространства) одну из величин σ или μ в нуль; обратив в нуль величину σ, приведем тензор кривизны к вырожденному типу Петрова II (тип N).

2. Найти малые поправки к тензору R_{ik} при произвольной «невозмущенной» метрике $g_{ik}^{(0)}$.

Решение. Поправки к символам Кристоффеля выражаются через $\delta g_{ik}=h_{ik}$ согласно

$$\delta\Gamma^i_{kl}=\frac{1}{2}\left(h^i_{k;\,l}+h^i_{l;\,k}-h_{kl}{}^{;\,i}\right),$$

в чем можно убедиться прямым вычислением (здесь и ниже все операции поднимания и опускания индексов, а также ковариантные дифференцирования производятся с помощью метрики $g_{ik}^{(0)}$). Для поправок к тензору кривизны получается

$$\delta R^i_{klm}=\frac{1}{2}\left(h^i_{k;\,m;\,l}+h^i_{m;\,k;\,l}-h_{km}{}^{;\,i}{}_{;\,l}-h^i_{k;\,l;\,m}-h^i_{l;\,k;\,m}+h_{kl}{}^{;\,i}{}_{;\,m}\right).$$

Отсюда поправки к тензору Риччи:

$$\delta R_{ik}=\delta R^l_{ilk}=\frac{1}{2}\left(h^l_{i;\,k;\,l}+h^l_{k;\,i;\,l}-h_{ik}{}^{;\,l}{}_{;\,l}-h_{;\,i;\,k}\right). \tag{1}$$

Из соотношения

$$R^{(0)k}_i+\delta R^k_i=\left(R^{(0)}_{il}+\delta R_{il}\right)\left(g^{(0)\,kl}-h^{kl}\right)$$

имеем для поправок к смешанным компонентам R^k_i:

$$\delta R^k_i=g^{(0)\,kl}\,\delta R_{il}-h^{kl}R^{(0)}_{il}. \tag{2}$$

§ 103. Точные решения уравнений гравитационного поля, зависящие от одной переменной

В этом параграфе мы рассмотрим возможные типы точных решений уравнений гравитационного поля в пустоте, в которых все компоненты метрического тензора оказываются при соответствующем

выборе системы отсчета функциями лишь одной переменной[1]). Эта переменная может иметь как временнóй, так и пространственный характер. Будем считать сначала для определенности, что она имеет временнóй характер, и обозначим ее как $x^0 = t$[2]).

Как мы увидим, существенно различные типы решений получаются в зависимости от того, возможен или нет такой выбор системы отсчета, при котором все компоненты $g_{0\alpha} = 0$ и в то же время все остальные компоненты по-прежнему зависели бы лишь от одной переменной.

Последнее условие допускает, очевидно, преобразование координат x^α вида

$$x^\alpha \to x^\alpha + \varphi^\alpha(t),$$

где φ^α — произвольные функции t. При этом

$$g_{0\alpha} \to g_{0\alpha} + g_{\alpha\beta}\dot{\varphi}^\beta$$

(точка означает дифференцирование по t). Если определитель $|g_{\alpha\beta}| \neq 0$, то система уравнений

$$g_{0\alpha} + g_{\alpha\beta}\dot{\varphi}^\beta = 0 \tag{103,1}$$

определит функции $\varphi^\alpha(t)$, осуществляющие преобразование к системе отсчета с $g_{0\alpha} = 0$. Преобразованием переменной t согласно $\sqrt{g_{00}}\,dt \to dt$ можно затем обратить g_{00} в единицу, так что мы получим синхронную систему отсчета, в которой

$$g_{00} = 1, \quad g_{0\alpha} = 0, \quad g_{\alpha\beta} = -\gamma_{\alpha\beta}(t). \tag{103,2}$$

Теперь мы можем воспользоваться уравнениями Эйнштейна в виде (99,11—13). Поскольку величины $\gamma_{\alpha\beta}$, а с ними и компоненты трехмерного тензора $\varkappa_{\alpha\beta} = \dot{\gamma}_{\alpha\beta}$ не зависят от координат x^α, то $R_{0\alpha} \equiv 0$. По той же причине $P_{\alpha\beta} \equiv 0$, и в результате уравнения гравитационного поля в пустоте сводятся к следующей системе:

$$\dot{\varkappa}_\alpha^\alpha + \frac{1}{2}\varkappa_\alpha^\beta \varkappa_\beta^\alpha = 0, \tag{103,3}$$

$$(\sqrt{\gamma}\,\varkappa_\alpha^\beta)^{\cdot} = 0. \tag{103,4}$$

Из (103,4) следует, что

$$\sqrt{\gamma}\,\varkappa_\alpha^\beta = 2\lambda_\alpha^\beta, \tag{103,5}$$

где λ_α^β — постоянные величины. Упрощая по индексам α и β, получим:

$$\varkappa_\alpha^\alpha = \frac{\dot{\gamma}}{\gamma} = \frac{2}{\sqrt{\gamma}}\lambda_\alpha^\alpha,$$

---

[1]) Ряд точных решений уравнений поля в пустоте, зависящих от большого числа переменных, найден в работах: *A. Taub*, Ann. Math. **53**, 472 (1951), *B. K. Harrison*, Phys. Rev. **116**, 1285 (1959).

[2]) В этом параграфе для упрощения записи формул полагаем $c = 1$.

откуда видно, что $\gamma = \mathrm{const}\, t^2$. Без ограничения общности можно положить $\mathrm{const} = 1$ (это достигается просто изменением масштаба координат x^α); тогда $\lambda_\alpha^\alpha = 1$. Подстановка (103,5) в уравнение (103,3) дает теперь соотношение

$$\lambda_\alpha^\beta \lambda_\beta^\alpha = 1, \qquad (103,6)$$

связывающее между собой постоянные λ_α^β.

Далее, опустив в (103,5) индекс β, перепишем эти равенства в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений для $\gamma_{\alpha\beta}$:

$$\dot{\gamma}_{\alpha\beta} = \frac{2}{t}\, \lambda_\alpha^\gamma \gamma_{\gamma\beta}. \qquad (103.7)$$

Совокупность коэффициентов λ_α^γ можно рассматривать как матрицу некоторой линейной подстановки. Путем соответствующего линейного преобразования координат x^1, x^2, x^3 (или, что эквивалентно, величин $g_{1\beta}$, $g_{2\beta}$, $g_{3\beta}$) можно, вообще говоря, привести эту матрицу к диагональному виду. Обозначим ее главные значения посредством p_1, p_2, p_3 и будем считать, что все они вещественны и различны (о других случаях — см. ниже); единичные векторы в соответствующих главных направлениях пусть будут $\mathbf{n}^{(1)}$, $\mathbf{n}^{(2)}$, $\mathbf{n}^{(3)}$. Тогда решение уравнений (103,7) можно представить в виде:

$$\gamma_{\alpha\beta} = t^{2p_1} n_\alpha^{(1)} n_\beta^{(1)} + t^{2p_2} n_\alpha^{(2)} n_\beta^{(2)} + t^{2p_3} n_\alpha^{(3)} n_\beta^{(3)} \qquad (103,8)$$

(постоянные коэффициенты при степенях t можно обратить в единицу путем соответствующего выбора масштаба координат). Наконец, выбрав направления векторов $\mathbf{n}^{(1)}$, $\mathbf{n}^{(2)}$, $\mathbf{n}^{(3)}$ в качестве окончательного направления осей (назовем их x, y, z), приведем метрику к виду (*Е. Казнер*, 1922):

$$ds^2 = dt^2 - t^{2p_1}\, dx^2 - t^{2p_2}\, dy^2 - t^{2p_3}\, dz^2. \qquad (103,9)$$

Здесь p_1, p_2, p_3 — любые три числа, удовлетворяющие двум соотношениям:

$$p_1 + p_2 + p_3 = 1, \quad p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = 1 \qquad (103,10)$$

[первое следует из того, что $-g = t^2$, а второе получается затем из (103,6)] [1]).

Три числа p_1, p_2, p_3 не могут, очевидно, иметь одинаковых значений. Равенство двух из них имеет место в тройках значений 0, 0, 1 и $-1/3$, $2/3$, $2/3$. Во всех других случаях числа p_1, p_2, p_3 различны, причем одно из них отрицательно, а два других положительны.

---

[1]) Решение (103,9) является в действительности частным случаем более общего класса решений, содержащего для поля в пустоте три, а при наличии материи — семь физически различных произвольных функций пространственных координат. См. *Е. М. Лифшиц, И. М. Халатников*, ЖЭТФ **39**, 800 (1960).

Если расположить их в порядке $p_1 < p_2 < p_3$, то их значения будут лежать в интервалах [1])

$$-\frac{1}{3} \leqslant p_1 \leqslant 0, \quad 0 \leqslant p_2 \leqslant \frac{2}{3}, \quad \frac{2}{3} \leqslant p_3 \leqslant 1.$$

Таким образом, метрика (103,9) соответствует однородному, но анизотропному пространству, все объемы в котором растут (с увеличением времени) пропорционально t, причем линейные расстояния вдоль двух осей (y, z) увеличиваются, а вдоль одной (x) убывают. Момент $t = 0$ является особой точкой решения; метрика имеет в ней особенность, не устранимую никаким преобразованием системы отсчета. Исключением является лишь случай $p_1 = p_2 = 0$, $p_3 = 1$; при этих значениях мы имеем дело просто с плоским пространством-временем: преобразованием $t \operatorname{sh} z = \zeta$, $t \operatorname{ch} z = \tau$ метрика (103,9) приводится к галилеевой.

Решение типа (103,9) существует и в том случае, когда переменная в нем является пространственной; при этом надо только соответствующим образом изменить знаки, например:

$$ds^2 = x^{2p_1} dt^2 - dx^2 - x^{2p_2} dy^2 - x^{2p_3} dz^2.$$

В этом случае, однако, существуют также и решения другого вида, возникающие, когда матрица λ_α^β в уравнениях (103,7) имеет комплексные или совпадающие главные значения (см. задачи). В случае временно́й переменной t эти решения оказываются невозможными в силу того, что определитель g в них не удовлетворял бы необходимому условию $g < 0$.

Совершенно другой тип решений соответствует случаю, когда определитель фигурирующего в уравнениях (103,1) тензора $g_{\alpha\beta}$ равен нулю. В этом случае системы отсчета, удовлетворяющей условиям (103,2), не существует. Вместо этого можно теперь выбрать систему отсчета так, чтобы было

$$g_{10} = 1, \quad g_{00} = g_{20} = g_{30} = 0, \quad g_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}(x^0),$$

причем определитель $|g_{\alpha\beta}| = 0$ (переменная x^0 имеет при этом «световой» характер: при $dx^\alpha = 0$, $dx^0 \neq 0$ интервал ds обращается в нуль; мы обозначим эту переменную как $x^0 = \eta$). Соответствующий элемент интервала можно представить в виде

$$ds^2 = 2dx^1 d\eta + g_{ab}(dx^a + g^a dx^1)(dx^b + g^b dx^1).$$

---

[1]) Решения алгебраических уравнений (103,10) могут быть представлены в параметрическом виде

$$p_1 = \frac{-s}{1+s+s^2}, \quad p_2 = \frac{s(1+s)}{1+s+s^2}, \quad p_3 = \frac{1+s}{1+s+s^2},$$

причем параметр s пробегает значения от 0 до 1.

Здесь и ниже индексы $a, b, c, \ldots$ пробегают значения 2, 3; g_{ab} можно рассматривать как двухмерный тензор, а две величины g^a — как компоненты двухмерного вектора. Вычисление величин R_{ab} приводит к следующим уравнениям поля:

$$R_{ab} = -\frac{1}{2} g_{ac} \dot{g}^c g_{bd} \dot{g}^d = 0$$

(точка означает дифференцирование по η). Отсюда следует, что $g_{ac}\dot{g}^c = 0$ или $\dot{g}^c = 0$, т. е. $g^c = \mathrm{const}$. Преобразованием $x^a + g^a x^1 \rightarrow x^a$ можно поэтому привести рассматриваемую метрику к виду

$$ds^2 = 2dx^1\, d\eta + g_{ab}(\eta)\, dx^a\, dx^b. \qquad (103{,}11)$$

Определитель $-g$ этого метрического тензора совпадает с определителем $|g_{ab}|$, а из всех символов Кристоффеля отличны от нуля лишь следующие:

$$\Gamma^a_{b0} = \frac{1}{2} \varkappa^a_b, \quad \Gamma^1_{ab} = -\frac{1}{2} \varkappa_{ab},$$

где мы ввели двухмерный тензор $\varkappa_{ab} = \dot{g}_{ab}$. Из всех компонент тензора R_{ik} не обращается тождественно в нуль лишь R_{00}, так что имеем уравнение

$$R_{00} = \frac{1}{2} \dot{\varkappa}^a_a + \frac{1}{4} \varkappa^b_a \varkappa^a_b = 0. \qquad (103{,}12)$$

Таким образом, три функции $g_{22}(\eta)$, $g_{23}(\eta)$, $g_{33}(\eta)$ должны удовлетворять всего одному уравнению. Поэтому две из них могут быть заданы произвольно. Удобно представить уравнение (103,12) в другом виде, написав величины g_{ab} в виде

$$g_{ab} = -\chi^2 \gamma_{ab}, \quad |\gamma_{ab}| = 1. \qquad (103{,}13)$$

Тогда определитель $-g = |g_{ab}| = \chi^4$ и подстановка в (103,12) дает после простого преобразования

$$\ddot{\chi} + \frac{1}{8} (\dot{\gamma}_{ac}\gamma^{bc})(\dot{\gamma}_{bd}\gamma^{ad})\chi = 0 \qquad (103{,}14)$$

(γ^{ab} — двухмерный тензор, обратный тензору γ_{ab}). Если задать произвольные функции $\gamma_{ab}(\eta)$ (связанные друг с другом соотношением $|\gamma_{ab}| = 1$), этим уравнением определится функция $\chi(\eta)$.

Мы приходим, таким образом, к решению, содержащему две произвольные функции. Легко видеть, что оно представляет собой обобщение рассмотренной в § 102 слабой плоской гравитационной

волны (распространяющейся в одном направлении)[1]). Последняя получается, если произвести преобразование

$$\eta = \frac{t+x}{\sqrt{2}}, \quad x^1 = \frac{t-x}{\sqrt{2}}$$

и положить $\gamma_{ab} = \delta_{ab} + h_{ab}(\eta)$ (где h_{ab} — малые величины, подчиненные условию $h_{22} + h_{33} = 0$) и $\chi = 1$; постоянное значение χ удовлетворяет уравнению (103,14), если пренебречь в нем малыми членами второго порядка.

Пусть через какую-либо точку x пространства проходит слабая гравитационная волна конечной протяженности («волновой пакет»). До начала прохождения имеем $h_{ab} = 0$, $\chi = 1$; после конца прохождения снова $h_{ab} = 0$, $\partial^2\chi/\partial t^2 = 0$, но учет членов второго порядка в уравнении (103,14) приведет к появлению отличного от нуля отрицательного значения $\partial\chi/\partial t$:

$$\frac{\partial\chi}{\partial t} \approx -\frac{1}{8}\int\left(\frac{\partial h_{ab}}{\partial t}\right)^2 dt < 0$$

(интеграл берется по времени прохождения волны). Поэтому после прохождения волны будет $\chi = 1 - \mathrm{const}\cdot t$ и по истечении конечного промежутка времени χ изменит знак. Но обращение χ в нуль есть обращение в нуль метрического определителя g, т. е. особенность в метрике. Эта особенность, однако, не имеет физического характера; она связана лишь с недостатками системы отсчета, «испорченной» проходящей гравитационной волной, и может быть устранена надлежащим ее преобразованием; после прохождения волны пространство-время оказывается в действительности снова плоским.

В этом можно убедиться непосредственным образом. Если отсчитывать значения переменной η от ее значения, соответствующего особой точке, то $\chi = \eta$, так что

$$ds^2 = 2d\eta\, dx^1 - \eta^2\left[(dx^2)^2 + (dx^3)^2\right].$$

Легко проверить, что для этой метрики $R_{iklm} = 0$, так что соответствующее пространство-время — плоское. Действительно, после преобразования

$$\eta x^2 = y, \quad \eta x^3 = z, \quad x^1 = \xi - \frac{y^2+z^2}{2\eta}$$

получаем:

$$ds^2 = 2d\eta\, d\xi - dy^2 - dz^2,$$

---

[1]) Возможность такого обобщения была впервые указана *И. Робинсоном* и *Г. Бонди* (1957).

Упомянем также работы, в которых найдены решения родственного характера от большего числа переменных: *A. Peres*, Phys. Rev. Letts. **3**, 571 (1959); *I. Robinson, A. Trautman*, Phys. Rev. Letts. **4**, 431 (1960).

и подстановка $\eta=\frac{t+x}{\sqrt{2}}$, $\xi=\frac{t-x}{\sqrt{2}}$ окончательно приводит метрику к галилеевой форме.

Это свойство гравитационной волны — возникновение фиктивной особенности — не связано, конечно, с ее слабостью и присуще также и общему решению уравнения (103,12)[1]. Как и в рассмотренном примере, вблизи особенности $\chi\sim\eta$, т. е. $-g\sim\eta^4$.

Наконец укажем, что наряду с описанным общим решением уравнение (103,12) имеет также особые решения вида

$$ds^2=2\,d\eta\,dx^1-\eta^{2s_2}(dx^2)^2-\eta^{2s_3}(dx^3)^2, \qquad (100a,15)$$

где s_2, s_3 — числа, связанные друг с другом соотношением

$$s_2^2+s_3^2=s_2+s_3.$$

В этих решениях метрика имеет истинную особую точку (при $\eta=0$), неустранимую преобразованием системы отсчета.

Задачи

1. Найти решение уравнений (103,7), соответствующее случаю, когда матрица λ_α^β имеет одно вещественное (p_3) и два комплексных ($p_{1,2}=p'\pm ip''$) главных значения.

Решение. В этом случае переменная x^0, от которой зависят все величины, должна иметь пространственный характер; обозначим ее как $x^0=x$. Соответственно в (103,2) должно быть теперь $g_{00}=-1$. Уравнения же (103,3) и (103,4) не меняются.

Векторы $\mathbf{n}^{(1)}$, $\mathbf{n}^{(2)}$ в (103,8) становятся комплексными: $\mathbf{n}^{(1,2)}=(\mathbf{n}'\pm i\mathbf{n}'')/\sqrt{2}$, где $\mathbf{n}'$, $\mathbf{n}''$ — единичные векторы. Выбирая оси x^1, x^2, x^3 в направлениях $\mathbf{n}'$, $\mathbf{n}''$, $\mathbf{n}^{(3)}$, получим решение в виде

$$-g_{11}=g_{22}=x^{2p'}\cos\left(2p''\ln\frac{x}{a}\right),\quad g_{12}=-x^{2p'}\sin\left(2p''\ln\frac{x}{a}\right),$$
$$g_{33}=-x^{2p_3},\quad -g=-g_{00}\,|g_{\alpha\beta}|=x^2,$$

где a — постоянная (которую уже нельзя устранить выбором масштаба вдоль оси x, не изменив других коэффициентов в написанных выражениях). Числа p_1, p_2, p_3 по-прежнему удовлетворяют соотношениям (103,10), причем вещественное число p_3 либо меньше $-1/3$, либо больше единицы.

2. То же в случае совпадающих двух главных значений ($p_2=p_3$).

Решение. Как известно из общей теории линейных дифференциальных уравнений, в этом случае система (103,7) может быть приведена к следующему каноническому виду:

$$\dot g_{11}=\frac{2p_1}{x}g_{11},\quad \dot g_{2\alpha}=\frac{2p_2}{x}g_{2\alpha},\quad \dot g_{3\alpha}=\frac{2p_2}{x}g_{3\alpha}+\frac{\lambda}{x}g_{2\alpha},\ \alpha=2,3,$$

[1] Это можно показать при помощи уравнения (103,12) в точности тем же способом, как это было сделано в § 100 для аналогичного трехмерного уравнения.

где λ — постоянная. При $\lambda=0$ мы возвращаемся к (103,9). При $\lambda \neq 0$ можно положить $\lambda=1$; тогда

$$g_{11}=-t^{2p_1},\quad g_{2\alpha}=a_\alpha x^{2p_2},\quad g_{3\alpha}=a_\alpha x^{2p_2}\ln x+b_\alpha x^{2p_2}.$$

Из условия $g_{32}=g_{23}$ находим, что $a_2=0$, $a_3=b_2$. Надлежащим выбором масштаба вдоль осей x^2, x^3 окончательно приводим метрику к следующему виду:

$$ds^2=-dx^2-x^{2p_1}(dx^1)^2\pm 2x^{2p_2}dx^2\,dx^3\pm x^{2p_2}\ln\frac{x}{a}(dx^3)^2.$$

Числа p_1, p_2 могут иметь значения 1, 0 или $-1/3$, $2/3$.

3. Найти движение материи (с уравнением состояния $p=\varepsilon/3$), равномерно распределенной в пространстве с метрикой (103,9) при малых t; обратным влиянием материи на гравитационное поле пренебрегаем.

Решение. Воспользуемся гидродинамическими уравнениями движения

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{-g}\,\sigma u^i\right)=0,$$

$$(p+\varepsilon)\,u^k\left(\frac{\partial u_i}{\partial x^k}-\frac{1}{2}u^l\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i}\right)=-\frac{\partial p}{\partial x^i}-u_iu^k\frac{\partial p}{\partial x^k},$$

содержащимися в уравнениях $T^k_{i;k}=0$ [1]. Здесь σ — плотность энтропии; для уравнения состояния $p=\varepsilon/3$ имеем $\sigma\sim\varepsilon^{3/4}$. В рассматриваемом случае все величины зависят только от времени и эти уравнения дают

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(tu_0\varepsilon^{3/4}\right)=0,\quad 4\varepsilon\frac{\partial u_\alpha}{\partial t}+u_\alpha\frac{\partial\varepsilon}{\partial t}=0,$$

откуда

$$tu_0\varepsilon^{3/4}=\text{const},\quad u_\alpha\varepsilon^{1/4}=\text{const},$$

а из тождества $u_iu^i=1$ имеем:

$$u_0^2\approx u_3u^3=u_3^2t^{-2p_3}$$

при малых t оставляем лишь член с наибольшей степенью $1/t$). Из этих соотношений находим:

$$\varepsilon=\varepsilon^{(0)}t^{-2(1-p_3)},\quad u_\alpha=u_\alpha^{(0)}t^{\frac{1-p_3}{2}},$$

где $\varepsilon^{(0)}$, $u_\alpha^{(0)}$ — постоянные. При $t\to 0$ плотность энергии $\varepsilon\to\infty$. Направление трехмерной скорости v^α стремится к оси z ($v^3\sim t^{-2p_3}$, $v_3\gg v^1, v^2$), а ее величина ($v^2=v_\alpha v^\alpha$) стремится к скорости света по закону

$$\sqrt{1-v^2}\sim t^{\frac{3p_3-1}{2}}.$$

§ 104. Гравитационное поле вдали от тел

Рассмотрим стационарное гравитационное поле на больших расстояниях r от создающего его тела, и определим первые члены его разложения по степеням $1/r$.

---

[1] См. «Механика сплошных сред», 2-е изд., § 125.

В первом приближении, с точностью до членов порядка $1/r$, малые добавки к галилеевым значениям даются соответствующими членами разложения шварцшильдовского решения (97,14), которые можно представить в виде (101,17):

$$h_{00}^{(1)} = -\frac{2km}{c^2 r}, \qquad h_{\alpha\beta}^{(1)} = -\frac{2km}{c^2}\frac{n_\alpha n_\beta}{r}, \qquad h_{0\alpha}^{(1)} = 0. \qquad (104,1)$$

Среди членов второго порядка, пропорциональных $1/r^2$, имеются члены двоякого происхождения. Часть членов возникает в результате нелинейности уравнений тяготения из членов первого порядка. Поскольку последние зависят только от полной массы (но не от каких-либо других характеристик) тела, то только от нее же зависят и эти члены второго порядка. Ясно поэтому, что и эти члены можно получить путем разложения шварцшильдовского решения (97,14), откуда находим [1]):

$$h_{00}^{(2)} = 0, \qquad h_{\alpha\beta}^{(2)} = -\frac{4k^2m^2}{c^4 r^2} n_\alpha n_\beta. \qquad (104,2)$$

Остальные члены второго порядка возникают как соответствующие решения уже линеаризованных уравнений поля. Для их вычисления воспользуемся линеаризованными уравнениями в форме (102,8). В стационарном случае волновое уравнение сводится к уравнению Лапласа

$$\Delta h_i^k = 0. \qquad (104,3)$$

При этом величины h_i^k связаны дополнительными условиями (102,5), принимающими в силу независимости h_i^k от времени следующий вид:

$$\frac{\partial}{\partial x^\beta}\left(h_\alpha^\beta - \frac{1}{2} h \delta_\alpha^\beta\right) = 0, \qquad (104,4)$$

$$\frac{\partial}{\partial x^\beta} h_0^\beta = 0. \qquad (104,5)$$

---

[1]) Следует обратить внимание на то, что конкретный вид для $h_{\alpha\beta}^{(1)}$, $h_{\alpha\beta}^{(2)}$, $h_{00}^{(2)}$ зависит от конкретного выбора пространственных координат (галилеевых на бесконечности); их вид, приведенный в тексте, соответствует именно тому определению r, при котором шварцшильдовское решение дается формулой (97,14). Так, преобразование $x'^\alpha = x^\alpha + \xi^\alpha$, $\xi^\alpha = a x^\alpha / 2r$ приводит [см. (102, 6)] к добавлению к $h_{\alpha\beta}^{(1)}$ члена $a(\delta_{\alpha\beta} - n_\alpha n_\beta)/r$ и при соответствующем выборе a можно получить:

$$h_{\alpha\beta}^{(1)} = -\frac{2km}{c^2}\frac{\delta_{\alpha\beta}}{r}, \qquad (104,1а)$$

что соответствует шварцшильдовскому решению в изотропных координатах (см. задачу 3 § 97).

Компонента h_{00} должна даваться скалярным решением трехмерного уравнения Лапласа. Такое решение, пропорциональное $1/r^2$, имеет, как известно, вид $\mathbf{a}\nabla\frac{1}{r}$, где $\mathbf{a}$ — постоянный вектор. Но член такого вида в h_{00} всегда может быть ликвидирован путем простого смещения начала координат в члене первого порядка по $1/r$. Таким образом, наличие такого члена в h_{00} свидетельствовало бы лишь о неудачном выборе начала координат и потому не представляет интереса.

Компоненты $h_{0\alpha}$ даются векторным решением уравнения Лапласа, т. е. должны иметь вид

$$h_{0\alpha}=\lambda_{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial x^\beta}\frac{1}{r},$$

где $\lambda_{\alpha\beta}$ — постоянный тензор. Условие (104,5) дает:

$$\lambda_{\alpha\beta}\frac{\partial^2}{\partial x^\alpha \partial x^\beta}\frac{1}{r}=0,$$

откуда следует, что $\lambda_{\alpha\beta}$ должен иметь вид

$$\lambda_{\alpha\beta}=a_{\alpha\beta}+\lambda\delta_{\alpha\beta},$$

где $a_{\alpha\beta}$ — антисимметричный тензор. Но решение вида $\lambda\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\frac{1}{r}$ может быть исключено преобразованием $x'^0=x^0+\xi^0$ с $\xi^0=\lambda/r$ [ср. (102,6)]. Поэтому реальным смыслом обладает лишь решение вида

$$h_{0\alpha}=a_{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial x^\beta}\frac{1}{r},\quad a_{\alpha\beta}=-a_{\beta\alpha}. \tag{104,6}$$

Наконец, аналогичными, хотя и более громоздкими рассуждениями можно показать, что надлежащим преобразованием пространственных координат всегда можно исключить величины $h_{\alpha\beta}$, даваемые тензорным (симметричным по α, β) решением уравнения Лапласа.

Остается выяснить смысл тензора $a_{\alpha\beta}$ в (104,6). Для этого вычислим по формуле (101,16) с помощью найденных выражений $h_{0\alpha}$ (все остальные h_{ik} при этом можно считать отсутствующими) тензор $M_{\alpha\beta}$ полного момента импульса.

С точностью до членов первого порядка по $h_{0\alpha}$, имеем из формулы (101,2) (замечаем, что $g^{\alpha0}=-h^{\alpha0}=h_{\alpha0}$):

$$h^{\alpha0\beta}=\frac{c^4}{16\pi k}\frac{\partial}{\partial x^\gamma}\left(g^{\alpha0}g^{\beta\gamma}-g^{\gamma0}g^{\alpha\beta}\right)=-\frac{c^4}{16\pi k}\frac{\partial}{\partial x^\gamma}\left(h_{\alpha0}\delta_{\beta\gamma}-h_{\gamma0}\delta_{\alpha\beta}\right)=$$

$$=-\frac{c^4}{16\pi k}\frac{\partial}{\partial x^\beta}h_{\alpha0}=-\frac{c^4}{16\pi k}a_{\alpha\gamma}\frac{\partial^2}{\partial x^\beta\partial x^\gamma}\frac{1}{r}=-\frac{c^4}{16\pi k}a_{\alpha\gamma}\frac{3n_\beta n_\gamma-\delta_{\beta\gamma}}{r^2}$$

($\mathbf{n}$ — единичный вектор в направлении радиус-вектора). С помощью этих выражений находим, производя интегрирование по поверхности

сферы радиуса $r\ (df_\gamma = n_\gamma r^2 do)$:

$$\frac{1}{c}\int (x^\alpha h^{\beta 0\gamma} - x^\beta h^{\alpha 0\gamma})\, df_\gamma = -\frac{c^3}{8\pi k}\int (n_\alpha n_\gamma a_{\beta\gamma} - n_\beta n_\gamma a_{\alpha\gamma})\, do =$$
$$= -\frac{c^3}{8\pi k}\frac{4\pi}{3}(\delta_{\alpha\gamma} a_{\beta\gamma} - \delta_{\beta\gamma} a_{\alpha\gamma}) = \frac{c^3}{3k} a_{\alpha\beta}.$$

Аналогичное вычисление дает:

$$\frac{1}{c}\int \lambda^{\alpha 0\gamma\beta}\, df_\gamma = -\frac{c^3}{16\pi k}\int (h_{\alpha 0} df_\beta - h_{\beta 0} df_\alpha) = \frac{c^3}{6k} a_{\alpha\beta}.$$

Складывая оба результата, получим:

$$M_{\alpha\beta} = \frac{c^3}{2k} a_{\alpha\beta}.$$

Таким образом, окончательно имеем:

$$h_{0\alpha}^{(2)} = -\frac{2k}{c^3} M_{\alpha\beta}\frac{n_\beta}{r^2}. \qquad (104,7)$$

Подчеркнем, что в общем случае, когда поле вблизи тел может быть не слабым, $M_{\alpha\beta}$ есть момент импульса тела вместе с гравитационным полем. Лишь в случае, когда поле является слабым на всех расстояниях, его вкладом в момент можно пренебречь. Заметим также, что в случае вращающегося тела сферической формы, создающего везде слабое поле, формула (104,7) справедлива во всем пространстве вне тела.

Формулы (104,1), (104,2) и (104,7) решают поставленный вопрос с точностью до членов порядка $1/r^2$. Ковариантные компоненты метрического тензора

$$g_{ik} = g_{ik}^{(0)} + h_{ik}^{(1)} + h_{ik}^{(2)}. \qquad (104,8)$$

При этом контравариантные компоненты с той же точностью равны

$$g^{ik} = g^{(0)ik} - h^{(1)ik} - h^{(2)ik} + h^{(1)i}{}_l h^{(1)lk}. \qquad (104,9)$$

Формула (104,7) может быть переписана в векторном виде как[1])

$$\mathbf{g} = \frac{2k}{c^3 r^2}[\mathbf{nM}]. \qquad (104,10)$$

В задаче 1 к § 89 было показано, что в стационарном гравитационном поле на частицу действует «кориолисова сила», такая же, которая действовала бы на частицу, находящуюся на теле, вращающемся с угловой скоростью $\boldsymbol{\Omega} = \frac{c}{2}\sqrt{g_{00}}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{g}$. Поэтому мы

[1]) С рассматриваемой точностью вектор $g_\alpha = -g_{0\alpha}/g_{00} \approx -g_{0\alpha}$. По той же причине в определениях векторного произведения и ротора (см. примечание на стр. 325) надо положить $\gamma = 1$, так что их можно понимать в обычном для декартовых векторов смысле.

можем сказать, что в поле, создаваемом вращающимся телом (с полным моментом **M**) на частицу вдали от тела действует сила, эквивалентная кориолисовой силе, появляющейся при вращении с угловой скоростью

$$\mathbf{\Omega} \approx \frac{c}{2} \operatorname{rot} \mathbf{g} = \frac{k}{c^2 r^3} [\mathbf{M} - 3\mathbf{n} (\mathbf{M}\mathbf{n})].$$

Задача

Определить систематическое («вековое») смещение орбиты частицы, движущейся в поле центрального тела, связанное с вращением последнего (*И. Лензе, Г. Тирринг*, 1918).

Решение. Ввиду малости всех релятивистских эффектов они накладываются друг на друга линейно, и при вычислении эффектов, происходящих от вращения центрального тела, можно пренебречь рассмотренным в § 98 влиянием неньютоновости центрально-симметрического силового поля; другими словами, можно производить вычисления, считая из всех h_{ik} отличными от нуля лишь $h_{0\alpha}$.

Ориентация классической орбиты частицы определяется двумя сохраняющимися векторами: моментом импульса частицы $\mathbf{M} = [\mathbf{r}\mathbf{p}]$ и вектором

$$\mathbf{A} = \left[\frac{\mathbf{p}}{m} \mathbf{M}\right] - \frac{kmm'\mathbf{r}}{r},$$

сохранение которого специфично для ньютонова поля $\varphi = -km'/r$ (m' — масса центрального тела); см. I § 15. Вектор **M** перпендикулярен к плоскости орбиты, а вектор **A** направлен вдоль большой полуоси эллипса в сторону перигелия (и по величине равен $kmm'e$, где e — эксцентриситет орбиты). Искомое вековое смещение орбиты можно описывать как изменение направления этих векторов.

Функция Лагранжа частицы, движущейся в поле (104,10):

$$L = -mc\frac{ds}{dt} = L_0 + \delta L, \quad \delta L = mc\mathbf{g}\mathbf{v} = \frac{2km}{c^2 r^3} (\mathbf{M}' [\mathbf{v}\mathbf{r}]) \qquad (1)$$

(момент центрального тела обозначаем здесь посредством **M′** в отличие от момента частицы **M**). Отсюда функция Гамильтона (ср. I § 40)

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \delta\mathcal{H}, \quad \delta\mathcal{H} = \frac{2k}{c^2 r^3} ([\mathbf{M}' [\mathbf{r}\mathbf{p}]).$$

Вычисляя производную $\dot{\mathbf{M}} = [\dot{\mathbf{r}}\mathbf{p}] + [\mathbf{r}\dot{\mathbf{p}}]$ с помощью уравнений Гамильтона $\dot{\mathbf{r}} = \partial\mathcal{H}/\partial\mathbf{p}$, $\dot{\mathbf{p}} = -\partial\mathcal{H}/\partial\mathbf{r}$, получим:

$$\dot{\mathbf{M}} = \frac{2k}{c^2 r^3} [\mathbf{M}'\mathbf{M}]. \qquad (2)$$

Интересуясь вековым ходом изменения **M**, мы должны усреднить это выражение по периоду T обращения частицы. Усреднение удобно произвести с помощью параметрического представления зависимости r от времени при движении по эллиптической орбите в виде

$$r = a(1 - e\cos\xi), \quad t = \frac{T}{2\pi}(\xi - e\sin\xi)$$

(a и e — большая полуось и эксцентриситет эллипса, см. I § 15):

$$\overline{r^{-3}}=\frac{1}{T}\int_0^T\frac{dt}{r^3}=\frac{1}{2\pi a^3}\int_0^{2\pi}\frac{d\xi}{(1-e\cos\xi)^2}=\frac{1}{a^3(1-e^2)^{3/2}}.$$

Таким образом, вековое изменение **M** дается формулой

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt}=\frac{2k\,[\mathbf{M}'\mathbf{M}]}{c^2a^3\,(1-e^2)^{3/2}},\tag{3}$$

т. е. вектор **M** вращается вокруг оси вращения центрального тела, оставаясь неизменным по величине.

Аналогичное вычисление для вектора **A** дает:

$$\dot{\mathbf{A}}=\frac{2k}{c^2r^3}\,[\mathbf{M}'\mathbf{A}]+\frac{6k}{c^2mr^5}\,(\mathbf{M}\mathbf{M}')\,[\mathbf{r}\mathbf{M}].$$

Усреднение этого выражения производится аналогично тому, как это было сделано выше; при этом из соображений симметрии заранее очевидно, что усредненный вектор $\overline{\mathbf{r}/r^5}$ направлен вдоль большой полуоси эллипса, т. е. вдоль направления вектора **A**. Вычисление приводит к следующему выражению для векового изменения вектора **A**:

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt}=[\boldsymbol{\Omega}\mathbf{A}],\quad \boldsymbol{\Omega}=\frac{2kM'}{c^2a^3\,(1-e^2)^{3/2}}\left\{\mathbf{n}'-3\mathbf{n}\,(\mathbf{n}\mathbf{n}')\right\}\tag{4}$$

(**n**, **n**′ — единичные векторы в направлении **M** и **M**′), т. е. вектор **A** вращается с угловой скоростью $\boldsymbol{\Omega}$, оставаясь неизменным по величине; последнее обстоятельство означает, что эксцентриситет орбиты не испытывает векового изменения.

Формулу (3) можно написать в виде

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt}=[\boldsymbol{\Omega}\mathbf{M}]$$

с тем же $\boldsymbol{\Omega}$, что и в (4); другими словами, $\boldsymbol{\Omega}$ есть угловая скорость вращения эллипса «как целого». Это вращение включает в себя как дополнительное (по отношению к рассмотренному в § 98) смещение перигелия орбиты, так и вековое вращение ее плоскости вокруг направления оси тела (последний эффект отсутствует, если плоскость орбиты совпадает с экваториальной плоскостью центрального тела).

Для сравнения укажем, что рассмотренному в § 98 эффекту соответствует

$$\boldsymbol{\Omega}=\frac{6\pi km'}{c^2a\,(1-e^2)\,T}\,\mathbf{n}.$$

§ 105. Излучение гравитационных волн

Рассмотрим слабое гравитационное поле, создаваемое телами, движущимися со скоростями, малыми по сравнению со скоростью света.

Благодаря наличию материи уравнения гравитационного поля будут отличаться от простого волнового уравнения вида $\Box h_i^k=0$

(102,8) наличием в правой стороне равенства членов, происходящих от тензора энергии-импульса материи. Мы напишем эти уравнения в виде

$$\frac{1}{2}\Box\psi_i^k = \frac{8\pi k}{c^4}\tau_i^k, \qquad (105,1)$$

где мы ввели вместо h_i^k более удобные для этого случая величины

$$\psi_i^k = h_i^k - \frac{1}{2}\delta_i^k h,$$

а τ_i^k условно обозначает дополнительные выражения, получающиеся при переходе в точных уравнениях тяготения к случаю слабых полей в рассматриваемом приближении. Легко убедиться в том, что компоненты τ_0^0 и τ_α^0 получаются непосредственно из соответствующих компонент T_i^k путем выделения из них величин интересующего нас порядка малости; что же касается компонент τ_β^α, то они содержат наряду с членами, получающимися из T_β^α, также и члены второго порядка малости из $R_i^k - \frac{1}{2}\delta_i^k R$.

Величины ψ_i^k удовлетворяют условию (102,5) $\partial\psi_i^k/\partial x^k = 0$. Из (105,1) следует, что такое же уравнение имеет место и для τ_i^k.

$$\frac{\partial\tau_i^k}{\partial x^k} = 0. \qquad (105,2)$$

Это уравнение заменяет здесь общее соотношение $T_{i;\,k}^k = 0$.

Рассмотрим с помощью написанных уравнений вопрос об энергии, излучаемой движущимися телами в виде гравитационных волн. Решение этого вопроса требует определения гравитационного поля в «волновой зоне», т. е. на расстояниях, больших по сравнению с длиной излучаемых волн.

Все вычисления принципиально вполне аналогичны тем, которые мы производили для электромагнитных волн. Уравнения (105,1) слабого гравитационного поля по форме совпадают с уравнением запаздывающих потенциалов (§ 62). Поэтому их общее решение можно сразу написать в виде

$$\psi_i^k = -\frac{4k}{c^4}\int (\tau_i^k)_{t-R/c}\frac{dV}{R}. \qquad (105,3)$$

Поскольку скорости всех тел в системе малы, то для поля на больших расстояниях от системы можно написать (ср. §§ 66 и 67):

$$\psi_i^k = -\frac{4k}{c^4 R_0}\int (\tau_i^k)_{t-R_0/c}\, dV, \qquad (105,4)$$

где R_0 — расстояние от начала координат, расположенного где-нибудь внутри системы; индекс $t - R_0/c$ в подынтегральных выражениях мы будем ниже для краткости опускать.

Для вычисления этих интегралов воспользуемся уравнениями (105,2). Опуская индексы у τ_i^k и выделяя пространственные и временные компоненты, пишем (105,2) в виде

$$\frac{\partial \tau_{\alpha\gamma}}{\partial x^\gamma} - \frac{\partial \tau_{\alpha 0}}{\partial x^0} = 0, \qquad \frac{\partial \tau_{0\gamma}}{\partial x^\gamma} - \frac{\partial \tau_{00}}{\partial x^0} = 0. \tag{105,5}$$

Умножив первое уравнение на x^β, проинтегрируем по всему пространству

$$\frac{\partial}{\partial x^0} \int \tau_{\alpha 0} x^\beta \, dV = \int \frac{\partial \tau_{\alpha\gamma}}{\partial x^\gamma} x^\beta dV = \int \frac{\partial (\tau_{\alpha\gamma} x^\beta)}{\partial x^\gamma} dV - \int \tau_{\alpha\beta} \, dV.$$

Поскольку на бесконечности $\tau_{ik} = 0$, то первый интеграл правой части, будучи преобразован по теореме Гаусса, исчезает. Взяв полусумму оставшегося равенства и его же с переставленными индексами, находим:

$$\int \tau_{\alpha\beta} dV = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^0} \int (\tau_{\alpha 0} x^\beta + \tau_{\beta 0} x^\alpha) \, dV.$$

Далее, умножим второе из уравнений (105,5) на $x^\alpha x^\beta$ и тоже проинтегрируем по всему пространству. Аналогичное преобразование приводит к равенству

$$\frac{\partial}{\partial x^0} \int \tau_{00} x^\alpha x^\beta dV = -\int (\tau_{\alpha 0} x^\beta + \tau_{\beta 0} x^\alpha) \, dV.$$

Сравнивая оба полученных результата, находим:

$$\int \tau_{\alpha\beta} dV = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x^0}\right)^2 \int \tau_{00} x^\alpha x^\beta \, dV. \tag{105,6}$$

Таким образом, интегралы от всех $\tau_{\alpha\beta}$ оказываются выраженными через интегралы, содержащие только компоненту τ_{00}. Но эта последняя, как указано выше, совпадает с соответствующей компонентой T_{00} тензора энергии-импульса, и с достаточной точностью [см. (96,1)] имеем:

$$\tau_{00} = \mu c^2. \tag{105,7}$$

Подставляя это в (105,6) и вводя время $t = x^0/c$, переписываем (105,4) в виде

$$\psi_{\alpha\beta} = -\frac{2k}{c^4 R_0} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int \mu x^\alpha x^\beta \, dV. \tag{105,8}$$

На больших расстояниях от тел можно рассматривать волну (в небольших участках пространства) как плоскую. Поэтому можно вычислить поток энергии, излучаемой системой, скажем, в направлении оси x^1, воспользовавшись формулой (102,11). В эту формулу

входят компоненты $h_{23} = \psi_{23}$ и $h_{22} - h_{33} = \psi_{22} - \psi_{33}$. Из (105,8) находим для них выражения

$$h_{23} = -\frac{2k}{3c^4 R_0} \dddot{D}_{23}, \qquad h_{22} - h_{33} = -\frac{2k}{3c^4 R_0} (\dddot{D}_{22} - \dddot{D}_{33})$$

(точка означает дифференцирование по времени), где мы ввели тензор

$$D_{\alpha\beta} = \int \mu \, (3x^\alpha x^\beta - \delta_{\alpha\beta} x_\gamma^2) \, dV, \tag{105,9}$$

«квадрупольного момента» масс (см. § 96). В результате мы получаем поток энергии вдоль оси x^1 в виде

$$ct^{10} = \frac{k}{36\pi c^5 R_0^2} \left[\left(\frac{\dddot{D}_{22} - \dddot{D}_{33}}{2} \right)^2 + \dddot{D}_{23}^2 \right]. \tag{105,10}$$

Зная излучение в направлении оси x^1, легко определить излучение в произвольном направлении, единичный вектор вдоль которого обозначим посредством $\mathbf{n}$. Для этого надо составить из компонент тензора $\dddot{D}_{\alpha\beta}$ и вектора n_α скаляр, квадратичный по $\dddot{D}_{\alpha\beta}$, который при $n_1 = 1$, $n_2 = n_3 = 0$ переходил бы в выражение, стоящее в (105,10) в квадратных скобках.

В результате интенсивность излучения энергии в элемент телесного угла do оказывается равной

$$dI = \frac{k}{36\pi c^5} \left[\frac{1}{4} (\dddot{D}_{\alpha\beta} n_\alpha n_\beta)^2 + \frac{1}{2} \dddot{D}_{\alpha\beta}^2 - \dddot{D}_{\alpha\beta} \dddot{D}_{\alpha\gamma} n_\beta n_\gamma \right] do. \tag{105,11}$$

Полное излучение по всем направлениям, т. е. потерю энергии системой в единицу времени $(-d\mathscr{E}/dt)$, можно найти, усредняя этот поток по направлениям и умножая полученное среднее значение на 4π. Усреднение легко производится с помощью формул, приведенных в примечании на стр. 247. Оно приводит к следующему выражению для потери энергии:

$$-\frac{d\mathscr{E}}{dt} = \frac{k}{45c^5} \dddot{D}_{\alpha\beta}^2. \tag{105,12}$$

Необходимо отметить, что численное значение этой потери энергии даже для астрономических объектов, настолько мало, что его влияние на движение, даже за космические промежутки времени, совершенно ничтожно (так, для двойных звезд потеря энергии в год оказывается порядка 10^{-12}-й части их полной энергии).

Задача

Два тела, притягивающихся по закону Ньютона, движутся по круговым орбитам (вокруг их общего центра инерции). Определить скорость сближения обоих тел, обусловленную потерей энергии излучением гравитационных волн.

Решение. Если m_1, m_2 — массы тел, а r — их взаимное расстояние (постоянное при движении по круговым орбитам), то вычисление с помощью (105,12) дает:

$$-\frac{d\mathscr{E}}{dt}=\frac{32k}{5c^5}\left(\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}\right)^2 r^4\omega^6,$$

где $\omega=2\pi/T$, T — период обращения. Частота ω связана с r посредством $\omega^2r^3=k(m_1+m_2)$. Поскольку $\mathscr{E}=-k\dfrac{m_1m_2}{2r}$, то $\dot r=\dfrac{2r^2}{km_1m_2}\dfrac{d\mathscr{E}}{dt}$, и мы получим окончательно:

$$\dot r=-\frac{64k^3m_1m_2(m_1+m_2)}{5c^5r^3}.$$

§ 106. Уравнения движения системы тел во втором приближении

Найденное в предыдущем параграфе выражение (105,12) для потери энергии системой путем излучения гравитационных волн содержит c^5 в знаменателе, т. е. эта потеря появляется лишь в пятом приближении по $1/c$. В первых же четырех приближениях энергия системы остается постоянной. Отсюда следует, что система гравитирующих тел может быть описана с помощью функции Лагранжа с точностью до членов порядка $1/c^4$ в отличие от электромагнитного поля, где функция Лагранжа существует, в общем случае, только с точностью до членов второго порядка (§ 65). Мы дадим здесь вывод функции Лагранжа системы тел с точностью до членов второго порядка. Тем самым мы найдем уравнения движения системы в приближении, следующем после ньютоновского.

При этом мы будем пренебрегать размерами и внутренней структурой тел, рассматривая их как «точечные»; другими словами, мы ограничиваемся нулевыми членами разложения по степеням отношений размеров тел a к их взаимным расстояниям l.

Для решения поставленной задачи мы должны начать с определения в соответствующем приближении слабого гравитационного поля, создаваемого телами на расстояниях, больших по сравнению с их размерами, но в то же время малых по сравнению с длиной излучаемых системой гравитационных волн λ ($a\ll r\ll\lambda\sim lc/v$).

В первом приближении в уравнениях (105,1) надо пренебречь членами со вторыми производными по времени, содержащими $1/c^2$, а из всех компонент τ_i^k можно считать отличным от нуля только компоненту $\tau_0^0=\mu c^2$, содержащую c^2 (между тем как остальные содержат первую или вторую степени скоростей тел). Тогда получим уравнения

$$\Delta\psi_\alpha^\beta=0,\qquad \Delta\psi_0^\alpha=0,\qquad \Delta\psi_0^0=\frac{16\pi k}{c^2}\mu.$$

Мы должны искать решения этих уравнений, обращающиеся на бесконечности в нуль (галилеева метрика). Поэтому из первых двух уравнений следует, что $\psi_\alpha^\beta = 0$, $\psi_0^\alpha = 0$. Сравнивая же третье уравнение с уравнением (96,2) для ньютонового гравитационного потенциала φ, найдем $\psi_0^0 = 4\varphi/c^2$. Отсюда для компонент тензора $h_i^k = \psi_i^k - \frac{1}{2}\psi\delta_i^k$ имеем следующие значения [1]):

$$h_\alpha^\beta = -\frac{2}{c^2}\varphi\delta_\alpha^\beta, \tag{106,1}$$

$$h_0^\alpha = 0, \qquad h_0^0 = \frac{2}{c^2}\varphi, \tag{106,2}$$

или для интервала

$$ds^2 = \left(1 + \frac{2}{c^2}\varphi\right)c^2dt^2 - \left(1 - \frac{2}{c^2}\varphi\right)(dx^2 + dy^2 + dz^2). \tag{106,3}$$

Отметим, что члены первого порядка по φ имеются не только в g_{00}, но и в $g_{\alpha\beta}$; в § 87 было уже указано, что в уравнениях движения частицы поправочные члены в $g_{\alpha\beta}$ приводят к величинам более высоких порядков малости, чем члены, происходящие от g_{00}; в связи с этим путем сравнения с ньютоновыми уравнениями движения можно было определить только g_{00}.

Как будет видно из дальнейшего, для получения искомых уравнений движения достаточно знать пространственные компоненты $h_{\alpha\beta}$ с полученной в (106,1) точностью ($\sim 1/c^2$); смешанные же компоненты (отсутствующие в приближении $1/c^2$) необходимо иметь с точностью до членов $1/c^3$, а временную h_{00} — с точностью до членов $1/c^4$. Для их вычисления обратимся снова к общим уравнениям тяготения, учтя в них члены соответствующих порядков.

Пренебрегая макроскопичностью тел, мы должны писать тензор энергии-импульса вещества в форме (33,4—5). В криволинейных координатах это выражение переписывается, как

$$T^{ik} = \sum_a \frac{m_a c}{\sqrt{-g}} \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^k}{dt} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a) \tag{106,4}$$

[появление множителя $1/\sqrt{-g}$ — ср. с аналогичным переходом в (90,4)]; суммирование производится по всем телам в системе.

Компонента

$$T_{00} = \sum_a \frac{m_a c^3}{\sqrt{-g}} g_{00}^2 \frac{dt}{ds} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a)$$

---

[1]) Этот результат, разумеется, находится в полном соответствии с полученными в § 104 формулами для $h_{ik}^{(1)}$ [причем $h_{\alpha\beta}^{(1)}$ представляется в виде (104,1а)].

в первом приближении (галилеевы g_{ik}) равна $\sum_a m_a c^2 \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_a)$; в следующем приближении подставляем g_{ik} из (106,3) и после простого вычисления получаем:

$$T_{00} = \sum_a m_a c^2 \left(1 + \frac{5\varphi_a}{c^2} + \frac{v_a^2}{2c^2}\right) \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_a), \qquad (106,5)$$

где $\mathbf{v}$ — обычная трехмерная скорость ($v^\alpha = dx^\alpha/dt$), а φ_a — потенциал поля в точке $\mathbf{r}_a$ (на наличие в φ_a бесконечной части — потенциала собственного поля частицы m_a — пока не обращаем внимания; о нем см. ниже).

Что касается компонент $T_{\alpha\beta}$, $T_{0\alpha}$ тензора энергии-импульса, то для них, в том же приближении, достаточно оставить лишь первые члены разложения выражений (106,4)

$$T_{\alpha\beta} = \sum_a m_a v_{a\alpha} v_{a\beta} \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_a),$$
$$T_{0\alpha} = -\sum_a m_a c v_{a\alpha} \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_a). \qquad (106,6)$$

Далее переходим к вычислению компонент тензора R_{ik}. Вычисление удобно производить по формуле $R_{ik} = g^{lm} R_{limk}$ с R_{limk} из (92,4). При этом надо помнить, что величины $h_{\alpha\beta}$, h_{00} содержат члены порядка не ниже $1/c^2$, а $h_{0\alpha}$ — не ниже $1/c^3$; дифференцирования по $x^0 = ct$ в свою очередь повышают порядок малости на 1.

Главные члены в R_{00} порядка $1/c^2$; наряду с ними мы должны сохранить также и члены следующего неисчезающего порядка — $1/c^4$. Простое вычисление приводит к результату:

$$R_{00} = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial h_0^\alpha}{\partial x^\alpha} - \frac{1}{2c}\frac{\partial h_\alpha^\alpha}{\partial t}\right) + \frac{1}{2}\Delta h_{00} + $$
$$+ \frac{1}{2} h^{\alpha\beta} \frac{\partial^2 h_{00}}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} - \frac{1}{4}\left(\frac{\partial h_{00}}{\partial x^\alpha}\right)^2 - \frac{1}{4}\frac{\partial h_{00}}{\partial x^\beta}\left(2\frac{\partial h_\beta^\alpha}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial h_\alpha^\alpha}{\partial x^\beta}\right).$$

В этом вычислении не было еще использовано никакого дополнительного условия для величин h_{ik}. Пользуясь этой свободой, наложим теперь на них условие

$$\frac{\partial h_0^\alpha}{\partial x^\alpha} - \frac{1}{2c}\frac{\partial h_\alpha^\alpha}{\partial t} = 0, \qquad (106,7)$$

в результате которого из R_{00} полностью выпадают члены, содержащие компоненты $h_{0\alpha}$. В остальных членах подставляем:

$$h_\alpha^\beta = -\frac{2}{c^2}\varphi\delta_\alpha^\beta, \qquad h_{00} = \frac{2}{c^2}\varphi + O\left(\frac{1}{c^4}\right),$$

и получаем, с требуемой точностью,

$$R_{00} = \frac{1}{2}\Delta h_{00} + \frac{2}{c^4}\varphi\Delta\varphi - \frac{2}{c^4}(\nabla\varphi)^2, \qquad (106,8)$$

где мы перешли к трехмерным обозначениям; здесь φ — ньютонов потенциал системы точечных частиц, т. е.

$$\varphi = -k \sum_a \frac{m_a}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_a|}.$$

При вычислении компонент $R_{0\alpha}$ достаточно сохранить лишь члены первого неисчезающего порядка — $1/c^3$. Аналогичным образом получим:

$$R_{0\alpha} = \frac{1}{2c}\frac{\partial^2 h^\beta_\alpha}{\partial t\, \partial x^\beta} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 h^\beta_0}{\partial x^\alpha\, \partial x^\beta} - \frac{1}{2c}\frac{\partial^2 h^\beta_\beta}{\partial t\, \partial x^\alpha} + \frac{1}{2}\Delta h_{0\alpha}$$

и затем, с учетом условия (104,7):

$$R_{0\alpha} = \frac{1}{2}\Delta h_{0\alpha} + \frac{1}{2c^3}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t\, \partial x^\alpha}. \qquad (106,9)$$

С помощью полученных выражений (106,5—9) составим теперь уравнения Эйнштейна

$$R_{ik} = \frac{8\pi k}{c^4}\left(T_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} T\right). \qquad (106,10)$$

Временная компонента уравнения (106,10) дает:

$$\Delta h_{00} + \frac{4}{c^4}\varphi\Delta\varphi - \frac{4}{c^4}(\nabla\varphi)^2 = \frac{8\pi k}{c^4}\sum_a m_a c^2\left(1 + \frac{5\varphi_a}{c^2} + \frac{3v_a^2}{2c^2}\right)\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_a);$$

с помощью тождества

$$4(\nabla\varphi)^2 = 2\Delta(\varphi^2) - 4\varphi\Delta\varphi$$

и уравнения ньютонова потенциала

$$\Delta\varphi = 4\pi k \sum_a m_a \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_a) \qquad (106,11)$$

переписываем это уравнение в виде

$$\Delta\left(h_{00} - \frac{2}{c^4}\varphi^2\right) = \frac{8\pi k}{c^2}\sum_a m_a\left(1 + \frac{\varphi'_a}{c^2} + \frac{3v_a^2}{2c^2}\right)\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_a). \quad (106,12)$$

После проведения всех вычислений мы заменили в правой стороне уравнения (106,12) φ_a на

$$\varphi'_a = -k \sum_b{}' \frac{m_b}{|\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b|},$$

т. е. потенциал в точке $\mathbf{r}_a$ поля, создаваемого всеми частицами за исключением частицы m_a; исключение бесконечного собственного потенциала частиц (в используемом нами методе, рассматривающем частицы как точечные) соответствует «перенормировке» их масс,

в результате которой они принимают свои истинные значения, учитывающие создаваемые самими частицами поля[1]).

Решение уравнения (106,12) может быть написано сразу, учитывая известное соотношение (36,9)

$$\Delta\frac{1}{r}=-4\pi\delta(\mathbf{r}).$$

Таким образом, найдем:

$$h_{00}=\frac{2\varphi}{c^2}+\frac{2\varphi^2}{c^4}-\frac{2k}{c^4}\sum_a\frac{m_a\varphi_a'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_a|}-\frac{3k}{c^4}\sum_a\frac{m_av_a^2}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_a|}. \quad (106,13)$$

Смешанная компонента уравнения (106,10) дает:

$$\Delta h_{0\alpha}=-\frac{16\pi k}{c^3}\sum_a m_av_{a\alpha}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_a)-\frac{1}{c^3}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t\,\partial x^\alpha}. \quad (106,14)$$

Решение этого линейного уравнения есть[2])

$$h_{0\alpha}=\frac{4k}{c^3}\sum_a\frac{m_av_{a\alpha}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_a|}-\frac{1}{c^3}\frac{\partial^2 f}{\partial t\,\partial x^\alpha},$$

где f — решение вспомогательного уравнения

$$\Delta f=\varphi=-\sum\frac{km_a}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_a|}.$$

Учитывая соотношение $\Delta r=2/r$, находим:

$$f=-\frac{k}{2}\sum_a m_a|\mathbf{r}-\mathbf{r}_a|,$$

и затем, после простого вычисления, окончательно получаем:

$$h_{0\alpha}=\frac{k}{2c^3}\sum_a\frac{m_a}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_a|}\left[7v_{a\alpha}+(\mathbf{v}_a\mathbf{n}_a)n_{a\alpha}\right], \quad (106,15)$$

где $\mathbf{n}_a$ — единичный вектор в направлении вектора $\mathbf{r}-\mathbf{r}_a$.

Выражения (106,1), (106,13), (106,15) достаточны для вычисления искомой функции Лагранжа с точностью до членов второго порядка.

[1]) Действительно, если имеется всего одна неподвижная частица, в правой стороне уравнения будет стоять просто $(8\pi k/c^2)\,m_a\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_a)$ и это уравнение правильно (во втором приближении) определит создаваемое частицей поле.

[2]) В стационарном случае второй член в правой стороне уравнения (106,14) отсутствует. На больших расстояниях от системы его решение может быть написано непосредственно по аналогии с решением (44,3) уравнения (43,4):

$$h_{0\alpha}=-\frac{2k}{c^3r^2}[\mathbf{nM}]_\alpha$$

$\Big($где $\mathbf{M}=\int[\mathbf{r}\cdot\mu\mathbf{v}]\,dV=\sum m_a[\mathbf{r}_a\mathbf{v}_a]$ — момент импульса системы$\Big)$, в полном соответствии с формулой (104, 10).

Функция Лагранжа одной частицы в гравитационном поле, создаваемом другими частицами и рассматриваемом как заданное:

$$L_a = -m_a c \frac{ds}{dt} = -m_a c^2 \left(1 + h_{00} + 2h_{0\alpha}\frac{v_a^\alpha}{c} - \frac{v_a^2}{c^2} + h_{\alpha\beta}\frac{v_a^\alpha v_a^\beta}{c^2}\right)^{1/2}.$$

Разлагая радикал и опустив несущественную постоянную $-m_a c^2$, переписываем это выражение с требуемой точностью, как

$$L_a = \frac{m_a v_a^2}{2} + \frac{m_a v_a^4}{8c^2} - m_a c^2\left(\frac{h_{00}}{2} + h_{0\alpha}\frac{v_a^\alpha}{c} + \frac{1}{2c^2}h_{\alpha\beta}v_a^\alpha v_a^\beta - \frac{h_{00}^2}{8} + \frac{h_{00}}{4c^2}v_a^2\right). \tag{106,16}$$

Значения всех h_{ik} здесь берутся в точке $\mathbf{r}_a$; при этом снова должны быть опущены обращающиеся в бесконечность члены, что сводится к «перенормировке» массы m_a, стоящей в виде коэффициента в L_a.

Дальнейший ход вычислений состоит в следующем. Полная функция Лагранжа L системы, разумеется, не равна сумме функций L_a для отдельных тел, но она должна быть составлена так, чтобы приводить к правильным значениям сил $\mathbf{f}_a$, действующих на каждое из тел при заданном движении остальных. Для этого вычисляем силы $\mathbf{f}_a$ путем дифференцирования функции Лагранжа L_a:

$$\mathbf{f}_a = \left(\frac{\partial L_a}{\partial \mathbf{r}}\right)_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_a}$$

(дифференцирование производится по бегущим координатам $\mathbf{r}$ «точки наблюдения» в выражениях для h_{ik}). После этого легко составить такую общую функцию L, из которой все те же силы $\mathbf{f}_a$ получаются взятием частных производных $\partial L/\partial \mathbf{r}_a$.

Не останавливаясь на простых промежуточных вычислениях, приведем сразу окончательный результат для функции Лагранжа [1]):

$$L = \sum_a \frac{m_a v_a^2}{2} + \sum_a\sum_b{}' \frac{3k m_a m_b v_a^2}{2c^2 r_{ab}} + \sum_a \frac{m_a v_a^4}{8c^2} + \sum_a\sum_b{}' \frac{k\, m_a m_b}{2r_{ab}} -$$
$$- \sum_a\sum_b{}' \frac{k m_a m_b}{4c^2 r_{ab}}\left[7(\mathbf{v}_a\mathbf{v}_b) + (\mathbf{v}_a\mathbf{n}_{ab})(\mathbf{v}_b\mathbf{n}_{ab})\right] - \sum_a\sum_b{}'\sum_c{}' \frac{k^2 m_a m_b m_c}{2c^2 r_{ab} r_{ac}}, \tag{106,17}$$

где $r_{ab} = |\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b|$, $\mathbf{n}_{ab}$ — единичный вектор в направлении $\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b$, а штрих у знака суммы означает, что должен быть опущен член с $b = a$ или $c = a$.

[1]) Уравнения движения, соответствующие этой функции Лагранжа, были впервые получены *А. Эйнштейном, Л. Инфельдом* и *Б. Гоффманом* (1938) и *А. Эддингтоном* и *Г. Кларком* (1938).

Задачи

1. Определить действие для гравитационного поля в ньютоновом приближеиии.

Решение. С помощью g_{ik} из (106,3) по формуле (93,3) находим $G = -2(\nabla\varphi)^2/c^4$, так что действие для поля

$$S_g = -\frac{1}{8\pi k}\iint (\nabla\varphi)^2\, dV\, dt$$

Полное действие для поля вместе с массами, распределенными в пространстве с плотностью μ:

$$S = \iint \left[\frac{\mu v^2}{2} - \mu\varphi - \frac{1}{8\pi k}(\nabla\varphi)^2\right] dV\, dt. \tag{1}$$

Легко убедиться в том, что варьирование S по φ приводит, как и следовало, к уравнению Пуассона (96,2).

Плотность энергии находится из плотности функции Лагранжа Λ [подынтегральное выражение в (1)] согласно общей формуле (32,5), что сводится в данном случае (в силу отсутствия в Λ производных от φ по времени) к изменению знака второго и третьего членов. Интегрируя плотность энергии по пространству, подставив при этом во втором члене $\mu\varphi = \varphi\Delta\varphi/4\pi k$ и интегрируя его по частям, получим окончательно полную энергию поля и материи в виде

$$\int \left[\frac{\mu v^2}{2} - \frac{1}{8\pi k}(\nabla\varphi)^2\right] dV.$$

Следовательно, плотность энергии гравитационного поля в ньютоновой теории есть $W = -(\nabla\varphi)^2/8\pi k$ [1]).

2. Определить координаты центра инерции системы гравитирующих тел во втором приближении.

Решение. Ввиду полной формальной аналогии между законом Ньютона для гравитационного взаимодействия и законом Кулона для электростатического взаимодействия координаты центра инерции даются формулой

$$\mathbf{R} = \frac{1}{\mathscr{E}}\sum_a \mathbf{r}_a\left(m_a c^2 + \frac{p_a^2}{2m_a} - \frac{k m_a}{2}\sum_b{}' \frac{m_b}{r_{ab}}\right),$$

$$\mathscr{E} = \sum_a \left(m_a c^2 + \frac{p_a^2}{2m_a} - \frac{k m_a}{2}\sum_b{}' \frac{m_b}{r_{ab}}\right),$$

аналогичной формуле, полученной в задаче 1 § 65.

3. Определить вековое смещение перигелия орбиты двух гравитирующих тел сравнимой массы (*Г. Робертсон*, 1938).

Решение. Функция Лагранжа системы двух тел

$$L = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} + \frac{k m_1 m_2}{r} + \frac{1}{8c^2}(m_1 v_1^4 + m_2 v_2^4) + \\ + \frac{k m_1 m_2}{2c^2 r}\left[3(v_1^2 + v_2^2) - 7(\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2) - (\mathbf{v}_1\mathbf{n})(\mathbf{v}_2\mathbf{n})\right] - \frac{k^2 m_1 m_2 (m_1 + m_2)}{2c^2 r^2}$$

---

[1]) Для устранения возможных недоразумений укажем, что это выражение не совпадает с компонентой $(-g)\,t_{00}$ псевдотензора энергии-импульса [вычисленной с g_{ik} из (106,3)]; вклад в W возникает также и из $(-g)\,T_{ik}$.

Переходя к функции Гамильтона и исключая из нее движение центра инерции (ср. задачу 2 § 65), получим:

$$\mathscr{H}=\frac{p^2}{2}\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right)-\frac{km_1m_2}{r}-\frac{p^4}{8c^2}\left(\frac{1}{m_1^3}+\frac{1}{m_2^3}\right)-$$
$$-\frac{k}{2c^2r}\left[3p^2\left(\frac{m_2}{m_1}+\frac{m_1}{m_2}\right)+7p^2+(\mathbf{pn})^2\right]+\frac{k^2m_1m_2(m_1+m_2)}{2c^2r^2}, \qquad (1)$$

где $\mathbf{p}$ — импульс относительного движения.

Определим радиальную составляющую импульса p_r как функцию переменной r и параметров M (момент импульса) и $\mathscr{E}$ (энергия). Эта функция определяется из уравнения $\mathscr{H}=\mathscr{E}$ (при этом в членах второго порядка надо заменить p^2 его выражениями из нулевого приближения):

$$\mathscr{E}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right)\left(p_r^2+\frac{M^2}{r^2}\right)-\frac{km_1m_2}{r}-$$
$$-\frac{1}{8c^2}\left(\frac{1}{m_1^3}+\frac{1}{m_2^3}\right)\left(\frac{2m_1m_2}{m_1+m_2}\right)^2\left(\mathscr{E}+\frac{km_1m_2}{r}\right)^2-$$
$$-\frac{k}{2c^2r}\left[3\left(\frac{m_2}{m_1}+\frac{m_1}{m_2}\right)+7\right]\frac{2m_1m_2}{m_1+m_2}\left(\mathscr{E}+\frac{km_1m_2}{r}\right)-$$
$$-\frac{k}{2c^2r}p_r^2+\frac{k^2m_1m_2(m_1+m_2)}{2c^2r^2}.$$

Дальнейший ход вычислений аналогичен произведенным в § 98. Определив из написанного алгебраического уравнения p_r, производим в интеграле

$$S_r=\int p_r\,dr$$

преобразование переменной r так, чтобы привести член, содержащий M^2, к виду M^2/r^2. Произведя затем в подкоренном выражении разложение по малым релятивистским поправкам, получим:

$$S_r=\int\sqrt{A+\frac{B}{r}-\left(M^2-\frac{6k^2m_1^2m_2^2}{c^2}\right)\frac{1}{r^2}}\,dr$$

[ср. (98,6)], где A, B — постоянные коэффициенты, в явном вычислении которых нет необходимости.

В результате для смещения перигелия орбиты относительного движения получим:

$$\delta\varphi=\frac{6\pi k^2m_1^2m_2^2}{c^2M^2}=\frac{6\pi k(m_1+m_2)}{c^2a(1-e^2)}.$$

Сравнивая с (98,7), мы видим, что при заданных размерах и форме орбиты смещение перигелия такое же, каким оно было бы при движении одного тела в поле неподвижного центра с массой m_1+m_2.

4. Определить частоту прецессии шарового волчка, совершающего орбитальное движение в гравитационном поле вращающегося вокруг своей оси центрального тела.

Решение. В первом приближении искомый эффект представляется суммой двух независимых частей, одна из которых связана с неньютоново-

стью центрально-симметричного поля, а другая — с вращением центрального тела[1]).

Первая часть описывается дополнительным членом в функции Лагранжа волчка, соответствующим второму члену в (106,17). Представим скорость отдельных элементов волчка (с массами dm) в виде $\mathbf{v}=\mathbf{V}+[\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}]$, где $\mathbf{V}$ — скорость его орбитального движения, $\boldsymbol{\omega}$ — угловая скорость, $\mathbf{r}$ — радиус-вектор элемента dm относительно центра инерции волчка (так что интеграл по объему волчка $\int \mathbf{r}\,dm=0$). Опустив члены, независящие от $\boldsymbol{\omega}$, а также пренебрегая квадратичными по $\boldsymbol{\omega}$ членами, имеем:

$$\delta^{(1)}L=\frac{3km'}{2c^2}\int\frac{2(\mathbf{V}[\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}])}{R}\,dm,$$

где m' — масса центрального тела, $R=|\mathbf{R}_0+\mathbf{r}|$ — расстояние от центра поля до элемента dm, $\mathbf{R}_0$ — радиус-вектор центра инерции волчка. При разложении $\frac{1}{R}\approx\frac{1}{R_0}-\frac{\mathbf{n}\mathbf{r}}{R_0^2}$ (где $\mathbf{n}=\mathbf{R}_0/R_0$) интеграл от первого члена обращается в нуль, а во втором интегрирование производится с помощью формулы

$$\int x_\alpha x_\beta\,dm=\frac{1}{2}I\delta_{\alpha\beta},$$

где I — момент инерции волчка. В результате получим:

$$\delta^{(1)}L=\frac{3km'}{2c^2R_0^2}\,(\mathbf{M}[\mathbf{v}_0\mathbf{n}]),$$

где $\mathbf{M}=I\boldsymbol{\omega}$ — вращательный момент волчка.

Дополнительный член в функции Лагранжа, обязанный вращению центрального тела, можно было бы также найти из (106,17), но еще проще вычислить его с помощью формулы (1) из задачи в § 104:

$$\delta^{(2)}L=\frac{2k}{c^2}\int\frac{\mathbf{M}'[[\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}]\mathbf{R}]}{R^3}\,dm,$$

где $\mathbf{M}'$ — момент центрального тела. Разложив

$$\frac{\mathbf{R}}{R^3}\approx\frac{\mathbf{n}}{R_0^2}+\frac{1}{R_0^3}\,(\mathbf{r}-3\mathbf{n}(\mathbf{n}\mathbf{r}))$$

и производя интегрирование, получим:

$$\delta^{(2)}L=\frac{k}{c^2R_0^3}\left\{\mathbf{M}\mathbf{M}'-3(\mathbf{n}\mathbf{M})(\mathbf{n}\mathbf{M}')\right\}.$$

Таким образом, полная добавка к функции Лагранжа:

$$\delta L=-\mathbf{M}\boldsymbol{\Omega},\quad \boldsymbol{\Omega}=\frac{3km'}{2c^2R_0^2}\,[\mathbf{n}\mathbf{v}_0]+\frac{k}{c^2R_0^3}\left\{3\mathbf{n}(\mathbf{n}\mathbf{M}')-\mathbf{M}'\right\}$$

Этой функции отвечает уравнение движения

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt}=[\boldsymbol{\Omega}\mathbf{M}]$$

(ср. уравнение (2) из задачи к § 104). Это значит, что момент волчка $\mathbf{M}$ прецессирует с угловой скоростью $\boldsymbol{\Omega}$, оставаясь постоянным по своей величине.

[1]) Первый эффект рассмотрен *Г. Вейлем* (1923), второй — *Л. Шиффом* (1960).

ГЛАВА XII

РЕЛЯТИВИСТСКАЯ КОСМОЛОГИЯ

§ 107. Изотропное пространство

Общая теория относительности открывает новые пути подхода к решению вопросов, связанных со свойствами мира, рассматриваемого в космических масштабах. Возникающие здесь новые замечательные возможности связаны с негалилеевостью пространства-времени.

Эти возможности тем более существенны, что ньютоновская механика приводит в этой области к противоречиям, которые не могут быть обойдены в достаточно общем виде в пределах нерелятивистской теории. Так, применяя ньютоновскую формулу для гравитационного потенциала (96,3) к плоскому (каким оно является в ньютоновской механике) бесконечному пространству, заполненному веществом с произвольно распределенной нигде не исчезающей средней плотностью, мы найдем, что потенциал обращается в каждой точке в бесконечность. Это привело бы к бесконечным силам, действующим на вещество, т. е. к абсурду.

Как известно, звезды распределены по пространству весьма неравномерным образом—они сконцентрированы в отдельных звездных системах (галактиках). Но при исследовании Вселенной «в больших масштабах» следует отвлекаться от «местных» неоднородностей, вызванных скоплением вещества в звезды и звездные системы. Так, под плотностью масс должна подразумеваться плотность, усредненная по областям пространства, размеры которых велики по сравнению с расстояниями между галактиками.

Рассматриваемые ниже решения уравнений Эйнштейна—так называемая изотропная космологическая модель (впервые найденная *А. А. Фридманом* в 1922 г.)—основаны на предположении об однородности и изотропии распределения вещества по пространству[1]).

---

[1]) Мы не будем рассматривать вовсе уравнений с так называемой космологической постоянной, поскольку в настоящее время ясно, что нет никаких физических оснований для такого видоизменения уравнений тяготения.

Существующие астрономические данные не противоречат такому предположению. Но уже по самому своему существу оно неизбежно может иметь лишь приближенный характер, поскольку однородность заведомо нарушается при переходе к меньшим масштабам. Между тем предположение об однородности мира является далеко идущим в математическом отношении и его нарушение могло бы даже качественно изменить свойства рассматриваемой модели.

В то же время есть все основания считать, что изотропная модель дает, в общих чертах, адекватное описание современного состояния Вселенной. Мы увидим ниже, что основным свойством этой модели является ее нестационарность. Нет сомнения в том, что это свойство дает правильное объяснение фундаментального для космологической проблемы явления «красного смещения» (§ 110).

Пространство, равномерно заполненное материей, по своим свойствам полностью однородно и изотропно. Это значит, что можно выбрать такое «мировое» время, чтобы в каждый его момент метрика пространства была одинаковой во всех точках и по всем направлениям.

Займемся прежде всего изучением метрики изотропного пространства как таковой, не интересуясь пока ее возможной зависимостью от времени. Как мы уже делали выше, обозначим трехмерный метрический тензор как $\gamma_{\alpha\beta}$, т. е. напишем элемент пространственного расстояния в виде

$$dl^2 = \gamma_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta\,. \tag{107,1}$$

Кривизна пространства полностью определяется его трехмерным тензором кривизны, который мы будем обозначать как $P^\alpha_{\beta\gamma\delta}$ в отличие от четырехмерного тензора R^i_{klm} (свойства тензора $P^\alpha_{\beta\gamma\delta}$, конечно, в точности аналогичны свойствам тензора R^i_{klm}). В случае полной изотропии тензор $P^\alpha_{\beta\gamma\delta}$ должен, очевидно, выражаться только через метрический тензор $\gamma_{\alpha\beta}$, а потому в силу своих свойств симметрии должен иметь вид

$$P^\alpha_{\beta\gamma\delta} = \lambda\,(\delta^\alpha_\gamma \gamma_{\delta\beta} - \delta^\alpha_\delta \gamma_{\gamma\beta}), \tag{107,2}$$

где λ — постоянная. Тензор 2-го ранга $P_{\alpha\beta} = P^\gamma_{\alpha\gamma\beta}$ равен соответственно

$$P_{\alpha\beta} = 2\lambda\gamma_{\alpha\beta}, \tag{107,3}$$

а скалярная кривизна

$$P = 6\lambda. \tag{107,4}$$

Таким образом, мы видим, что свойства кривизны изотропного пространства определяются всего одной постоянной λ. Соответственно этому возможны всего три существенно различных случая

пространственной метрики: 1) так называемое пространство постоянной положительной кривизны (соответствующее положительным значениям λ), 2) пространство постоянной отрицательной кривизны (соответствующее значениям $\lambda < 0$) и 3) пространство с кривизной, равной нулю ($\lambda = 0$). Из них последнее представляет собой плоское, т. е. евклидово, пространство.

При изучении метрики удобно исходить из геометрической аналогии, рассматривая геометрию изотропного трехмерного пространства как геометрию на заведомо изотропной гиперповерхности (в некотором фиктивном четырехмерном пространстве [1])). Такой поверхностью является гиперсфера; соответствующее ей трехмерное пространство и является пространством положительной постоянной кривизны. Уравнение гиперсферы с радиусом a в четырехмерном пространстве x_1, x_2, x_3, x_4 имеет вид

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = a^2,$$

а элемент длины на ней выражается как

$$dl^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2.$$

Рассматривая координаты x_1, x_2, x_3 как три пространственные координаты и исключая из dl^2 фиктивную координату x_4 с помощью первого уравнения, находим элемент пространственного расстояния в виде

$$dl^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + \frac{(x_1 dx_1 + x_2 dx_2 + x_3 dx_3)^2}{a^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2}. \qquad (107,5)$$

Из этого выражения легко вычислить постоянную λ в (107,2). Поскольку нам заранее известно, что тензор $P_{\alpha\beta}$ имеет вид (107,3) во всем пространстве, то достаточно вычислить его только для точек, находящихся вблизи начала координат, где $\gamma_{\alpha\beta}$ равны

$$\gamma_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} + \frac{x_\alpha x_\beta}{a^2}.$$

Так как первые производные от $\gamma_{\alpha\beta}$, а значит, и величины $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$ в начале координат обращаются в нуль, то вычисление по общей формуле (92,10) оказывается очень простым и дает в результате

$$\lambda = \frac{1}{a^2}. \qquad (107,6)$$

Величину a можно назвать «радиусом кривизны» пространства. Введем вместо координат x_1, x_2, x_3 соответствующие им «сферические»

[1]) Не имеющем, разумеется, ничего общего с четырехмерным пространством-временем.

координаты r, θ, φ. Тогда элемент длины примет вид

$$dl^2 = \frac{dr^2}{1-\frac{r^2}{a^2}} + r^2(\sin^2\theta\, d\varphi^2 + d\theta^2). \qquad (107,7)$$

Начало координат может быть, конечно, выбрано в любой точке пространства. Длина окружности в этих координатах равна $2\pi r$, а поверхность сферы $4\pi r^2$. Длина же «радиуса» окружности (или сферы) равна

$$\int_0^r \frac{dr}{\sqrt{1-\frac{r^2}{a^2}}} = a \arcsin\frac{r}{a},$$

т. е. больше r. Таким образом, отношение длины окружности к радиусу в таком пространстве меньше чем 2π.

Другую удобную форму dl^2 имеет в «четырехмерных сферических координатах», получающихся, если ввести вместо координаты r «угол» χ согласно $r = a\sin\chi$ (χ меняется в пределах от 0 до π)[1]. Тогда

$$dl^2 = a^2[d\chi^2 + \sin^2\chi(\sin^2\theta\, d\varphi^2 + d\theta^2)]. \qquad (107,8)$$

Координата χ измеряет расстояние от начала координат, равное $a\chi$. Поверхность сферы в этих координатах равна $4\pi a^2\sin^2\chi$. Мы видим, что по мере удаления от начала координат величина поверхности сферы увеличивается, пока не достигнет на расстоянии $\pi a/2$ максимального значения, равного $4\pi a^2$. Вслед за этим она начинает уменьшаться, пока не превратится в точку на «противоположном полюсе» пространства на расстоянии πa — наибольшем расстоянии, которое вообще может существовать в таком пространстве [все это видно, конечно, и из (107,7), если заметить, что координата r не может принимать значений, бо́льших чем a].

Объем пространства с положительной кривизной равен

$$V = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi} a^3\sin^2\chi\sin\theta\, d\chi\, d\theta\, d\varphi,$$

откуда

$$V = 2\pi^2 a^3. \qquad (107,9)$$

Таким образом, пространство положительной кривизны оказывается

---

[1]) «Декартовы» координаты x_1, x_2, x_3, x_4 связаны с четырехмерными сферическими координатами a, θ, φ, χ посредством соотношений:

$$x_1 = a\sin\chi\sin\theta\cos\varphi, \qquad x_2 = a\sin\chi\sin\theta\sin\varphi,$$

$$x_3 = a\sin\chi\cos\theta, \qquad x_4 = a\cos\chi.$$

«замкнутым само в себе» — конечным по объему, но, разумеется, не имеющим границ.

Интересно отметить, что в замкнутом пространстве полный электрический заряд должен быть равен нулю. Действительно, всякая замкнутая поверхность в конечном пространстве с обеих своих сторон охватывает конечные же области пространства. Поэтому поток электрического поля через эту поверхность равен, с одной стороны, полному заряду, находящемуся внутри поверхности, а с другой, — равен находящемуся вне ее заряду, взятому с обратным знаком. Сумма же зарядов с обеих сторон поверхности равна, следовательно, нулю.

Аналогичным образом, из выражения (101,14) 4-импульса в виде интеграла по поверхности следует обращение в нуль полного 4-импульса P^i во всем пространстве. Таким образом, определение полного 4-импульса по существу теряет смысл, поскольку соответствующий закон сохранения вырождается в бессодержательное тождество $0=0$.

Перейдем теперь к рассмотрению геометрии пространства, обладающего постоянной отрицательной кривизной. Из (107,6) мы видим, что постоянная λ становится отрицательной, если a мнимо. Поэтому все формулы для пространства отрицательной кривизны можно непосредственно получить из предыдущих, заменив в них a на ia. Другими словами, геометрия пространства отрицательной кривизны получается математически как геометрия на четырехмерной псевдосфере с мнимым радиусом.

Таким образом, постоянная λ равна теперь

$$\lambda = -\frac{1}{a^2}, \qquad (107,10)$$

а элемент длины в пространстве отрицательной кривизны в координатах r, θ, φ имеет вид

$$dl^2 = \frac{dr^2}{1+\frac{r^2}{a^2}} + r^2(\sin^2\theta\, d\varphi^2 + d\theta^2), \qquad (107,11)$$

где координата r может пробегать все значения от 0 до ∞. Отношение длины окружности к радиусу теперь больше чем 2π. Выражение для dl^2, соответствующее (107,8), получится, если ввести координату χ согласно $r = a\,\mathrm{sh}\chi$ (χ меняется здесь от 0 до ∞). Тогда

$$dl^2 = a^2\{d\chi^2 + \mathrm{sh}^2\chi\,(\sin^2\theta\, d\varphi^2 + d\theta^2)\}. \qquad (107,12)$$

Поверхность сферы равна теперь $4\pi a^2\,\mathrm{sh}^2\chi$ и при удалении от начала координат (увеличении χ) возрастает неограниченно. Объем пространства отрицательной кривизны, очевидно, бесконечен.

Задача

Преобразовать элемент длины (107,7) к виду, в котором он был бы пропорционален своему евклидову выражению.

Решение. Подстановка

$$r = \frac{r_1}{1 + \frac{r_1^2}{4a^2}}$$

приводит к результату:

$$dl^2 = \left(1 + \frac{r_1^2}{4a^2}\right)^{-2} \left(dr_1^2 + r_1^2 d\theta^2 + r_1^2 \sin^2\theta\, d\varphi^2\right).$$

§ 108. Пространственно-временная метрика закрытой изотропной модели

Переходя к исследованию пространственно-временной метрики изотропной модели, мы должны прежде всего условиться о выборе системы отсчета. Наиболее удобна «сопутствующая» система отсчета, движущаяся в каждой точке пространства вместе с находящимся в ней веществом. Другими словами, системой отсчета является сама заполняющая пространство материя; скорость вещества в этой системе, по определению, равна везде нулю. Очевидно, что такой выбор системы отсчета для изотропной модели естествен: при другом выборе направленность скоростей материи создавала бы кажущуюся неэквивалентность различных направлений в пространстве. Временная координата должна быть выбрана указанным в начале предыдущего параграфа образом, т. е. так, чтобы в каждый данный момент времени метрика во всем пространстве была одинаковой.

Ввиду полной эквивалентности всех направлений, компоненты $g_{0\alpha}$ метрического тензора в выбранной нами системе отсчета равны нулю. Действительно, три компоненты $g_{0\alpha}$ можно рассматривать как компоненты трехмерного вектора, который, будучи отличен от нуля, создавал бы неравноценность различных направлений. Таким образом, ds^2 должно иметь вид $ds^2 = g_{00}dx_0^2 - dl^2$. Компонента g_{00} является здесь функцией только от x^0. Поэтому можно всегда выбрать временную координату так, чтобы g_{00} обратилось в c^2. Обозначая ее через t, имеем:

$$ds^2 = c^2dt^2 - dl^2. \tag{108,1}$$

Время t является собственным временем в каждой точке пространства.

Начнем с рассмотрения пространства положительной кривизны; ниже мы будем для краткости говорить о соответствующем решении уравнений гравитации как о *закрытой модели*. Для dl воспользуемся выражением (107,8), в котором «радиус кривизны» a является,

вообще говоря, функцией времени. Таким образом, ds^2 пишем в виде

$$ds^2 = c^2dt^2 - a^2(t)\{d\chi^2 + \sin^2\chi\,(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2)\}. \qquad (108,2)$$

Функция $a(t)$ определяется уравнениями гравитационного поля. Для решения этих уравнений удобно воспользоваться вместо времени величиной η, определяемой соотношением

$$c\,dt = a\,d\eta. \qquad (108,3)$$

Тогда ds^2 напишется в виде

$$ds^2 = a^2(\eta)\{d\eta^2 - d\chi^2 - \sin^2\chi\,(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2)\}. \qquad (108,4)$$

Для составления уравнений поля надо начать с вычисления компонент тензора R_{ik} (координатами x^0, x^1, x^2, x^3 являются η, χ, θ, φ). С помощью значений компонент метрического тензора

$$g_{00} = a^2,\ g_{11} = -a^2,\quad g_{22} = -a^2\ \sin^2\chi,\ \ g_{33} = -a^2\sin^2\chi\,\sin^2\theta$$

вычисляем величины Γ^i_{kl}:

$$\Gamma^0_{00} = \frac{a'}{a},\ \Gamma^0_{\alpha\beta} = \frac{a'}{a^3}g_{\alpha\beta},\ \Gamma^\alpha_{0\beta} = \frac{a'}{a}\delta^\alpha_\beta,\ \ \Gamma^0_{\alpha 0} = \Gamma^\alpha_{00} = 0,$$

где штрих означает дифференцирование по η (компоненты $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$ нет надобности вычислять в явном виде). С помощью этих значений по общей формуле (92,10) получим:

$$R^0_0 = \frac{3}{a^4}(a'^2 - aa'').$$

Из тех же соображений симметрии, которые были применены выше к $g_{0\alpha}$, заранее очевидно, что компоненты $R_{0\alpha} = 0$. Для вычисления же компонент R^β_α замечаем, что если выделить в них члены, содержащие только $g_{\alpha\beta}$ (т. е. только $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$), то эти члены должны составить компоненты трехмерного тензора $-P^\beta_\alpha$, значения которых заранее известны из (107,3) и (107,6):

$$R^\beta_\alpha = -P^\beta_\alpha + \ldots = -\frac{2}{a^2}\delta^\beta_\alpha + \ldots,$$

где многоточие подразумевает члены, содержащие наряду с $g_{\alpha\beta}$ также и g_{00}. В результате вычисления последних получим:

$$R^\beta_\alpha = -\frac{1}{a^4}(2a^2 + a'^2 + aa'')\,\delta^\beta_\alpha,$$

и затем

$$R = R^0_0 + R^\alpha_\alpha = -\frac{6}{a^3}(a + a'').$$

Поскольку в выбранной нами системе отсчета материя неподвижна, то $u^\alpha = 0$, $u^0 = 1/a$ и из (94,9) имеем $T^0_0 = \varepsilon$, где ε — плотность энергии материи. Подставляя полученные выражения в уравнение

$$R^0_0 - \frac{1}{2}R = \frac{8\pi k}{c^4}T^0_0,$$

получим:

$$\frac{8\pi k}{c^4}\varepsilon = \frac{3}{a^4}(a^2 + a'^2). \qquad (108,5)$$

Сюда входят две неизвестные функции ε и a; поэтому необходимо получить еще одно уравнение. В качестве него удобно выбрать (вместо пространственных компонент уравнений тяготения) уравнение $T^i_{0;i} = 0$ — одно из четырех уравнений (94,7), содержащихся, как мы знаем, в уравнениях гравитации. Это уравнение можно вывести и непосредственно с помощью термодинамических соотношений следующим образом.

Пользуясь в уравнениях поля выражением (94,9) для тензора энергии-импульса, мы тем самым пренебрегаем всеми процессами диссипации энергии, приводящими к возрастанию энтропии. Такое пренебрежение, разумеется, здесь вполне законно, поскольку дополнительные члены, которые надо было бы прибавить к T^i_k в связи с диссипацией энергии, ничтожно малы по сравнению с плотностью энергии ε, включающей в себя энергию покоя материальных тел.

Таким образом, при выводе уравнений поля мы можем считать полную энтропию постоянной. Воспользуемся теперь известным термодинамическим соотношением $d\mathscr{E} = T\,dS - p\,dV$, где $\mathscr{E}$, S, V — энергия, энтропия и объем системы, а p, T — давление и температура. При постоянной энтропии имеем просто $d\mathscr{E} = -p\,dV$. Вводя плотность энергии $\varepsilon = \mathscr{E}/V$, без труда находим:

$$d\varepsilon = -(\varepsilon + p)\frac{dV}{V}.$$

Объем пространства V пропорционален, согласно (107,9), кубу радиуса кривизны a. Поэтому $dV/V = 3\,da/a = 3\,d\ln a$, и мы можем написать:

$$-\frac{d\varepsilon}{\varepsilon + p} = 3\,d\ln a,$$

или, интегрируя,

$$3\ln a = -\int\frac{d\varepsilon}{p+\varepsilon} + \text{const} \qquad (108,6)$$

(нижний предел в интеграле постоянен).

Если связь между ε и p (уравнение состояния материи) известна, то уравнение (108,6) определяет ε как функцию от a. Тогда из (108,5) мы можем определить η в виде:

$$\eta = \pm\int\frac{da}{a\sqrt{\frac{8\pi k}{3c^4}\varepsilon a^2 - 1}}. \qquad (108,7)$$

Уравнения (108,6—7) решают в общем виде задачу об определении метрики в изотропной закрытой модели.

Если материя распределена в пространстве в виде отдельных макроскопических тел, то при определении создаваемого ею гравитационного поля мы можем рассматривать эти тела как материальные частицы, обладающие определенными массами, не интересуясь вовсе их внутренним строением. Считая скорости тел сравнительно малыми (малыми по сравнению с c), можно положить просто $\varepsilon=\mu c^2$, где μ — сумма масс тел, отнесенная к единице объема. По той же причине давление «газа», состоящего из этих тел, крайне мало по сравнению с ε и им можно пренебречь (давления же внутри тел, согласно сказанному, не имеют отношения к рассматриваемому вопросу). Что касается имеющегося в пространстве излучения, то его количество относительно мало и его энергией и давлением тоже можно пренебречь.

Таким образом, для описания в терминах рассматриваемой модели современного состояния Вселенной следует пользоваться уравнением состояния «пылевидной» материи

$$\varepsilon=\mu c^2, \quad p=0.$$

Интегрирование в (108,6) дает тогда $\mu a^3=\text{const}$. Это равенство можно было бы написать и непосредственно, так как оно выражает собой просто постоянство суммы M масс тел во всем пространстве, как и должно было быть в рассматриваемом случае пылевидной материи[1]). Поскольку объем пространства в замкнутой модели равен $V=2\pi^2a^3$, то $\text{const}=M/2\pi^2$. Таким образом,

$$\mu a^3=\text{const}=\frac{M}{2\pi^2}. \tag{108,8}$$

Подставив (108,8) в уравнение (108,7) и произведя интегрирование, получим:

$$a=a_0(1-\cos\eta), \tag{108,9}$$

где постоянная

$$a_0=\frac{2kM}{3\pi c^2}.$$

Наконец, для связи между t и η находим из (108,3):

$$t=\frac{a_0}{c}(\eta-\sin\eta). \tag{108,10}$$

Уравнения (108,9—10) определяют в параметрическом виде зависимость $a(t)$. Функция $a(t)$ возрастает от значения нуль при $t=0$ ($\eta=0$) до максимального значения $a=2a_0$, достигаемого при

[1]) Подчеркнем во избежание недоразумений (при сопоставлении с упомянутым в § 107 равенством нулю полного 4-импульса замкнутого мира), что M есть именно сумма масс тел, взятых по отдельности, без учета их гравитационного взаимодействия.

$t=\pi a_0/c$ $(\eta=\pi)$, и затем снова убывает до нуля при $t=2\pi a_0/c$ $(\eta=2\pi)$.

При $\eta\ll 1$ имеем приближенно $a=a_0\eta^2/2$, $t=a_0\eta^3/6c$, так что

$$a\approx\left(\frac{9a_0c^2}{2}\right)^{1/3}t^{2/3}. \qquad (108,11)$$

При этом плотность вещества

$$\mu=\frac{1}{6\pi kt^2}=\frac{8\cdot 10^5}{t^2} \qquad (108,12)$$

(численное значение коэффициента дано для плотности в $г\cdot см^{-3}$ при t в секундах). Обратим внимание на то, что в этом пределе зависимость $\mu(t)$ имеет универсальный характер в том смысле, что не зависит от параметра a_0.

При $a\to 0$ плотность μ обращается в бесконечность. Но при $\mu\to\infty$ давление тоже становится большим, и потому для исследования метрики в этой области надо рассмотреть противоположный случай наибольшего возможного (при данной плотности энергии ε) давления, т. е. описывать материю уравнением состояния

$$p=\frac{\varepsilon}{3}$$

(см. § 35). Из формулы (108,6) получим тогда

$$\varepsilon a^4=\text{const}\equiv\frac{3c^4a_1^2}{8\pi k} \qquad (108,13)$$

(a_1 — новая постоянная), после чего уравнения (108,7) и (108,3) приводят к зависимости

$$a=a_1\sin\eta, \quad t=\frac{a_1}{c}(1-\cos\eta).$$

Поскольку это решение имеет смысл рассматривать только при очень больших значениях ε (т. е. малых a), то положим $\eta\ll 1$. Тогда $a\approx a_1\eta$, $t\approx a_1\eta^2/2c$, так что

$$a=\sqrt{2a_1ct}. \qquad (108,14)$$

При этом

$$\frac{\varepsilon}{c^2}=\frac{3}{32\pi kt^2}=\frac{4{,}5\cdot 10^5}{t^2} \qquad (108,15)$$

(эта зависимость снова не содержит никаких параметров).

Таким образом, и здесь $a\to 0$ при $t\to 0$, так что значение $t=0$ действительно является особой точкой пространственно-временной метрики изотропной модели (и то же самое относится в закрытой модели и ко второй точке, в которой $a=0$). Мы видим также из (108,14), что при изменении знака t величина $a(t)$ сделалась бы мнимой, а ее квадрат — отрицательным. Все четыре компоненты g_{ik}

в (108,2) стали бы при этом отрицательными, а определитель g — положительным. Но такая метрика физически бессмысленна. Это значит, что не имеет физического смысла аналитически продолжать метрику за особую точку.

§ 109. Пространственно-временная метрика открытой изотропной модели

Решение, соответствующее изотропному пространству отрицательной кривизны (*открытая модель*), получается вполне аналогично предыдущему. Вместо (108,2) имеем теперь

$$ds^2 = c^2\,dt^2 - a^2(t)\,\{d\chi^2 + \operatorname{sh}^2\chi\,(d\theta^2 + \sin^2\theta\,d\varphi^2)\}. \qquad (109,1)$$

Вводим снова вместо t переменную η согласно $c\,dt = a\,d\eta$; тогда получаем:

$$ds^2 = a^2(\eta)\,\{d\eta^2 - d\chi^2 - \operatorname{sh}^2\chi\,(d\theta^2 + \sin^2\theta\,d\varphi^2)\}. \qquad (109,2)$$

Это выражение может быть формально получено из (108,4) заменой η, χ, a соответственно на $i\eta$, $i\chi$, ia. Поэтому и уравнения поля можно получить просто путем этой же замены из (108,5—6). Уравнение (108,6) сохраняет при этом свой прежний вид:

$$3\ln a = -\int \frac{d\varepsilon}{\varepsilon + p} + \text{const}, \qquad (109,3)$$

а вместо (108,5) имеем:

$$\frac{8\pi k}{c^4}\,\varepsilon = \frac{3}{a^4}\,(a'^2 - a^2). \qquad (109,4)$$

Соответственно этому находим вместо (108,7)

$$\eta = \pm \int \frac{da}{a\sqrt{\dfrac{8\pi k}{3c^4}\,\varepsilon a^2 + 1}}. \qquad (109,5)$$

Для пылевидной материи получаем отсюда [1]):

$$a = a_0\,(\operatorname{ch}\eta - 1), \quad t = \frac{a_0}{c}\,(\operatorname{sh}\eta - \eta), \qquad (109,6)$$

$$\mu a^3 = \frac{3c^2}{4\pi k}\,a_0. \qquad (109,7)$$

---

[1]) Отметим, что преобразованием

$$r = Ae^{\eta}\operatorname{sh}\chi, \qquad c\tau = Ae^{\eta}\operatorname{ch}\chi,$$

$$Ae^{\eta} = \sqrt{c^2\tau^2 - r^2}, \quad \operatorname{th}\chi = \frac{r}{c\tau}$$

выражение (109,2) приводится к «конформно-галилеевому» виду

$$ds^2 = f(r, \tau)\,[c^2\,d\tau^2 - dr^2 - r^2\,(d\theta^2 + \sin^2\theta\,d\varphi^2)].$$

Формулы (109,6) определяют в параметрическом виде зависимость $a(t)$. В отличие от замкнутой модели здесь радиус кривизны меняется монотонно, возрастая от нуля при $t=0$ ($\eta=0$) до бесконечности при $t\to\infty$ ($\eta\to\infty$). Плотность же материи, соответственно, монотонно убывает от бесконечного значения при $t=0$ (при $\eta\ll 1$ закон этого убывания дается той же приближенной формулой (108,12), что и в закрытой модели).

Для больших плотностей решение (109,6—7) неприменимо и надо снова обратиться к случаю $p=\varepsilon/3$. При этом снова получается соотношение

$$\varepsilon a^4 = \text{const} \equiv \frac{3c^4 a_1^2}{8\pi k}, \qquad (109,8)$$

а для зависимости $a(t)$ находим:

$$a = a_1 \operatorname{sh}\eta, \quad t = \frac{a_1}{c}(\operatorname{ch}\eta - 1),$$

или при $\eta\ll 1$

$$a = \sqrt{2a_1 ct} \qquad (109,9)$$

[и прежняя формула (108,15) для $\varepsilon(t)$]. Таким образом, и в открытой модели метрика имеет особую точку (но в отличие от закрытой модели — лишь одну).

Наконец, предельным случаем рассмотренных решений, соответствующим бесконечному радиусу кривизны пространства, является модель с плоским (евклидовым) пространством. Интервал ds^2 в этой модели можно написать в виде:

$$ds^2 = c^2\,dt^2 - b^2(t)\,(dx^2 + dy^2 + dz^2) \qquad (109,10)$$

(в качестве пространственных координат выбраны «декартовы» координаты x, y, z). Зависящий от времени множитель в элементе пространственного расстояния не меняет, очевидно, евклидовости пространственной метрики, так как при заданном t этот множитель постоянен и простым преобразованием координат может быть приведен к единице. Вычисления, аналогичные произведенным в

Конкретно, в случае (109,6) получим (положив $A=a_0/2$):

$$ds^2 = \left(1 - \frac{a_0}{2\sqrt{c^2\tau^2 - r^2}}\right)^4 \left\{c^2\,d\tau^2 - dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\,d\varphi^2)\right\}$$

(*В. А. Фок*, 1955). При больших значениях $\sqrt{c^2\tau^2 - r^2}$ (чему соответствуют $\eta\gg 1$) эта метрика стремится к галилеевой, что естественно было ожидать ввиду стремления радиуса кривизны к бесконечности.

В координатах r, θ, φ, τ материя не неподвижна и ее распределение не однородно; при этом распределение и движение материи оказываются центрально-симметрическими вокруг произвольной точки пространства, выбранной в качестве начала координат r, θ, φ.

предыдущем параграфе, приводят к следующим уравнениям:

$$\frac{8\pi k}{c^2}\varepsilon=\frac{3}{b^2}\left(\frac{db}{dt}\right)^2, \quad 3\ln b=-\int\frac{d\varepsilon}{p+\varepsilon}+\text{const}.$$

Для случая малых давлений находим:

$$\mu b^3=\text{const}, \quad b=\text{const}\, t^{2/3}. \qquad (109{,}11)$$

При малых t опять надо рассматривать случай $p=\varepsilon/3$, при котором получаем:

$$\varepsilon b^4=\text{const}, \quad b=\text{const}\sqrt{t}. \qquad (109{,}12)$$

Таким образом, и в этом случае метрика имеет особую точку ($t=0$).

Отметим, что все найденные изотропные решения существуют лишь при отличной от нуля плотности материи; для пустого пространства уравнения Эйнштейна не имеют такого рода решений[1]). Упомянем также, что в математическом отношении они являются частным случаем более общего класса решений, содержащего три физически различные произвольные функции пространственных координат (см. задачу).

Задача

Найти общий вид вблизи особой точки для метрики, в которой расширение пространства происходит «квазиоднородным» образом, т. е. так, что все компоненты $\gamma_{\alpha\beta}=-g_{\alpha\beta}$ (в синхронной системе отсчета) стремятся к нулю по одинаковому закону. Пространство заполнено материей с уравнением состояния $p=\varepsilon/3$ (*Е. М. Лифшиц, И. М. Халатников*, 1960).

Решение. Ищем решение вблизи особой точки ($t=0$) в виде:

$$\gamma_{\alpha\beta}=ta_{\alpha\beta}+t^2b_{\alpha\beta}+\dots, \qquad (1)$$

где $a_{\alpha\beta}$, $b_{\alpha\beta}$ — функции координат (пространственных)[2]); ниже полагаем $c=1$. Обратный тензор

$$\gamma^{\alpha\beta}=\frac{1}{t}a^{\alpha\beta}-b^{\alpha\beta},$$

где тензор $a^{\alpha\beta}$ обратен $a_{\alpha\beta}$, а $b^{\alpha\beta}=a^{\alpha\gamma}a^{\beta\delta}b_{\gamma\delta}$; ниже все операции поднимания индексов и ковариантного дифференцирования производятся при помощи не зависящей от времени метрики $a_{\alpha\beta}$.

---

[1]) При $\varepsilon=0$ из уравнения (109,5) мы получили бы $a=a_0e^{\eta}=ct$ [уравнение же (108,7) вообще теряет смысл ввиду мнимости корня]. Но метрика

$$ds^2=c^2\,dt^2-c^2t^2\left\{d\chi^2+\operatorname{sh}^2\chi\,(d\theta^2+\sin^2\theta\,d\varphi^2)\right\}$$

преобразованием $r=ct\operatorname{sh}\chi$, $\tau=t\operatorname{ch}\chi$ приводится к виду

$$ds^2=c^2\,d\tau^2-dr^2-r^2\,(d\theta^2+\sin^2\theta\,d\varphi^2),$$

т. е. просто к галилееву пространству-времени.

[2]) Фридмановскому решению отвечает специальный выбор функций $a_{\alpha\beta}$, соответствующий пространству постоянной кривизны.

Вычисляя левые стороны уравнений (99,11) и (99,12) соответственно с точностью до двух и до одного главного порядка по $1/t$, получим:

$$-\frac{3}{4t^2}+\frac{1}{2t}b=\frac{8\pi k}{3}\varepsilon\left(-4u_0^2+1\right),$$

$$\frac{1}{2}\left(b_{;\alpha}-b^{\beta}_{\alpha;\beta}\right)=-\frac{32\pi k}{3}\varepsilon u_\alpha u_0$$

$\left(\text{где } b=b^{\alpha}_{\alpha}\right)$. Учитывая также тождество

$$1=u_iu^i\approx u_0^2-\frac{1}{t}u_\alpha u_\beta a^{\alpha\beta},$$

найдем:

$$8\pi k\varepsilon=\frac{3}{4t^2}-\frac{b}{2t},\qquad u_\alpha=\frac{t^2}{2}\left(b_{;\alpha}-b^{\beta}_{\alpha;\beta}\right). \tag{2}$$

Трехмерные символы Кристоффеля, а с ними и тензор $P_{\alpha\beta}$ в первом по $1/t$ приближении не зависят от времени; при этом $P_{\alpha\beta}$ совпадают с выражениями, получающимися при вычислении с метрикой просто $a_{\alpha\beta}$. Учитывая это, найдем, что в уравнении (99,13) члены порядка t^{-2} взаимно сокращаются, а члены $\sim 1/t$ дают

$$P^{\beta}_{\alpha}+\frac{3}{4}b^{\beta}_{\alpha}+\frac{5}{12}\delta^{\beta}_{\alpha}b=0,$$

откуда

$$b^{\beta}_{\alpha}=-\frac{4}{3}P^{\beta}_{\alpha}+\frac{5}{18}\delta^{\beta}_{\alpha}P \tag{3}$$

(где $P=a^{\beta\gamma}P_{\beta\gamma}$). Ввиду тождества

$$P^{\beta}_{\alpha;\beta}-\frac{1}{2}P_{;\alpha}=0$$

[см. (92,13)] имеет место соотношение

$$b^{\beta}_{\alpha;\beta}=\frac{7}{9}b_{;\alpha},$$

и потому u_α можно переписать в виде:

$$u_\alpha=\frac{t^2}{9}b_{;\alpha}. \tag{4}$$

Таким образом, все шесть функций $a_{\alpha\beta}$ остаются произвольными, а по ним определяются коэффициенты $b_{\alpha\beta}$ следующего члена разложения (1). Выбор времени в метрике (1) полностью определен условием $t=0$ в особой точке; пространственные же координаты допускают еще произвольные преобразования, не затрагивающие времени (ими можно воспользоваться, например, для приведения тензора $a_{\alpha\beta}$ к диагональному виду). Поэтому полученное решение содержит всего три «физически различные» произвольные функции.

Отметим, что в этом решении пространственная метрика неоднородна и анизотропна, а распределение плотности материи стремится при $t\to 0$ к однородному. Трехмерная скорость **v** имеет [в приближении (4)] равный нулю ротор, а ее величина стремится к нулю по закону

$$v^2=v_\alpha v_\beta\gamma^{\alpha\beta}\sim t^3.$$

§ 110. Красное смещение

Основной характерной чертой всех рассмотренных решений является нестационарность метрики: радиус кривизны пространства является функцией времени. Изменение же радиуса кривизны приводит к изменению всех вообще расстояний между телами в пространстве, как это видно уже из того обстоятельства, что элемент пространственного расстояния dl пропорционален a. Так, при увеличении a в таком пространстве тела «разбегаются» друг от друга (в открытой модели увеличению a соответствуют $\eta > 0$, а в закрытой $0 < \eta < \pi$). С точки зрения наблюдателя, находящегося на одном из них, дело будет выглядеть так, как если бы остальные тела двигались в радиальных направлениях, удаляясь от наблюдателя. Скорость этого «разбегания» (в данный момент t) сама пропорциональна расстоянию между телами.

Это предсказание теории следует поставить в соответствие с фундаментальным астрономическим фактом — эффектом красного смещения линий в спектрах галактик. Истолковав это смещение как допплеровское, мы приходим к заключению о «разбегании» галактик, т. е. о том что в настоящее время Вселенная расширяется [1]).

Рассмотрим распространение лучей света в изотропном пространстве. Для этого проще всего воспользоваться тем, что вдоль мировой линии распространения светового сигнала интервал $ds = 0$. Точку, из которой выходит луч света, выберем в качестве начала координат χ, θ, φ. Из соображений симметрии очевидно, что лучи будут распространяться «радиально», т. е. вдоль линии $\theta = \text{const}$, $\varphi = \text{const}$. Полагая соответственно этому в (108,4) или (109,2) $d\theta = d\varphi = 0$, получим $ds^2 = a^2(d\eta^2 - d\chi^2)$. Приравнивая нулю, находим $d\eta = \pm d\chi$ или, интегрируя:

$$\chi = \pm\eta + \text{const}. \tag{110,1}$$

Знак плюс перед η соответствует лучу, распространяющемуся по направлению от начала координат, а знак минус — лучу, проходящему в начало координат. В таком виде уравнение (110,1) применимо к распространению лучей как в открытой, так и в закрытой моделях. С помощью формул предыдущих параграфов можно выразить отсюда проходимое лучом расстояние как функцию времени.

[1]) Заключение о «разбегании» тел при увеличении $a(t)$ можно сделать, конечно, лишь при условии малости энергии их взаимодействия по сравнению с кинетической энергией их движения при «разбегании»; это условие во всяком случае удовлетворяется для достаточно удаленных галактик. В противном же случае взаимные расстояния тел определяются в основном их взаимодействием; поэтому, например, рассматриваемый эффект практически не должен сказываться на размерах самих туманностей и тем более звезд.

В открытой модели луч света, вышедший из некоторой точки, по мере своего распространения неограниченно удаляется от нее. В закрытой же модели вышедший из исходной точки луч света в конце концов может дойти до «противоположного полюса» пространства (чему соответствует изменение χ от 0 до π); при дальнейшем распространении луч начнет приближаться к исходной точке. Обходу луча «вокруг пространства» и возвращению в исходную точку соответствовало бы изменение χ от 0 до 2π. Из (110,1) мы видим, что при этом и η должно было бы измениться на 2π, что, однако, невозможно (за исключением одного случая — выхода луча в момент, соответствующий $\eta = 0$). Таким образом, луч не мог бы успеть возвратиться в исходную точку, обойдя «вокруг пространства».

Лучу, приходящему в точку наблюдения (начало координат), соответствует уравнение (110,1) со знаком минус перед η. Если момент прихода луча в эту точку есть $t(\eta_0)$, то при $\eta = \eta_0$ должно быть $\chi = 0$, так что уравнение распространения таких лучей имеет вид

$$\chi = \eta_0 - \eta. \qquad (110,2)$$

Отсюда видно, что к наблюдателю, находящемуся в точке $\chi = 0$, могут дойти к моменту времени $t(\eta_0)$ лучи, вышедшие из точек, находящихся на «расстояниях», не превышающих $\chi = \eta_0$.

Этот результат, относящийся как к открытой, так и к закрытой моделям, весьма существен. Мы видим, что в каждый момент времени $t(\eta)$ в данной точке пространства физическому наблюдению доступно не все пространство, а лишь его часть, соответствующая $\chi \leqslant \eta$. С математической точки зрения «видимая область» пространства представляет собой сечение четырехмерного пространства-времени световым конусом. Это сечение оказывается конечным как для открытой так и для закрытой моделей (бесконечным же в открытой модели является сечение гиперповерхностью $t = \text{const}$, соответствующее пространству, рассматриваемому во всех своих точках в один и тот же момент времени t). В этом смысле разница между открытой и закрытой моделями оказывается менее глубокой, чем это могло бы на первый взгляд показаться.

Чем более удалена от наблюдателя наблюдаемая им в данный момент времени область пространства, тем более ранним моментам времени она соответствует. Представим себе сферическую поверхность, являющуюся геометрическим местом точек, из которых свет вышел в момент времени $t(\eta - \chi)$ и наблюдается в начале координат в момент $t(\eta)$. Площадь этой поверхности равна $4\pi a^2(\eta - \chi)\sin^2\chi$ (в закрытой модели) или $4\pi a^2(\eta - \chi)\,\mathrm{sh}^2\chi$ (в открытой модели). По мере удаления от наблюдателя площадь «видимой сферы» сначала возрастает от нуля (при $\chi = 0$), затем достигает максимума,

после чего снова уменьшается, обращаясь в нуль при $\chi=\eta$ [где $a(\eta-\chi)=a(0)=0$]. Это значит, что сечение световым конусом не только конечно, но и замкнуто. Оно как бы замыкается в точке, «противоположной» наблюдателю; ее можно увидеть при наблюдении в любом направлении в пространстве. В этой точке $\varepsilon\to\infty$, так что наблюдению доступна, в принципе, материя на всех ступенях ее эволюции.

Полное наблюдаемое количество материи равно в открытой модели интегралу

$$M_{\text{набл}}=4\pi\int\limits_0^\eta \mu a^3 \operatorname{sh}^2\chi\, d\chi.$$

Подставив μa^3 из (109,7), получим:

$$M_{\text{набл}}=\frac{3c^2a_0}{2k}(\operatorname{sh}\eta\operatorname{ch}\eta-\eta). \tag{110,3}$$

Эта величина неограниченно возрастает при $\eta\to\infty$. В закрытой же модели возрастание $M_{\text{набл}}$ ограничено, разумеется, полной массой M; аналогичным образом получим в этом случае:

$$M_{\text{набл}}=\frac{M}{\pi}(\eta-\sin\eta\cos\eta). \tag{110,4}$$

По мере возрастания η от 0 до π эта величина возрастает от 0 до M; в дальнейшем же увеличение $M_{\text{набл}}$ согласно полученной формуле фиктивно и соответствует просто тому, что в «сжимающемся» мире удаленные тела наблюдались бы дважды (по свету, «обошедшему пространство» с двух сторон).

Рассмотрим теперь изменение частоты света при его распространении в изотропном пространстве. Для этого замечаем предварительно следующее обстоятельство. Пусть в некоторой точке пространства происходят два события, разделенные промежутком времени $dt=a(\eta)\,d\eta/c$. Если в моменты этих событий отправляются световые сигналы, наблюдаемые в другой точке пространства, то между моментами их наблюдения пройдет промежуток времени, соответствующий тому же изменению $d\eta$ величины η, что и в точке отправления. Это следует непосредственно из уравнения (110,1), согласно которому изменение величины η за время распространения луча света из одной точки в другую зависит только от разности координат χ этих точек. Но поскольку за время распространения сигнала радиус кривизны a изменится, то промежутки времени t между моментами отправления двух сигналов и моментами их наблюдения будут различными; отношение этих промежутков равно отношению соответствующих значений a.

Отсюда следует, в частности, что и периоды световых колебаний, измеренные в мировом времени t, меняются вдоль луча про-

порционально a. Частота же света будет, очевидно, обратно пропорциональна a. Таким образом, при распространении луча света вдоль него постоянно произведение

$$\omega a = \text{const}. \qquad (110,5)$$

Предположим, что в момент времени $t(\eta)$ мы наблюдаем свет, излученный источником, находящимся на расстоянии, соответствующем определенному значению координаты χ. Моментом испускания этого света является согласно (110,1) момент $t(\eta-\chi)$. Если ω_0 есть частота света в момент его испускания, то наблюдаемая нами частота ω равна согласно (110,5)

$$\omega = \omega_0 \frac{a(\eta-\chi)}{a(\eta)}. \qquad (110,6)$$

При монотонно возрастающей функции $a(\eta)$ имеем $\omega < \omega_0$, т. е. происходит уменьшение частоты света. Это значит, что при наблюдении спектра приходящего света все его линии должны оказаться смещенными в красную сторону по сравнению со спектрами тех же веществ в обычных условиях. Это явление *красного смещения* представляет собой, по существу, эффект Допплера от взаимного «разбегания» тел.

Величина красного смещения, измеряемая отношением ω/ω_0 сдвинутой частоты к несдвинутой, зависит (при данном моменте наблюдения) от расстояния, на котором находится наблюдаемый источник света [в соотношение (110,6) входит координата χ источника света]. При не слишком больших расстояниях можно разложить $a(\eta-\chi)$ в ряд по степеням χ, ограничившись первыми двумя членами:

$$\frac{\omega}{\omega_0} = 1 - \chi \frac{a'(\eta)}{a(\eta)}$$

(штрих означает дифференцирование по η). Далее, замечаем, что произведение $\chi a(\eta)$ является здесь не чем иным, как расстоянием l до наблюдаемого источника. Действительно, «радиальный» элемент длины равен $dl = a d\chi$; при интегрировании этого соотношения возникает вопрос о том, каким способом физического наблюдения определяется расстояние, — в зависимости от этого надо брать значения a в разных точках пути интегрирования в разные моменты времени (интегрирование при $\eta = \text{const}$ соответствовало бы одновременному рассмотрению всех точек пути, что физически неосуществимо). Но при «малых» расстояниях можно пренебречь изменением a вдоль пути интегрирования и написать просто $l = a\chi$ со значением a, взятым в момент наблюдения.

В результате находим для относительной величины изменения частоты следующую формулу:

$$\frac{\omega-\omega_0}{\omega_0} = -\frac{h}{c}\, l, \qquad (110,7)$$

где введено обозначение

$$h = c\frac{a'(\eta)}{a^2(\eta)} = \frac{1}{a}\frac{da}{dt} \tag{110,8}$$

для так называемой *постоянной Хэббла*. Эта величина не зависит при заданном моменте наблюдения от l. Таким образом, относительный сдвиг спектральных линий должен быть пропорционален расстоянию до наблюдаемого источника света.

Рассматривая красное смещение как результат эффекта Допплера, можно определить скорости v тел, с которыми они удаляются от наблюдателя. Написав $(\omega - \omega_0)/\omega = -v/c$ и сравнивая с (110,7), имеем:

$$v = hl \tag{110,9}$$

(эту формулу можно получить и непосредственно вычисляя производную $v = d(a\chi)/dt$).

Астрономические данные подтверждают закон (110,7), но определение значения постоянной Хэббла затрудняется неопределенностью в установлении масштаба космических расстояний, пригодного для удаленных галактик. Последние определения приводят к значению

$$h \approx 0{,}8 \cdot 10^{-10}\ \text{год}^{-1} = 0{,}25 \cdot 10^{-17}\ \text{сек}^{-1},$$
$$\frac{1}{h} \approx 4 \cdot 10^{17}\ \text{сек} = 1{,}3 \cdot 10^9\ \text{год}. \tag{110,10}$$

Это значение h соответствует «скорости разбегания» на 25 *км/сек* на каждый миллион световых лет расстояния.

Подставляя в уравнение (109,4) $\varepsilon = \mu c^2$ и $h = ca'/a^2$, получим для открытой модели следующее соотношение:

$$\frac{c^2}{a^2} = h^2 - \frac{8\pi k}{3}\mu. \tag{110,11}$$

Комбинируя это уравнение с равенством

$$h = \frac{c \operatorname{sh} \eta}{a_0 (\operatorname{ch} \eta - 1)^2} = \frac{c}{a} \operatorname{cth} \frac{\eta}{2},$$

получим:

$$\operatorname{ch} \frac{\eta}{2} = h \sqrt{\frac{3}{8\pi k\mu}}. \tag{110,12}$$

Для закрытой модели аналогичным образом получим:

$$\frac{c^2}{a^2} = \frac{8\pi k}{3}\mu - h^2, \tag{110,13}$$

$$\cos \frac{\eta}{2} = h \sqrt{\frac{3}{8\pi k\mu}}. \tag{110,14}$$

Сравнивая (110,11) и (110,13), мы видим, что кривизна пространства отрицательна или положительна, смотря по тому, отрицательна или положительна разность $8\pi k\mu/3 - h^2$. Эта разность обращается в нуль при $\mu = \mu_k$, где

$$\mu_k = \frac{3\pi^2}{8\pi k}. \tag{110,15}$$

Со значением (110,10) получим $\mu_k \approx 1 \cdot 10^{-29}$ *г/см*³. При современном состоянии астрономических сведений оценка средней плотности материи в пространстве может быть произведена лишь с весьма небольшой точностью. Для оценки, основанной на подсчете числа галактик и на их средней массе, принимают в настоящее время значение около $3 \cdot 10^{-31}$ *г/см*³. Это значение в 30 раз меньше μ_k и, таким образом, свидетельствовало бы в пользу открытой модели. Однако, не говоря уже о недостаточной достоверности самого этого значения, следует иметь в виду, что в нем не учитывается возможное существование межгалактического темного газа, учет которого мог бы существенно повысить среднюю плотность материи.

Отметим некоторое неравенство, которое оказывается возможным получить при заданном значении величины h. Для открытой модели имеем $h = c\,\mathrm{sh}\,\eta/a_0(\mathrm{ch}\,\eta - 1)^2$, и отсюда

$$t = \frac{a_0}{c}(\mathrm{sh}\,\eta - \eta) = \frac{\mathrm{sh}\,\eta\,(\mathrm{sh}\,\eta - \eta)}{h\,(\mathrm{ch}\,\eta - 1)^2}.$$

Поскольку $0 < \eta < \infty$, то должно быть

$$\frac{2}{3h} < t < \frac{1}{h}. \tag{110.16}$$

Аналогично, для закрытой модели получим[1])

$$t = \frac{\sin\eta\,(\eta - \sin\eta)}{h\,(1 - \cos\eta)^2}.$$

Возрастанию $a(\eta)$ соответствует интервал $0 < \eta < \pi$; поэтому получаем:

$$0 < t < \frac{2}{3h}. \tag{110,17}$$

Далее, определим интенсивность I света, доходящего до наблюдателя от источника, находящегося на расстоянии, соответствующем определенному значению координаты χ. Плотность потока световой энергии в точке наблюдения обратно пропорциональна поверхности сферы, проведенной через рассматриваемую точку с центром в точке

[1]) Неопределенность значения μ не позволяет сколько-нибудь точно вычислить значение η, тем более, что нет уверенности даже в знаке $\mu - \mu_k$. Положив в (110,12) $\mu = 3 \cdot 10^{-31}$ *г/см*³ [и взяв h из (110,10)], получим $\eta = 5{,}0$. Если положить $\mu = 10^{-30}$ *г/см*³, то $\eta = 6{,}1$.

нахождения источника; в пространстве отрицательной кривизны площадь поверхности сферы равна $4\pi a^2 \operatorname{sh}^2\chi$. Свет, испущенный источником в течение времени $dt = a(\eta-\chi)\,d\eta/c$, будет приходить в точку наблюдения в течение времени $a(\eta)\,dt/a(\eta-\chi) = a(\eta)\,d\eta/c$. Поскольку интенсивность определяется как поток световой энергии в единицу времени, то, следовательно, в I появится множитель $a(\eta-\chi)/a(\eta)$. Наконец, энергия волнового пакета пропорциональна частоте [см. (53,9)]; поскольку частота меняется при распространении света по закону (110,5), то это приведет к появлению в I еще одного множителя $a(\eta-\chi)/a(\eta)$. В результате окончательно получаем интенсивность в виде

$$I = \mathrm{const}\cdot\frac{a^2(\eta-\chi)}{a^4(\eta)\operatorname{sh}^2\chi}. \qquad (110,18)$$

Для закрытой модели получилось бы аналогично:

$$I = \mathrm{const}\cdot\frac{a^2(\eta-\chi)}{a^4(\eta)\sin^2\chi}. \qquad (110,19)$$

Этими формулами устанавливается зависимость видимой яркости наблюдаемого объекта от его расстояния (при заданной абсолютной яркости). При малых χ можно положить $a(\eta-\chi)\approx a(\eta)$, и тогда $I \sim 1/a^2(\eta)\,\chi^2 = 1/l^2$, т. е. обычный закон уменьшения интенсивности обратно пропорционально квадрату расстояния.

Наконец, рассмотрим вопрос о так называемых собственных движениях тел. Говоря о плотности и движении материи, мы везде подразумевали усредненную плотность и усредненное движение; в частности, в той системе отсчета, которой мы все время пользуемся, скорость усредненного движения равна нулю. Истинные же скорости тел обнаруживают некоторый разброс вокруг своего среднего значения. С течением времени скорости собственного движения тел меняются. Для определения закона этого изменения рассмотрим свободно движущееся тело и выберем начало координат в какой-либо точке его траектории. Тогда траекторией будет являться радиальная линия $\theta = \mathrm{const}$, $\varphi = \mathrm{const}$. Уравнение Гамильтона — Якоби (87,6) после подстановки значений g^{ik} примет вид

$$\left(\frac{\partial S}{\partial \chi}\right)^2 - \left(\frac{\partial S}{\partial \eta}\right)^2 + m^2c^2a^2(\eta) = 0. \qquad (110,20)$$

Поскольку в коэффициенты этого уравнения χ не входит (т. е. координата χ циклична), то имеет место закон сохранения $\partial S/\partial\chi = \mathrm{const}$. Импульс же p движущегося тела равен, по общему определению, $p = \partial S/\partial l = \partial S/a\partial\chi$. Таким образом, при движении тела остается постоянным произведение

$$pa = \mathrm{const}. \qquad (110,21)$$

Вводя скорость v собственного движения тела согласно

$$p = mv/\sqrt{1 - v^2/c^2},$$

получим:

$$va/\sqrt{1-v^2/c^2}=\text{const}. \qquad (110,22)$$

Этим соотношением определяется закон изменения скоростей со временем. По мере возрастания a скорости v монотонно падают.

Задачи

1. Найти первые два члена разложения видимой яркости галактики как функции ее красного смещения; абсолютная яркость галактики меняется со временем по экспоненциальному закону $I_{\text{абс}}=\text{const}\cdot e^{\alpha t}$ (*Г. Робертсон*, 1955).

Решение. Зависимость видимой яркости туманности, наблюдаемой в «момент» η, от расстояния χ дается (для закрытой модели) формулой

$$I=\text{const}\cdot e^{\alpha[t(\eta-\chi)-t(\eta)]}\,\frac{a^2(\eta-\chi)}{a^4(\eta)\sin^2\chi}.$$

Красное смещение определим как относительное изменение длины волны:

$$z=\frac{\lambda-\lambda_0}{\lambda_0}=\frac{\omega_0-\omega}{\omega}=\frac{a(\eta)-a(\eta-\chi)}{a(\eta-\chi)}.$$

Разлагая I и z по степеням χ [с функциями $a(\eta)$ и $t(\eta)$ из (108,9), (108.10)] и исключая затем χ из получающихся выражений, находим в результате:

$$I=\text{const}\cdot\frac{1}{z^2}\left[1-\left(1-\frac{q}{2}+\frac{\alpha c}{h}\right)z\right],$$

где введено обозначение

$$q=\frac{2}{1+\cos\eta}=\frac{\mu}{\mu_k}>1.$$

Для открытой модели получается такая же формула с

$$q=\frac{2}{1+\operatorname{ch}\eta}=\frac{\mu}{\mu_k}<1.$$

2. Найти первые члены разложения числа галактик, находящихся внутри «сферы» заданного радиуса, как функции от красного смещения на границе сферы (пространственное распределение галактик предполагается однородным).

Решение. Число N галактик, находящихся на «расстоянии» $\leqslant\chi$ есть (в закрытой модели)

$$N=\text{const}\cdot\int_0^{\chi}\sin^2\chi\,d\chi\approx\text{const}\cdot\chi^3.$$

Подставляя сюда первые два члена разложения функции $\chi(z)$, получим:

$$N=\text{const}\cdot z^3\left[1-\frac{3}{4}(2+q)\,z\right].$$

В таком виде эта формула справедлива и для открытой модели.

§ 111. Гравитационная устойчивость изотропного мира

Рассмотрим вопрос о поведении малых возмущений в изотропной модели, т. е. о ее гравитационной устойчивости (*Е. М. Лифшиц*, 1946). При этом мы ограничимся рассмотрением возмущений в сравнительно небольших областях пространства — областях, линейные размеры которых малы по сравнению с радиусом a[1]).

В каждой такой области пространственная метрика может быть принята в первом приближении евклидовой, т. е. метрика (107,8) или (107,12) заменится метрикой

$$dl^2 = a^2(\eta)(dx^2 + dy^2 + dz^2), \qquad (111,1)$$

где x, y, z — декартовы координаты, измеренные в единицах радиуса a. В качестве временной координаты будем по-прежнему пользоваться переменной η.

Без ограничения общности, будем описывать возмущенное поле по-прежнему в синхронной системе отсчета, т. е. наложим на изменения δg_{ik} метрического тензора условия $\delta g_{00} = \delta g_{0\alpha} = 0$. Варьируя при этих условиях тождество $g_{ik}u^i u^k = 1$ (и имея в виду, что невозмущенные значения компонент 4-скорости материи $u^0 = 1/a$, $u^\alpha = 0$[2])), получим $g_{00}u^0 \delta u^0 = 0$, откуда $\delta u^0 = 0$. Возмущения же δu^α, вообще говоря, отличны от нуля, так что система отсчета — уже не сопутствующая.

Возмущения пространственного метрического тензора обозначим посредством $h_{\alpha\beta} \equiv \delta\gamma_{\alpha\beta} = -\delta g_{\alpha\beta}$. Тогда $\delta\gamma^{\alpha\beta} = -h^{\alpha\beta}$, причем поднимание индексов у $h_{\alpha\beta}$ осуществляется с помощью невозмущенной метрики $\gamma_{\alpha\beta}$.

В линейном приближении малые возмущения гравитационного поля удовлетворяют уравнениям

$$\delta R_i^k - \frac{1}{2}\,\delta_k^i \delta R = \frac{8\pi k}{c^4}\,\delta T_i^k. \qquad (111,2)$$

В синхронной системе отсчета вариации компонент тензора энергии-импульса (94,9) равны:

$$\delta T_\alpha^\beta = -\delta_\alpha^\beta\,\delta p, \quad \delta T_0^\alpha = a(p+\varepsilon)\,\delta u^\alpha, \quad \delta T_0^0 = \delta\varepsilon. \qquad (111,3)$$

Ввиду малости $\delta\varepsilon$ и δp можно написать $\delta p = \frac{dp}{d\varepsilon}\delta\varepsilon$, и мы получаем

---

[1]) Более подробное изложение вопроса, в том числе исследование возмущений в областях сравнимых с a размеров — см. УФН 80, 411 (1963); Adv. of. Phys. 12, 208 (1963).

[2]) Невозмущенные значения величин мы будем обозначать в этом параграфе буквами без дополнительного индекса (0).

соотношения

$$\delta T_\alpha^\beta = -\delta_\alpha^\beta \frac{dp}{d\varepsilon} \delta T_0^0. \tag{111,4}$$

Формулы для δR_i^k можно получить варьированием выражений (99,10). Поскольку невозмущенный метрический тензор $\gamma_{\alpha\beta} = a^2 \delta_{\alpha\beta}$, то невозмущенные значения

$$\varkappa_{\alpha\beta} = \frac{2\dot{a}}{a} \gamma_{\alpha\beta} = \frac{2a'}{a^2} \gamma_{\alpha\beta}, \quad \varkappa_\alpha^\beta = \frac{2a'}{a^2} \delta_\alpha^\beta,$$

где точка означает дифференцирование по t, а штрих — по η. Возмущения же величин $\varkappa_{\alpha\beta}$ и $\varkappa_\alpha^\beta = \varkappa_{\alpha\gamma}\gamma^{\gamma\beta}$:

$$\delta\varkappa_{\alpha\beta} = \dot{h}_{\alpha\beta} = \frac{1}{a} h'_{\alpha\beta}\ , \quad \delta\varkappa_\alpha^\beta = -h^{\beta\gamma}\varkappa_{\alpha\gamma} + \gamma^{\beta\gamma}\dot{h}_{\alpha\gamma} = \dot{h}_\alpha^\beta = \frac{1}{a} h_\alpha^{\beta\prime}\ ,$$

где $h_\alpha^\beta = \gamma^{\beta\gamma} h_{\alpha\gamma}$. Невозмущенные значения трехмерного тензора P_α^β для евклидовой метрики (111,1) равны нулю. Вариации же δP_α^β вычисляются по формулам (1), (2), полученным в задаче 2 к § 102: очевидно, что δP_α^β выражается через $\delta\gamma_{\alpha\beta}$ так же, как 4-тензор δR_{ik} выражается через δg_{ik}, причем все тензорные операции производятся в трехмерном пространстве с метрикой (111,1); ввиду евклидовости этой метрики все ковариантные дифференцирования сводятся к простым дифференцированиям по координатам x^α (контравариантные же дифференцирования — еще и к делению на a^2). Имея все это в виду (и переходя везде от производных по t к производным по η), получим после простого вычисления:

$$\delta R_\alpha^\beta = -\frac{1}{2a^2}\left(h_{\alpha,\,\gamma}^{\gamma,\,\beta} + h_{\gamma,\,\alpha}^{\beta,\,\gamma} - h_{\alpha,\,\gamma}^{\beta,\,\gamma} - h_{,\,\alpha}^{,\,\beta}\right) - \frac{1}{2a^2} h_\alpha^{\beta\prime\prime} - \frac{a'}{a^3} h_\alpha^{\beta\prime} - \frac{a'}{2a^3} h' \delta_\alpha^\beta\ ,$$

$$\delta R_0^0 = -\frac{1}{2a^2} h'' - \frac{a'}{2a^3} h', \quad \delta R_0^\alpha = \frac{1}{2a^2}\left(h^{,\,\alpha} - h_\beta^{\alpha,\,\beta}\right)' \tag{111,5}$$

($h \equiv h_\alpha^\alpha$). Здесь как нижние, так и верхние индексы после запятой означают простые дифференцирования по координатам x^α (мы продолжаем писать индексы вверху и внизу лишь для сохранения единообразия обозначений).

Окончательные уравнения для возмущения h_α^β мы получим, подставив в (111,4) компоненты δT_i^k, выраженные через δR_i^k согласно (111,2). В качестве этих уравнений удобно выбрать уравнения, получающиеся из (111,4) при $\alpha \neq \beta$ и при упрощении по индексам α, β. Они гласят:

$$\begin{gathered} \left(h_{\alpha,\,\gamma}^{\gamma,\,\beta} + h_{\gamma,\,\alpha}^{\beta,\,\gamma} - h_{,\,\alpha}^{,\,\beta} - h_{\alpha,\,\gamma}^{\beta,\,\gamma}\right) + h_\alpha^{\beta\prime\prime} + 2\frac{a'}{a} h_\alpha^{\beta\prime} = 0, \quad \alpha \neq \beta, \\ \frac{1}{2}\left(h_{\gamma,\,\delta}^{\delta,\,\gamma} - h_{,\,\gamma}^{,\,\gamma}\right)\left(1 + 3\frac{dp}{d\varepsilon}\right) + h'' + h'\frac{a'}{a}\left(2 + 3\frac{dp}{d\varepsilon}\right) = 0. \end{gathered} \tag{111,6}$$

Возмущения плотности и скорости материи могут быть определены по известным h_α^β с помощью формул (111,2—3). Так, для относительного изменения плотности имеем:

$$\frac{\delta\varepsilon}{\varepsilon}=\frac{c^4}{8\pi k\varepsilon}\left(\delta R_0^0-\frac{1}{2}\delta R\right)=\frac{c^4}{16\pi k\varepsilon a^2}\left(h_{\alpha,\beta}^{\beta,\alpha}-h_{,\alpha}^{,\alpha}+\frac{2a'}{a}h'\right). \quad (111,7)$$

Среди решений уравнений (111,6) есть такие, которые могут быть исключены простым преобразованием системы отсчета (не нарушающим ее синхронности) и поэтому не представляют собой реального физического изменения метрики. Вид таких решений может быть заранее установлен с помощью полученных в задаче 3 § 99 формул (1) и (2). Подставив в них невозмущенные значения $\gamma_{\alpha\beta}=a^2\delta_{\alpha\beta}$, получим следующие выражения для фиктивных возмущений метрики:

$$h_\alpha^\beta=f_{0,\alpha}^{;\beta}\int\frac{d\eta}{a}+\frac{a'}{a^2}f_0\delta_\alpha^\beta+(f_\alpha^{;\beta}+f^\beta_{;\alpha}), \quad (111,8)$$

где f_0, f_α — произвольные (малые) функции координат x, y, z.

Поскольку метрика в рассматриваемых нами небольших областях пространства предполагается евклидовой, то произвольное возмущение в каждой такой области может быть разложено по плоским волнам. Понимая под x, y, z декартовы координаты, измеренные в единицах a, мы можем написать пространственный периодический множитель плоских волн в виде $e^{i\mathbf{nr}}$, где $\mathbf{n}$ — безразмерный вектор, представляющий собой волновой вектор, измеренный в единицах $1/a$ (волновой вектор $\mathbf{k}=\mathbf{n}/a$). Если мы имеем возмущение в участке пространства с размерами $\sim l$, то в его разложение войдут в основном волны с длинами $\lambda=2\pi a/n\sim l$. Ограничиваясь возмущениями в областях с размерами $l\ll a$, мы тем самым предполагаем число n достаточно большим ($n\gg 2\pi$).

Гравитационные возмущения можно разделить на три типа. Эта классификация сводится к определению возможных типов плоских волн, в виде которых может быть представлен симметричный тензор $h_{\alpha\beta}$. Таким образом получим следующую классификацию:

1. С помощью скалярной функции

$$Q=e^{i\mathbf{nr}} \quad (111,9)$$

можно составить вектор $\mathbf{P}=\mathbf{n}Q$ и тензоры [1])

$$Q_\alpha^\beta=\frac{1}{3}\delta_\alpha^\beta Q,\quad P_\alpha^\beta=\left(\frac{1}{3}\delta_\alpha^\beta-\frac{n_\alpha n^\beta}{n^2}\right)Q. \quad (111,10)$$

Таким плоским волнам отвечают возмущения, в которых наряду с гравитационным полем испытывают изменения также скорость и

[1]) Мы пишем верхние и нижние индексы у компонент обычного декартового вектора $\mathbf{n}$ лишь для сохранения единообразия обозначений.

плотность материи, т. е. мы имеем дело с возмущениями, сопровождающимися возникновением сгущений или разрежений материи. Возмущение h_α^β выражается при этом через тензоры Q_α^β и P_α^β, возмущение скорости — через вектор **P**, а возмущение плотности — через скаляр Q.

2. С помощью поперечной векторной волны

$$\mathbf{S} = \mathbf{s}e^{i\mathbf{nr}}, \quad \mathbf{sn} = 0, \tag{111,11}$$

можно составить тензор $(n^\beta S_\alpha + n_\alpha S^\beta)$; соответствующего же скаляра не существует, поскольку $\mathbf{nS} = 0$. Этим волнам отвечают возмущения, в которых наряду с гравитационным полем испытывает изменение скорость, но не плотность материи; их можно назвать вращательными возмущениями.

3. Поперечная тензорная волна

$$G_\alpha^\beta = g_\alpha^\beta e^{i\mathbf{nr}}, \quad g_\alpha^\beta n_\beta = 0. \tag{111,12}$$

С ее помощью нельзя составить ни вектора, ни скаляра. Этим волнам отвечают возмущения гравитационного поля, при которых материя остается неподвижной и однородно распределенной в пространстве. Другими словами, это — гравитационные волны в изотропном мире.

Наиболее интересны возмущения первого типа. Полагаем

$$h_\alpha^\beta = \lambda(\eta) P_\alpha^\beta + \mu(\eta) Q_\alpha^\beta, \quad h = \mu Q. \tag{111,13}$$

Из (111,7) получим для относительного изменения плотности

$$\frac{\delta\varepsilon}{\varepsilon} = \frac{c^4}{24\pi k\varepsilon a^2}\left[n^2(\lambda+\mu) + \frac{3a'}{a}\mu'\right]Q. \tag{111,14}$$

Уравнения, определяющие функции λ и μ, получаются подстановкой (111,13) в (111,6):

$$\begin{gathered} \lambda'' + 2\frac{a'}{a}\lambda' - \frac{n^2}{3}(\lambda+\mu) = 0, \\ \mu'' + \mu'\frac{a'}{a}\left(2 + 3\frac{dp}{d\varepsilon}\right) + \frac{n^2}{3}(\lambda+\mu)\left(1 + 3\frac{dp}{d\varepsilon}\right) = 0. \end{gathered} \tag{111,15}$$

Эти уравнения имеют прежде всего следующие два частных интеграла, соответствующие тем фиктивным изменениям метрики, которые могут быть исключены преобразованием системы отсчета:

$$\lambda = -\mu = \text{const}, \tag{111,16}$$

$$\lambda = -n^2\int\frac{d\eta}{a}, \quad \mu = n^2\int\frac{d\eta}{a} - \frac{3a'}{a^2} \tag{111,17}$$

(первый из них получается из (111,8) выбором $f_0 = 0$, $f_\alpha = P_\alpha$, второй — выбором $f_0 = Q$, $f_\alpha = 0$).

На ранних стадиях расширения мира, когда материя описывается уравнением состояния $p=\varepsilon/3$, имеем $a\approx a_1\eta$, $\eta\ll 1$ (как в открытой, так и в закрытой моделях). Уравнения (111,15) принимают вид:

$$\lambda''+\frac{2}{\eta}\lambda'-\frac{n^2}{3}(\lambda+\mu)=0, \quad \mu''+\frac{3}{\eta}\mu'+\frac{2n^2}{3}(\lambda+\mu)=0. \quad (111,18)$$

Исследование этих уравнений удобно производить раздельно для двух предельных случаев в зависимости от взаимного соотношения между двумя большими величинами n и $1/\eta$.

Предположим сначала, что число n не слишком велико (или η достаточно мало), так что $n\eta\ll 1$. С той точностью, с которой справедливы уравнения (111,18), находим из них в данном случае:

$$\lambda=\frac{3C_1}{\eta}+C_2\left(1+\frac{n^2}{9}\eta^2\right), \quad \mu=-\frac{2n^2}{3}C_1\eta+C_2\left(1-\frac{n^2}{6}\eta^2\right),$$

где C_1, C_2 — постоянные; отсюда исключены решения вида (111,16) и (111,17) (в данном случае это — решение, в котором $\lambda-\mu=\text{const}$ и в котором $\lambda+\mu\sim 1/\eta^2$). Вычислив также $\delta\varepsilon/\varepsilon$ согласно (111,14) и (108,15), получим следующие выражения для возмущений метрики и плотности:

$$h_\alpha^\beta=\frac{3C_1}{\eta}P_\alpha^\beta+C_2(Q_\alpha^\beta+P_\alpha^\beta),$$

$$\frac{\delta\varepsilon}{\varepsilon}=\frac{n^2}{9}(C_1\eta+C_2\eta^2)Q \quad \text{при} \quad p=\frac{\varepsilon}{3}, \quad \eta\ll\frac{1}{n}. \quad (111,19)$$

Постоянные C_1, C_2 должны удовлетворять определенным условиям, выражающим малость возмущения в момент η_0 его возникновения: должно быть $h_\alpha^\beta\ll 1$ (откуда $\lambda\ll 1$, $\mu\ll 1$) и $\delta\varepsilon/\varepsilon\ll 1$. В применении к (111,19) эти условия приводят к неравенствам $C_1\ll\eta_0$, $C_2\ll 1$.

В выражениях (111,19) имеются члены, возрастающие в расширяющемся мире как различные степени радиуса $a=a_1\eta$. Однако это возрастание не приводит к тому, чтобы возмущение могло стать большим: если применить формулы (111,19) по порядку величины при $\eta\sim 1/n$, то мы увидим, что (в силу полученных выше неравенств для C_1, C_2) возмущения остаются малыми даже на верхнем пределе действия этих формул.

Пусть теперь число n настолько велико, что $n\eta\gg 1$. Решая уравнения (111,18) при этом условии, найдем, что главные члены в λ и μ равны[1]):

$$\lambda=-\frac{\mu}{2}=\text{const}\cdot\frac{1}{\eta^2}e^{in\eta/\sqrt{3}}.$$

[1]) Предэкспоненциальный множитель $1/\eta^2$ — первый член разложения по степеням $1/n\eta$. Для его определения в данном случае надо рассматривать одновременно два первых члена разложения [что допускается точностью уравнений (111,18)].

Отсюда находим для возмущений метрики и плотности:

$$h_\alpha^\beta = \frac{C}{n^2\eta^2}\left(P_\alpha^\beta - 2Q_\alpha^\beta\right) e^{in\eta/\sqrt{3}}, \quad \frac{\delta\varepsilon}{\varepsilon} = -\frac{C}{9} Q e^{in\eta/\sqrt{3}}$$

$$\text{при } p = \frac{\varepsilon}{3}, \quad \frac{1}{n} \ll \eta \ll 1, \qquad (111,20)$$

где C — комплексная постоянная, удовлетворяющая условию $|C| \ll 1$. Наличие периодического множителя в этих выражениях вполне естественно. При больших n мы имеем дело с возмущением, пространственная периодичность которого определяется большим волновым вектором $k = n/a$. Такие возмущения должны распространяться как звуковые волны со скоростью

$$u = \sqrt{\frac{dp}{d(\varepsilon/c^2)}} = \frac{c}{\sqrt{3}}.$$

Соответственно временная часть фазы определяется, как полагается в геометрической акустике, большим интегралом $\int ku\,dt = n\eta/\sqrt{3}$. Амплитуда относительного изменения плотности остается, как мы видим, постоянной, амплитуды же возмущений метрики при расширении мира убывают как a^{-2} [1]).

Далее, рассмотрим более поздние стадии расширения, когда материя разрежена уже настолько, что можно пренебречь ее давлением ($p = 0$). При этом мы ограничимся здесь лишь случаем малых η, соответствующих тем стадиям расширения, когда радиус a еще очень мал по сравнению с его современным значением, но все же материя уже достаточно разрежена.

При $p = 0$ и $\eta \ll 1$ имеем $a \approx a_0\eta^2/2$ и уравнения (111,15) принимают вид:

$$\lambda'' + \frac{4}{\eta}\lambda' - \frac{n^2}{3}(\lambda + \mu) = 0,$$

$$\mu'' + \frac{4}{\eta}\mu' + \frac{n^2}{3}(\lambda + \mu) = 0.$$

Решение этих уравнений:

$$\lambda + \mu = 2C_1 - \frac{6C_2}{\eta^3}, \quad \lambda - \mu = n^2\left(\frac{C_1\eta^2}{15} + \frac{4C_2}{\eta^3}\right).$$

---

[1]) Легко проверить, что (при $p = \varepsilon/3$) $n\eta \sim L/\lambda$, где $L \sim u/\sqrt{k\varepsilon/c^2}$. Естественно, что характерная длина L, определяющая поведение возмущений с длиной волны $\lambda \ll a$, составляется лишь из «гидродинамических» величин — плотности материи ε/c^2 и скорости звука в ней u (и гравитационной постоянной k). Отметим, что возрастание возмущений имеет место при $\lambda \gg L$ [в (111,19)].

Вычислив также $\delta\varepsilon/\varepsilon$ [с помощью (111,14) и (108,12)], находим:

$$h_\alpha^\beta = C_1 (P_\alpha^\beta + Q_\alpha^\beta) + \frac{2n^2C_2}{\eta^2}(P_\alpha^\beta - Q_\alpha^\beta) \qquad \text{при } \eta \ll \frac{1}{n},$$

$$h_\alpha^\beta = C_1 n^2\eta^2 (P_\alpha^\beta - Q_\alpha^\beta) + \frac{2n^2C_2}{\eta^2}(P_\alpha^\beta - Q_\alpha^\beta) \text{ при } \frac{1}{n} \ll \eta \ll 1, \quad (111,21)$$

$$\frac{\delta\varepsilon}{\varepsilon} = \frac{C_1 n^2\eta^2}{30} + \frac{C_2 n^2}{\eta^2}.$$

Мы видим, что $\delta\varepsilon/\varepsilon$ содержит член, возрастающий пропорционально a[1]). Однако если $n\eta \ll 1$, то $\delta\varepsilon/\varepsilon$ не становится все же большим даже при $\eta \sim 1/n$ в силу условия $C_1 \ll 1$. Если же $\eta n \gg 1$, то при $\eta \sim 1$ относительное изменение плотности становится порядка $C_1 n^2$, между тем как малость начального возмущения требует лишь, чтобы было $C_1 n^2 \eta_0^2 \ll 1$. Таким образом, хотя возрастание возмущений происходит и медленно, но общее увеличение может быть значительным и в результате возмущение может стать сравнительно большим.

Аналогичным образом могут быть рассмотрены возмущения второго и третьего из перечисленных выше типов. Однако законы затухания этих возмущений могут быть найдены и без детальных вычислений, исходя из следующих простых соображений.

Если в небольшом участке вещества (с линейными размерами l) имеется вращательное возмущение со скоростью δv, то момент импульса этого участка $\sim (\varepsilon/c^2) l^3 \cdot l \cdot v$. При расширении мира l растет пропорционально a, а ε убывает как a^{-3} (в случае $p=0$) или как a^{-4} (при $p=\varepsilon/3$). В силу сохранения момента имеем поэтому

$$\delta v = \text{const} \quad \text{при } p = \frac{\varepsilon}{3}, \quad \delta v \propto \frac{1}{a} \quad \text{при } p=0. \qquad (111,22)$$

Наконец, плотность энергии гравитационных волн должна убывать при расширении мира как a^{-4}. С другой стороны, эта плотность выражается через возмущение метрики как $\sim k^2 (h_\alpha^\beta)^2$, где $k = n/a$ — волновой вектор возмущения. Отсюда следует, что амплитуда возмущения типа гравитационной волны убывает со временем как $1/a$.

[1]) Более тщательный анализ с учетом малого давления $p(\varepsilon)$ показывает, что возможность пренебрежения давлением требует соблюдения условия $u\eta n/c \ll 1$ (где $u = c\sqrt{dp/d\varepsilon}$ — малая скорость звука); легко проверить, что и в этом случае оно совпадает с условием $\lambda/L \gg 1$. Таким образом, возрастание возмущений всегда имеет место, если $\lambda/L \gg 1$.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ [1]

[1] Этот указатель дополняет оглавление, не повторяя его. В указатель включены термины и понятия, непосредственно не отраженные в оглавлении.

